Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2000, Том 2, Выпуск 3

УДК **517.5 + 517.9**

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

М. С. Алборова

Исследуется вопрос об устранимости особенностей для ограниченных решений эволюционных уравнений параболического типа.

Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$ — ограниченная цилиндрическая область, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ точек $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t)$.

Предположим, что $P(x,t,D)$ — дифференциальный оператор в частных производных, определенный на открытом множестве $Q_T \subset \mathbb{R}^{n+1}$, а e — компакт в Q_T. Пусть $\mathcal{F}(Q_T \backslash e)$ и $\mathcal{F}(Q_T)$ — некоторые классы функций на множествах $Q_T \backslash e$ и Q_T соответственно. Множество e называется устранимым для дифференциального уравнения $P(x,t,D)f = 0$ относительно функциональных классов $\mathcal{F}(Q_T \backslash e)$ и $\mathcal{F}(Q_T)$, если для всякого решения $f \in \mathcal{F}(Q_T \backslash e)$ уравнения $P(x,t,D)f = 0$ на $Q_T \backslash e$ существует решение $\tilde{f} \in \mathcal{F}(Q_T)$ уравнения $P(x,t,D)f = 0$ на Q_T такое, что $\tilde{f}|_{Q_T \backslash e} = f$. Решение $\tilde{f}$ называется продолжением решения f уравнения $P(x,D)f = 0$ с $Q_T \backslash e$ на Q_T.

Задача состоит в нахождении функционально-геометрических характеристик множества e, которые гарантируют, что множество e устранимо.

Устранимость компактов для решений параболических уравнений хорошо изучена в классе ограниченных гёльдеровых функций и в некоторых пространствах Соболева (см., например, [1–6]). Условия устранимости описываются в зависимости от вида уравнения, в терминах равенства нулю соответствующих емкостей и мер Хаусдорфа.

В настоящей статье исследуется вопрос об устранимости особенностей для ограниченных решений эволюционных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div} A(x,t,u,\bigtriangledown_x u) + B(x,t,u,\bigtriangledown_x u) = 0,$$

где A и B — некоторые функции, удовлетворяющие определенным условиям (см. §2).

Данная работа состоит из двух параграфов. В §1 определены весовые пространства Соболева. В §2 формулируются достаточные условия устранимости особенностей для ограниченных решений упомянутого выше класса параболических уравнений.

1. Функциональное пространство

Пусть ω — локально интегрируемая неотрицательная функция на Ω. Измеримому множеству E соответствует весовая мера $\mu(E) = \int_E \omega(x)dx$. Тогда $d\mu(x) = \omega(x)dx$, где dx — мера Лебега. Говорят, что ω есть *p-допустимый вес* $(1 < p < \infty)$, если выполнены следующие условия:

$W1$. $\omega(x)dx$ и dx взаимно абсолютно непрерывны;

$W2$. $0 < \omega < \infty$ почти всюду в Ω и существует константа C такая, что $\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$ для любого шара $B(x, r)$, где $2B \subset \Omega$ (условие удвоения);

$W3$. если $\varphi_i \in C^\infty(\Omega)$ — последовательность функций такая, что

$$\int\limits_\Omega |\varphi_i|^p d\mu \to 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_\Omega |\bigtriangledown_x \varphi_i - v|^p d\mu \to 0$$

при $i \to \infty$, где v — векторнозначная функция из $L^p(\Omega, \mu; \mathbb{R}^m)$, то $v = 0$;

$W4$. существуют константы $k > 1,\ r_0,\ c_3 > 0$ такие, что

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |\varphi|^{kp} d\mu\right)^{\frac{1}{kp}} \leq c_3 r \left(\frac{\int}{\mu(B)} \int\limits_B |\bigtriangledown_x \varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и шара $B = B(x, r) \subset \Omega,\ x \in \bar{\Omega},\ 0 < r < r_0$;

$W5$. существуют константы $r_0,\ c_4 > 0$ такие, что

$$\int\limits_B |\varphi - \varphi_B|^p d\mu \leq c_4 r^p \int\limits_B |\bigtriangledown_x \varphi|^p d\mu$$

для любой функции $\varphi \in C^\infty(\bar{B})$ и произвольного шара $B = B(x, r) \subset \Omega,\ x \in \bar{\Omega},\ 0 < r < r_0$. Здесь $\varphi_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B \varphi d\mu$.

Из условия $W4$ на весовую функцию с помощью неравенства Гёльдера получаем весовое неравенство Пуанкаре: если $D \subset \Omega$ — ограниченное открытое множество, $\mathrm{diam} D < 2r_0$ и $\varphi \in C_0^\infty(D)$, то

$$\int\limits_D |\varphi|^p d\mu \leq C(\mathrm{diam} D)^p \int\limits_D |\bigtriangledown_x \varphi|^p d\mu \tag{1}$$

(см. [9]).

Определим $L_p(\Omega,\mu)$ как класс функций

$$L_p(\Omega,\mu)=\left\{f:\|f|L_p(\Omega,\mu)\|=\left(\int\limits_{\Omega}|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}.$$

Говорят, что функция u принадлежит классу $W^1_p(D,\mu)$, если и только если $u\in L_p(D,\mu)$ и надйется векторнозначная функция $v\in L_p(D;\mu,\mathbb{R}^n)$ такая, что для некоторой последовательности $\varphi_k\in C^\infty(D)$ ($\varphi_k\in C_0^\infty(D)$)

$$\int\limits_D|\varphi_k-u|^p d\mu\to 0 \ \text{ и } \ \int\limits_D|\bigtriangledown_x\varphi_k-v|^p d\mu\to 0$$

при $k\to\infty$. Вектор-функцию v называют *субградиентом* функции u в $W^1_p(D,\mu)$ и обозначают символом $\bigtriangledown_x u$.

Ясно, что пространства $W^1_p(\Omega,\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega,\mu)$ — банаховы пространства относительно нормы $\|u\|_{W^1_p(\Omega,\mu)}=\|u\|_{L_p(\Omega,\mu)}+\|\bigtriangledown_x u\|_{L_p(\Omega,\mu)}$. Кроме того пространства $W^1_p(\Omega,\mu)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega,\mu)$ рефлексивны.

Функция u принадлежит пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)$, если она принадлежит пространству $W^1_p(D,\mu)$ для всякой ограниченной области D, замыкание которой содержится в Ω.

Пространство $\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega,\mu)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{L}{}^1_p(\Omega,\mu)}=\|\bigtriangledown_x u\|_{L_p}(\Omega,\mu).$$

Функция u принадлежит пространству $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если для нее выполняется неравенство

$$|u(x)-u(y)|\le\mu|x-y|$$

для любой подобласти $D,\bar{D}\subset\Omega$. Здесь $|\cdot|$ — евклидова норма. В работе [8] доказано, что пространство $W^1_{p,\mathrm{lip}}(\Omega,\mu)=W^1_p(\Omega)\cap\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ плотно в $W^1_p(\Omega,\mu)$. Кроме того $W^1_{p,\mathrm{lip}}(\Omega,\mu)$ есть векторная решетка.

Отметим, что приведенные выше весовые пространства дифференцируемых функций хорошо изучены в работах С. К. Водопьянова [7–11] и других авторов. (см., например, [12–14]).

Пусть t — переменная времени. Мы будем предполагать, что $t\in(0,T)$, где T конечно или равно $+\infty$. Пусть B — банахово пространство. Обозначим через $L_p(0,T;B)$, $p\ge 1$ пространство (классов) функций f со значениями в B, измеримых на $(0,T)$ (относительно меры Лебега dt на $(0,T)$). Пространство $L_p(0,T;B)$ является банаховым пространством по отношению к норме

$$\|f;L_p(0,T;B)\| = \begin{cases} \{\int_0^T \|f(t)\|_B^p dt\}^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \le p \le \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_B & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Обозначим $W_p^{1,0}(Q_T,\mu) = L_p(0,T;W_p^1(\Omega,\mu))$ и пусть $\overset{\circ}{W}{}_p^{1,0}(Q_T,\mu)$ — замыкание $C_0^1(Q_T) = \{u \in C^1(\bar{Q}_T) : u = 0 \text{ на } ,_T\}$ по норме $\|\cdot\|_{W_p^{1,0}}(Q_T,\mu)$, где

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T,\mu)} = \|u\|_{p,p,Q_T,\mu}^p + \|\bigtriangledown_x u\|_{p,p,Q_T,\mu}^p,$$

$$\|u\|_{p,q,Q_T,\mu} = \|u;L_p(0,T;L_q(\Omega;\mu))\|.$$

В дальнейшем $\|u\|_{p,p,Q_T,\mu}$ будем обозначать как $\|u\|_{p,p,Q_T,\mu} = \|u\|_{p,Q_T,\mu}$ и

$$\left(\iint\limits_{Q_T} |u|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{p,Q_T},$$

$$L_p(0,T;L_q(\Omega;\mu)) = L_{p,q,Q_T,\mu},$$

$$L_p(0,T;L_p(\Omega;\mu)) = L_{p,Q_T,\mu},$$

$$L_p(0,T;L_q(\Omega)) = L_{p,q,Q_T},$$

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \mathrm{vrai}\max|u|.$$

Будем говорить, что функция $u \in L_{p,Q_T,\mu}$ имеет *строгий субградиент* v, если найдется последовательность $\varphi_k \in C^\infty(Q_T)$ такая, что

$$\iint\limits_{Q_T} |\varphi_k - u|^p d\mu dt \to 0 \ \text{ и } \iint\limits_{Q_T} |\bigtriangledown_x \varphi_k - v|^p d\mu dt \to 0. \tag{2}$$

Для любого компактного множества $e \in Q_T$ определим класс функций

$$V(e,Q_T) = \{u \in C_0^\infty(Q_T): \ u \ge 1 \text{ в окрестности } e, \ 0 \le u \le 1 \text{ в } Q_T\}$$

и назовем (p,μ)-*емкостью* компакта e число

$$\mathrm{cap}(e) = \inf_{\varphi\in V(e,Q_T)} \left\{ \iint\limits_{Q_T} |\bigtriangledown_x \varphi|^p d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} |\varphi_t| dxdt \right\}.$$

Емкость как функция множества естественным образом распространяется на произвольные множества.

Термин «квазивсюду» означает, что данное свойство выполняется всюду, за исключением множества, имеющего емкость ноль.

Лемма 1. *Пусть e — компактное множество (p,μ)-емкости ноль $(1 < p < \infty)$. Тогда существует последовательность $\{\xi^k\}$ такая, что $\xi^k \in C_0^\infty(Q_T)$, $0 \le \xi^k \le 1$, $\xi^k = 1$ в окрестности e, $\xi^k \to 0$ п. в. в Q_T и $\| \bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$, $\|\xi_t^k\|_{1,Q_T} \to 0$.*

$\lhd$ Так как емкость $\mathrm{cap}(e) = 0$, то существует последовательность $\{\varphi^k\} \in V(e, Q_T)$ такая, что $\| \bigtriangledown_x \varphi^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$ и $\|\varphi_t^k\|_{1,Q_T} \to 0$. Используя технику Дж. Серрина [15], рассмотрим функцию $\Theta^k = \max(\min(\varphi^k, 1), 0)$. Тогда Θ^k — функция с компактным носителем в Q_T, $0 \le \Theta^k \le 1$, $\Theta^k = 1$ в окрестности e и $\| \bigtriangledown_x \Theta^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$, $\|\Theta_t^k\|_{1,Q_T} \to 0$.

Пусть $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ — функция с компактным носителем такая, что $\rho \ge 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho(x,t)dxdt = 1$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ пусть ρ_ε обозначает функцию $x \to \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}$, $\rho(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon})$. Для достаточно малых ε свертка $\xi^k = \rho_\varepsilon * \Theta^k \in C_0^\infty(Q_T)$. Так как $\|\bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \le \|\bigtriangledown_x \Theta^k\|_{p,Q_T,\mu}$ и $\|\xi_t^k\|_{1,Q_T} \le \|\Theta_t^k\|_{1,Q_T}$, то $\| \bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$ и $\|\xi_t^k\|_{1,Q_T} \to 0$.

Пусть $\xi^{k,t}(x) = \xi^k(x,t)$. Тогда $\xi^{k,t} \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}\, \xi^{x,t} \subset \Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Используя весовое неравенство Пуанкаре (1), имеем

$$\int\limits_D |\xi^{k,t}(x)|^p d\mu \le C \int\limits_D | \bigtriangledown_x \xi^{k,t}|^p d\mu$$

для любого открытого ограниченного множества $D \subset \Omega$.

С помощью неравенства Гёльдера очевидно

$$|\mu(D)|^{1-p} \left(\int\limits_D |\xi^{k,t}| d\mu \right)^p \le C \int\limits_D | \bigtriangledown_x \xi^{k,t}|^p d\mu.$$

Далее получим

$$|\mu(D)|^{1-p} |T|^{1-p} \left(\int\limits_0^T \int\limits_D |\xi^k| d\mu dt \right)^{\frac{1}{p}} \le C \int\limits_0^T \int\limits_D | \bigtriangledown_x \xi^k|^p d\mu dt.$$

Очевидно, $\int\limits_0^T \int\limits_D |\xi^k| d\mu dt \to 0$ для любого открытого ограниченного множества D из Ω. Следовательно, найдется подпоследовательность $\{\xi^k\}$ такая, что $\xi^k \in C_0^\infty(Q_T)$, $0 \le \xi^k \le 1$, $\xi^k = 1$ в окрестности e, $\xi^k \to 0$ п. в. в Q_T и $\| \bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$, $\|\xi_t^k\|_{1,Q_T} \to 0$. $\rhd$

2. Устранение особенностей

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; $Q_T = \Omega \times (0,T]$ для некоторого фиксированного $T > 0$ и $S_T = \partial\Omega \times (0,T]$, $\Gamma_T = S_T \cup (\Omega \times \{t=0\})$ (Γ_T — параболическая граница цилиндра Q_T).

Рассмотрим в Q_T уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div} A(x,t,u,\bigtriangledown_x u) + B(x,t,u,\bigtriangledown_x u) = 0, \tag{3}$$

где $\bigtriangledown_x u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$, $A = (A^1, \ldots, A^n)$, функции $A(x,t,\eta,\xi)$ и $B(x,t,\eta,\xi)$ удовлетворяют условию Каратеодори.

Предположим, что при всех $(x,t) \in Q_T$ и $\eta \in R\backslash\{0\}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ для некоторого $p \in (1,\infty)$ существует константа $\alpha > 0$ и измеримые функции $f_1, f_2, f_3, g_2, g_3, h_3$ такие, что выполнены следующие условия:

$$|A(x,t,\eta,\xi)| \leq \alpha|\xi|^{p-1}\omega(x) + g_2|\eta|^{p-1}\omega(x) + g_3\omega(x), \tag{4}$$

$$|B(x,t,\eta,\xi)| \leq f_1|\xi|^{p-1}\omega(x) + f_2|\eta|^{p-1}\omega(x) + f_3\omega(x), \tag{5}$$

$$A(x,t,\eta,\xi) \cdot \xi \geq |\xi|^p\omega(x) - f_2|\eta|^p\omega(x) - h_3\omega(x), \tag{6}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\eta \in R$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\omega(x)$ — p-допустимый вес, $f_1 \in L_{p,Q_T,\mu}$, $f_2, f_3, h_3 \in L_{1,Q_T,\mu}$, $g_2, g_3 \in L_{\frac{p}{p-1},Q_T,\mu}$.

Обобщенным решением уравнения (3) при условиях (4)–(6) назовем функцию $u \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q_T,\mu)$, если

$$\iint\limits_{Q_T} \{-u\varphi_t + A(x,t,u,\bigtriangledown_x u) \bigtriangledown_x \varphi - B(x,t,u,\bigtriangledown_x u)\varphi\} dxdt = 0$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$.

Используя технику, предложенную Дж. Сериным [15], аналогично результатам Л. М. Р. Сараивы [4] доказывается

Лемма 2. *Пусть Q_T — открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $b \in R\backslash\{0\}$. Пусть u является решением уравнения (3) в Q_T и пусть ψ — произвольная функция с компактным носителем в Q_T такая, что $\phi \in L_\infty(Q_T)$ и $\psi \in W_p^{1,0}(Q_T,\mu)$, $p \geq 1$, $\phi_t \in L_1(Q_T)$. Тогда имеет место равенство*

$$\iint\limits_{Q_T} \left[A(x,t,u,\bigtriangledown_x u) \bigtriangledown_x (\psi e^{bu}) - B(x,t,u,\bigtriangledown_x u)\psi e^{bu} - \frac{e^{bu}}{b}\psi_t\right] dxdt = 0.$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть* u — *решение уравнения* (3), $u \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q_T,\mu) \cap L_\infty(\Omega)$, $z \in W^1_p(Q_T,\mu) \cap C_0(Q_T)$ *и* $z_t \in L_{1,Q_T}$, *причем*

$$\|u\|_{\infty,Q_T} + \|z\|_{\infty,Q_T} + \| \bigtriangledown_x z\|^p_{p,Q_T,\mu} + \|z_t\|_{1,Q_T} \le M.$$

Тогда существует постоянная $C = C(M, f_1, f_2, f_3, g_2, g_3, h_3)$ *такая, что*

$$\iint\limits_{Q_T} |z \bigtriangledown_x u|^p d\mu dt \le C.$$

$\lhd$ Функция $\psi = |z|^p \in W^{1,0}_p(Q_T,\mu) \cap C_0(Q_T)$. Используя лемму 2, имеем

$$\iint\limits_{Q_T} \left[-e^{-bu} \frac{\partial |z|^p}{\partial t} + A \bigtriangledown_x (|z|^p e^{bu}) - B(|z|^p e^{bu}) \right] dxdt = 0.$$

С учетом условий (4)–(6) получим

$$\iint\limits_{Q_T} | \bigtriangledown_x u|^p z^p e^{bu} d\mu dt$$

$$\le \iint\limits_{Q_T} \alpha | \bigtriangledown_x u|^{p-1} \bigtriangledown_x (|z|^p) e^{bu} d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} g_2 |u|^{p-1} \bigtriangledown_x (|z|^p) e^{bu} d\mu dt$$

$$+ \iint\limits_{Q_T} g_3 \bigtriangledown_x |z|^p e^{bu} d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} f_1 | \bigtriangledown_x u|^{p-1} z^p e^{bu} d\mu dt$$

$$+ \iint\limits_{Q_T} f_2 |u|^{p-1} |z|^p e^{bu} d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} f_3 |z|^p e^{bu} d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} h_3 |z|^p e^{bu} d\mu dt$$

$$+ \iint\limits_{Q_T} f_2 |u|^p |z|^p e^{bu} d\mu dt + \iint\limits_{Q_T} \frac{e^{du}}{b} \frac{\partial |z|^p}{\partial t} dxdt = \sum_{k=1}^{9} I_k. \tag{7}$$

Оценим каждый из девяти интегралов правой части:

$$I_1 \le p\alpha e^{b\|u\|_\infty} \cdot \|z \bigtriangledown_x u\|_{p,Q_T,\mu} \cdot \| \bigtriangledown_x z\|_{p,Q_T,\mu},$$

$$I_2 \le p e^{b\|u\|_\infty} \cdot \|u\|^{p-1}_\infty \cdot \| \bigtriangledown_x z\|_{p,Q_T,\mu} \cdot \|z\|^{p-1}_\infty \cdot \|g_2\|_{\frac{p}{p-1},Q_T,\mu},$$

$$I_3 \le pe^{b\|u\|_\infty} \cdot \|g_3\|_{\frac{p}{p-1},Q_T,\mu} \cdot \| \bigtriangledown_x z\|_{p,Q_T,\mu},$$

$$I_4 \le e^{b\|u\|_\infty} \cdot \|z\|_\infty \cdot \|z \bigtriangledown_x u\|^{p-1}_{p,Q_T,\mu} \cdot \|f_1\|_{p,Q_T,\mu},$$

$$I_5 \le e^{b\|u\|_\infty} \cdot \|u\|^{p-1}_\infty \cdot \|z\|^p_\infty \|f_2\|_{1,Q_T,\mu},$$

$$I_6 \le e^{b\|u\|_\infty} \cdot \|z\|^p_\infty \cdot \|f_3\|_{1,Q_T,\mu},$$

$$I_7 + I_8 \le C(M, f_2, h_3),$$

$$I_9 \le e^{b\|u\|_\infty} \|z\|^{p-1}_\infty \|z_t\|_{1,Q_T}.$$

Оценим теперь левую часть

$$\iint\limits_{Q_T} | \bigtriangledown_x u|^p |z|^p e^{bu} d\mu dt \ge e^{-\|u\|_\infty} \iint\limits_{Q_T} | \bigtriangledown_x u|^p |z|^p d\mu dt.$$

Собирая вместе оценки левой и правой частей неравенства (7), окончательно имеем

$$\|z \bigtriangledown_x u\|^p_{p,Q_T,\mu} \le \|z \bigtriangledown_x u\|^{p-1}_{p,Q_T,\mu} C_3(M, f_1) + C_6(M, f_2, f_3, g_2, g_3, h_3).$$

Лемма доказана. $\triangleright$

Теорема 1. *Пусть Q_T — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, e — компакт в Q_T нулевой (p,μ)-емкости. Если функция $u \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q_T, \backslash e, \mu) \cap L_\infty(Q_T)$ удовлетворяет уравнению* (2) *на множестве $Q_T \backslash e$, то существует единственное продолжение $\tilde{u} \in W^{1,0}_{\mathrm{loc},p}(Q_T, \mu)$ решения u такое, что $\tilde{u}$ есть решение уравнения (3) на Q_T.*

$\triangleleft$ Пусть ξ^k — последовательность функций из леммы 1. Пусть функция $\psi \in C_0^\infty(Q_T)$ с компактным носителем $S \subset Q_T$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ в окрестности ω множества e. Определим последовательность функций $z^k = \psi(1-\xi^k)$. Очевидно $z^k \in C_0^\infty(Q_T \backslash e)$. Легко видеть, что $\| \bigtriangledown_x z^k\|_{p,Q_T,\mu} \le C$, где C — постоянная, не зависящая от k. Так как $u \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(Q_T, \backslash e, \mu)$, $\psi = 1$ на ω, и мера множества e равна нулю, то

$$\int\limits_\omega |u|^p |1 - \xi^k|^p d\mu dt$$

остается ограниченным при $k \to \infty$. Так как $\xi^k \to 0$ п. в., то $u \in L_{p,Q_T,\mu,\mathrm{loc}}$.

Далее по лемме 2 $\|z^k \bigtriangledown_x u\|_{p,Q_T,\mu} \le C$, и т. к. $z^k \to \psi$ почти всюду, то $\|\psi \bigtriangledown_x u\|_{p,Q_T,\mu} \le C$ и $\bigtriangledown_x u \in L_{p,Q_T,\mu,\mathrm{loc}}$.

Далее аналогичным рассуждением доказываем, что $\bigtriangledown_x u$ является строгим субградиентом, т. е. найдется последовательность функций $\varphi_i \in C^\infty(Q_T)$ таких, что выполняются условия (2).

Теперь докажем, что u является решением (3) в Q_T. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$, имеем

$$\iint\limits_{Q_T} [A \bigtriangledown_x ((1-\xi^k)\varphi) - B(1-\xi^k)\varphi - u(1-\xi^k)\varphi)_t] dxdt = 0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{Q_T} (1-\xi^k)[A \bigtriangledown_x \varphi - B\varphi - u\varphi_t] = \iint\limits_{Q_T} \varphi[u(\xi^k)_t - A(\xi^k)_x] dxdt.$$

Ввиду того, что $\xi^k \to 0$ п. в., первый интеграл стремится к

$$\iint\limits_{Q_T} (A \bigtriangledown_x \varphi - B\varphi - u\varphi_t) dxdt.$$

Второй интеграл в силу условий (4)–(6) не превосходит величины

$$\|u\|_\infty \cdot \|\varphi\|_p \cdot \|\xi_{jt}\|_p + \| \bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \cdot \|\varphi\|_\infty \big(\alpha \| \bigtriangledown_x u\|^{p-1}_{p,Q_T,\mu}$$

$$+ \|u\|^{p-1}_\infty \cdot \|g_2\|_{\frac{p}{p-1},Q_T,\mu} + \|g_3\|_{\frac{p}{p-1},Q_T,\mu}\big).$$

Так как $\|\xi^k_t\|_p \to 0$, $\| \bigtriangledown_x \xi^k\|_{p,Q_T,\mu} \to 0$, то последнее выражение можно сделать как угодно малым. Следовательно,

$$\iint\limits_{Q_T} (A \bigtriangledown_x \varphi - B\varphi - u\varphi_t) dxdt = 0.$$

Таким образом u — является решением (3) в Q_T и теорема доказана. $\triangleright$

Литература

1. *Aronson D. G.* Removable singularities for linear parabolic equations // Arch. Rational Mech. Anal.—1964.—V. 17.—P. 79–84.
2. *Edmunds D. E., Peletier L. A.* Removable singulirities of solutions to quasilinear parabolic equations // J. London Math. Soc.—1970.—V. 2, No. 2.—P. 273–283.

3. *Gariepy R., Ziemer W. P.* Removable sets for parabolic equations // J. London Math. Soc.—1981.—V. 21, No. 2.—P. 311–318.
4. *Saraiva L. M. R.* Removable singularities and quasilinear parabolic equations // Proc. London Math. Soc.—1984.—V. 48, No. 3.—P. 385–400.
5. *Крайзер В., Мюллер Б.* Устранимые множества для уравнения теплопроводности // Вест. МГУ.—1973.—№ 3.—С. 26–32.
6. *Ziemer W. P.* Regularity at the boundary and removable singularities for solutions of quasilinear parabolic equations // Proc. Center for Math. Anal. Australia Nat. Univ.—1982.—V. 1.—P. 17–25.
7. *Водопьянов С. К.* Разряженные множества в весовой теории потенциала и вырождающиеся эллиптические уравнения // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 1.—С. 28–36.
8. *Водопьянов С. К.* Весовые пространства Соболева и граничное поведение решений вырождающихся гипоэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 2.—С. 278–300.
9. *Водопьянов С. К.* Весовая L_p-теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 29–48.
10. *Водопьянов С. К., Маркина И. Г.* Исключительные множества для решений субэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 4.—С. 805–818.
11. *Водопьянов С. К., Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки СО РАН,—1995.—С. 3–64.
12. *Lu G.* Weigthed Poincare and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Revista Matematica Iberoamericana.—1992.—V. 8, No. 4.—P. 367–439.
13. *Fabes E. B., Kenig C. E., and Serapioni R. R.* The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations // Comm. in P. D. E.—1982.—V. 7, No. 1.—P. 77–116.
14. *Jerison D.* The Poincare inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J.—1986.—V. 53, No. 2,—P. 503–523.
15. *Serrin J.* Introduction to differentiation theory.—University of Minnesota, 1965.

г. Владикавказ *Статья поступила 27 августа 2000 г.*