Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2000, Том 2, Выпуск 2

Юрию Леонидовичу Ершову
к его шестидесятилетию

УДК **512.552.32+514.146.7**

О ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЯХ НАД СЛАБО-ДИСТРИБУТИВНЫМИ ТЕЛАМИ И IP_0VW-СИСТЕМАМИ

И. А. Хубежты

В работе представлен обзор результатов полученных автором в [3–7] о существовании слабо-дистрибутивных алгебр, почти-алгебр, тел, IP_0VW-систем и их некоторых обобщений. Полученные результаты указывают на существование новой области исследований в теории алгебраических систем.

Сначала приведем формулировки теорем Холла и Холла — Цассенхауза.

А. Теорема Холла [1]. *Пусть F — поле действительных чисел, $f(z) = z^2 \Leftrightarrow rz \Leftrightarrow s$ — многочлен, неприводимый над F. Тогда множество $B = \{a + bu \mid a, b \in F,\ u \notin F\}$ составляет VW-систему относительно следующих операций:*

(1) $z \oplus w = z + w,\ z = z_1 + z_2u,\ w = w_1 + w_2u \ \ (z_1, z_2, w_1, w_2 \in F,\ u \notin F)$,

(2) $(a + bz)q = q(a + bz) = qa + qbz \ \ (q, a, b \in F,\ z \notin F)$,

(3) $(c + dz) \circ z = ds + z(c + dr) \ \ (c, d, r, s \in F,\ z \notin F)$.

В. Теорема Холла — Цассенхауза [1, 2]. *Пусть F — поле, отличное от поля $GF(2^k)$, и $f(z) = z^2 \Leftrightarrow rz \Leftrightarrow s$ — неприводим над F. Тогда множество $M = \{\lambda a + b \mid a, b \in F,\ \lambda \notin F\}$ представляет специальную правую VW-систему относительно следующих операций:*

(1) $(\lambda a_1 + b_1) + (\lambda a_2 + b_2) = \lambda(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \ \ (a_i, b_i \in F)$,

(2) $q(z + w) = qz + qw = (z + w)q,\ q \in F \ \ (zw \notin F)$,

(3) $(\lambda a + b)(\lambda c + d) = \lambda(ad \Leftrightarrow bc + rc) + bd \Leftrightarrow a^{-1}c(b^2 \Leftrightarrow br \Leftrightarrow s)$.

Перейдем теперь к раскрытию темы.

1. О некоторых слабо-дистрибутивных алгебрах и почти-алгебрах

1. Определение [3]. Алгебраическую систему $B(+, \cdot)$, операции которой удовлетворяют условиям

(1) $B(+)$ — абелева группа,

(2) $B(\cdot)$ — группоид с единицей e,

(3) $a(e+b) = a + ab$ $(\forall a, b)$,

(4) $(a+e)b = ab + b$ $(\forall a, b)$, назовем *слабо-дистрибутивным кольцом* (а если выполненно только одно из условий (3) или (4), то *слабо-дистрибутивным почти-кольцом*).

2. Определение. Линейное пространство, оснащенное структурой слабо-дистрибутивного кольца, назовем *слабо-дистрибутивной алгеброй.* Слабо-дистрибутивную алгебру с обратимым умножением, в которой уравнения $ax = b$, $yc = a$, $az = bz + c$ и $ta = tb + c$, $a \neq b$, однозначно разрешимы относительно x, y, z и t, назовем *слабо-дистрибутивным телом.*

3. Теорема [3]. *Пусть в условиях теоремы Холла* $F = GF(2^{2k+1})$ *и* $f(z) = z^2 + z + 1$. *Тогда система* $B_1 = \{a + bu |\ a, b \in F,\ u \notin F\}$ *со следующими операциями сложения и умножения:*

(1) $(a_1 + a_2u) + (b_1 + b_2u) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)$,

(2) $(z + w)q = zq + wq = g(z + w)\ \ (q \in F)$,

(3) $(c + dz) \circ z = 1 + z(c + d)\ \ (c, d \in F)$

будет слабо-дистрибутивной алгеброй.

4. Примечание. Простейшим примером слабо-дистрибутивного кольца служит кольцо целых чисел.

5. Определение [4]. Линейное пространство, оснащенное структурой левого (правого) слабо-дистрибутивного почти-кольца, назовем *левой* (*правой*) *слабо-дистрибутивной почти-алгеброй.* Слабо-дистрибутивную почти-алгебру с единицей, в которой уравнения $ax = b$, $ya = c$, $az = bz + c$, $ta = tb + c$, $a \neq b$, однозначно разрешимы относительно x, y, z, t, назовем *слабо-дистрибутивным левым* (*правым*) *телом* или *слабо-дистрибутивной левой* (*правой*) IP_0VW*-системой.*

Построим примеры слабо-дистрибутивной левой почти-алгебры (теорема 6) и слабо-дистрибутивной алгебры (теорема 7).

6. Теорема [1, 4]. *Пусть в теореме Холла* $f(z) = z^2 \Leftrightarrow rz \Leftrightarrow s$ *неприводим над полем* $F \neq GF(2^k)$ *и во множестве* $B_2 = \{a + bu\,|a, b \in F,\ u \notin F\}$ *умножение элементов определено следующим образом:* $\omega \circ z = (c + dz) \circ z = s + z(c + dr)$, *тогда* $B_2(+, \circ)$ *будет слабо-дистрибутивной левой почти-алгеброй.*

7. Теорема [4]. *Если в коммутативной неальтернативной эластичной алгебре над полем* $F = GF(2^k)$ *определить новое умножение по правилу:* $x \circ y = \sqrt{x}y\sqrt{x}$, *то она будет представлять некоммутативную и неэластичную правую почти-алгебру* $B_3(+, \circ)$ *в которой* $(y + 1) \circ x = y \circ x + x$.

2. О некоторых слабо-дистрибутивных телах и IP_0VW-системах

Докажем существование IP-справа левой IP_0VW-системы $B_5(+,\cdot)$, в которой $a(b+1)=ab+a$ и $ab\cdot b=a\cdot bb$.

8. Теорема [4]. *Для $F=GF(2^{2k+1})$ и трехчлена $f(z)=z^2+z+1$, неприводимого над F, множество $M=\{a+bu\,|a,b\in F, u\notin F\}$ относительно операций $(+)$ и $(\circ)$, определенных в формулировке теоремы Холла, составляет VW-систему, в которой имеют место условия:*

(0) $z\circ(1+t)=z+z\circ t$;
(1) $z\circ z^{-1}=z^{-1}\circ z=1,\ z\neq 0$;
(2) $(\omega\circ z)\circ z=\omega_0(z\circ z)\ (\forall\omega,z)$;
(3) $(\omega\circ z)\circ z^{-1}=\omega,\ z\neq 0$;
(4) $z^{-1}\circ(z\circ z)=z\ (\forall z\neq 0)$.

9. Для построения примера IP-слева правой IP_0VW-системы B_6, в которой $(a+1)b=ab+b$ для любых a,b и $a\cdot ab=aa\cdot b$, мы воспользуемся теоремой Холла — Цассенхауза.

10. Теорема [5]. *Пусть в условиях теоремы Холла — Цассенхауза $F=GF(2^{2k+1})$, $f(x)=x^2+x+1$. Тогда $B(+,\circ)$ будет представлять IP-слева правую IP_0VW-систему, в которой $(1+b)\circ c=c+b\circ c$ и $a\circ(a\circ b)=(a\circ a)\circ b$, т. е. систему $B_6(+,\circ)$.*

11. Теорема [5]. *Не во всякой левой* (правой) IP_0VW-системе $B_0(+,\cdot)$ из тождества $a(b+1)=ab+a$ следует тождество $a(b+c)=ab+ac$ (соответственно из $(1+a)b=b+ab$ следует $(a+b)c=ac+bc$).

$\lhd$ Доказательство теоремы 11 следует из существования тел $B_5(+,\cdot)$ и $B_6(+,\cdot)$, см. 8 и 10. $\rhd$

Из 8, 10 и 11 следует, что существуют право-альтернативные слабо-дистрибутивные тела, не являющиеся лево-альтернативными слабо-дистрибутивными телами.

О существовании слабо-дистрибутивных алгебр и почти-алгебр, в которых выполняются условия $a^{-1}a=aa^{-1}=1$, $a\cdot aa=aa\cdot a$, $a=a^{-1}\cdot aa=aa\cdot a^{-1}$ $(\forall a\neq 0)$, гласит следующая

12. Теорема [4]. (1) *Система $B_5\oplus B_6=\{(x_i,y_i), x_i\in B_5, y_i\in B_6\}$ представляет слабо–дистрибутивную алгебру B_7, в которой имеют место равенства*

$$(a+1)b=ab+b \ \text{ и } \ a(b+1)=ab+a \quad (\forall a,b).$$

(2) *Система $B_5\oplus A_k$, где A_k — тело Клейнермана, представляет левую IP_0VW-систему B_8, в которой $a(b+1)=ab+a$.*

Очевидна следующая

13. Теорема. *Всякое левое* (правое) слабо-дистрибутивное почти-тело есть левое (правое) почти-тело. Всякое слабо-дистрибутивное ассоциативное тело есть ассоциативное тело.

14. Теорема [3]. *Слабо-дистрибутивное тело* $B(+,\cdot)$, *в котором выполняются условия* $aa = 1$, $(y \cdot zy)x = (yz \cdot y)x = y(z \cdot yx)$ $(\forall x, y, z)$ *и* $a^{-1} \cdot ab = b = ba \cdot a^{-1}$, *есть поле.*

$\lhd$ В силу $(a+1)c = ac+c$, $a(b+1) = ab+a$, справедливых в $B(+,\cdot)$, имеем:

$$\begin{aligned} c(x+y) &= c((xy^{-1}+1)y) = c((xy^{-1}+1)\cdot ct) = (c(xy^{-1}+1)\cdot c)t \\ &= ((c\cdot xy^{-1}+c)c)t = (((c\cdot xy^{-1})c+1)\cdot c)t = ((c\cdot xy^{-1})c+1)t \\ &= ((c\cdot xy^{-1})c)t + c^{-1}\cdot ct = c(xy^{-1}\cdot ct) + t = c(xy^{-1}\cdot y) + c\cdot ct \\ &= cx + cy. \end{aligned}$$

В силу $ba = d \Longrightarrow a = bd$, $da^{-1} = b = da \Longrightarrow a = db \Longrightarrow db = bd$ $(\forall a, b, d)$ в $B(+,\cdot)$ выполняется равенство $(a+b)c = ac+bc$ и поэтому она, в силу теоремы Жевлакова [8], является полем. $\rhd$

15. Теорема [4]. *Слабо-дистрибутивная левая* $IPVW$*-система, в которой выполняется* $aa = 1$ *для всех* a, *есть неассоциативное и коммутативное слабо-дистрибутивное тело.*

В следующей теореме устанавливаются некоторые достаточные условия, при которых левая слабо-дистрибутивная IP_0VW-система является слабо-дистрибутивным телом.

16. Теорема. *Слабо-дистрибутивная левая* IP_0VW*-система* $B(+,\cdot)$ *характеристики* $p \neq 2$, *в которой имеют место условия*

$$a^{-1} \cdot ab = b,\ \Leftrightarrow 1 \in C(B_0) \cap K(B_0),\ a^{-1}(ab \Leftrightarrow a + 1) = b \Leftrightarrow 1 + a^{-1}\ (\forall a \neq 0),$$

есть слабо-дистрибутивное тело.

Доказательство опирается на теоремы (C) и (D). Приведем формулировки этих теорем.

C. Теорема [5]. *Левая* IP_0VW*-система, в которой выполняются условия*
(0) $1 + 1 \neq 0$,
(1) $a^{-1} \cdot ab = b \quad (\forall a \neq 0, b)$,
(2) $a(1 + b) = a + ab \quad (\forall a, b)$,
является альтернативным телом.

D. Теорема [5]. *В левой* IP_0VW*-системе* X_1, *в которой выполняются условия*
(0) $1 + 1 = 0$,
(1) $a^{-1} \cdot ab = b \quad (\forall a \neq 0, b)$,

(2) $a(b+1) = ab + a \quad (\forall a, b)$,
выполняется также $a(b+c) = ab + ac$ $(\forall a, b, c)$.

Примерами других слабо-дистрибутивных IP_0VW-систем являются:
1) $B_5 \oplus X_7 = B_{10}$, где X_7 — правая IP_0VW-система;
2) $B_6 \oplus A_k = B_9$;
3) $B_5 \oplus A_k = B_8$ и т. д.

3. Коллинеации в плоскостях над некоторыми слабо-дистрибутивными телами и IP_0VW-системами

Легко показать, что в инцидентностной структуре над слабо-дистрибутивной алгеброй B, существуют:

(1) четыре точки общего положения;

(2) не соединяемые точки ($[(a_1, b_1)\,(a_2, b_2)] = [y = xm + t] \iff b_1 \Leftrightarrow b_2 = a_1 m \Leftrightarrow a_2 m$ не всегда разрешимо относительно m);

(3) пара непересекающихся прямых (точка $[y = b] \cap [y = xm]$ может не существовать, ибо $xm = b$ может не иметь решения);

(4) 3-ткань прямых $\{[y = b_j]\}, \{[x = a_j]\}, \{[y = x + b_j \Leftrightarrow a_j]\}$ пучков с центрами $(0), (\infty)$ и (1) соответственно.

17. Теорема [6]. *В инцидентностной структуре над* B_1 *(см. теорему 3) без делителей нуля преобразования (при* $a \cdot m \circ t = am + t$*):*

(1) $(a, c) \to (a+1, c)$, $(m) \to (m)$,

(2) $(a, c) \to (a, c+a)$; $(m) \to (m+1)$,

(3) $(x, y) \to (x+1, yb + d), (m) \to (mb)$, где $b \in K(B_1)$

являются соответственно $((0), l_\infty)$*-элацией,* $((\infty), [x = 0])$*-элацией, и нецентральной коллинеацией.*

О коллинеациях в проективных плоскостях над слабо-дистрибутивными телами и IP_0VW-системами, гласят теоремы 18–26.

18. Теорема [7]. *В плоскости* B^* *над правой* IP_0VW*-системой* $B(+, \cdot)$*, в которой* $(1+a)b = b + ab$*, преобразование* $(x, y) \to (sxa + c, syb + d + (sxa + c)d)$*,* $(m) \to (a^{-1} \cdot mb + d)$ *является коллинеацией при* $s \in K(B)$*,* $a \in N(B)$*,* $c = 1 + \cdots + 1$*,* $b \in K(b)$ *и любом* d*.*

19. Теорема. *В плоскости* B^* *над слабо-дистрибутивной левой* IP_0VW*-системой* $B(+, \cdot)$ *преобразования*

(0) $(x, y) \to (x+1, y+b)$;

(1) $(x, y) \to (\Leftrightarrow x, \Leftrightarrow y), (m) \to (m)$;

(2) $(x, y) \to (xa, yb), (m) \to (a^{-1} \cdot mb)$; $a \in N(B), b \in K(B)$

являются коллинеациями.

20. Теорема [7]. *Преобразование* $(x, y) \to (x, xk + y \Leftrightarrow yk)$*,* $(m) \to (m + k \Leftrightarrow mk)$ *в плоскости над правой слабо-дистрибутивной* IP_0VW*-системой* B *является коллинеацией при* $k = 1 + \cdots + 1 \in K(B) \cap C(B)$*.*

21. Теорема. *В плоскости B_5^* преобразования:*

(1) $(a, c) \to (a + k, c + d), (m) \to (m)$,

(2) $(a, c) \to (a, c + a), (m) \to (m + 1)$,

(3) $(a, c) \leftrightarrow (c, a), (m) \leftrightarrow (m^{-1}), (\infty) \leftrightarrow (0)$,

(4) $(x, y) \to (syb + d, sxa + syb + d), (m) \to (b^{-1} \cdot m^{-1}a + 1),\ a, b \in N(B), s \in K(B),\ \forall d$,

(5) $(a, c) \to (ya^{-1}, xa), (m) \to (am^{-1} \cdot a), a \in N(B_5)$

являются коллинеациями.

Справедлива и следующая классификационная

22. Теорема. *Проективная плоскость B^* над тернарным кольцом с условиями: $1 + 1 = 0$ и $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, в которой существуют коллинеации:*

(1) $(x, y) \to (x + a, y + b)$, $(m) \to (m)$,

(2) $(x, y) \to (x, y + x)$, $(m) \to (m + 1)$,

(3) $(x, y) \leftrightarrow (x, y)$, $(m) \leftrightarrow (m^{-1}), (\infty) \leftrightarrow (0)$,

(4) $(x, y) \to (x, yb)$, $(m) \to (mb), \forall b$,

представляет плоскость B_5^*.

$\lhd$ Поскольку из существования (1) в B^* следует выполнение всех аксиом левой IP_0VW-системы, а из существования (2), (3) и (4) соответственно следуют тождества $a(b + 1) = ab + a,\ \forall a, b;\ ba \cdot a^{-1} = b,\ \forall a \neq 0, b$ и $ca \cdot b = c \cdot ab \Rightarrow cb \cdot b = c \cdot bb$, то теорема доказана. $\rhd$

23. Теорема. *В плоскости B_6^* следующие преобразования являются коллинеациями:*

$\tau_1 : (x, y) \to (ax, a^{-1}y), (m) \to (a^{-1} \cdot a^{-1}m), a \in N(B_6) \cap C(B_6)$,

$\tau_2 : (x, y) \to (x, y + xk), (m) \to (m + k), \forall k$,

$\tau_3 : (x, y) \to (x, xk + y \Leftrightarrow yk), k \in N_r \cap K(B_6)$,

24. Примечание. *Плоскость B_6^* характеристики 2 дезаргова, если в ней существует коллинеация (3) в теореме 22, ибо (3) $\Leftrightarrow \{ba \cdot a^{-1} = b,\ (a + b)c = ac + bc\}$, а система B_6 с $ba \cdot a^{-1} = b$, есть альтернативное тело в силу следующей теоремы Мальцева:*

E. Теорема [10]. *Кольцо с единицей, в котором $a^{-1} \cdot ab = b = ba \cdot a^{-1}$, есть альтернативное тело.*

Следовательно, оно будет ассоциативным телом характеристики 2, в силу теоремы Линника:

F. Теорема [9]. *Альтернативное тело характеристики 2 ассоциативно.*

25. Теорема. *В проективной плоскости B_8^* преобразование $(*) : (x, y) \to (x + p, p^{-1}(y + 1))$, $p \in C(B_8) \cap K(B_8)$, является нецентральной коллинеацией.*

4. О конфигурационных свойствах плоскостей над некоторыми слабо-дистрибутивными телами

Здесь установлены некоторые достаточные условия муфанговости или дезарговости или же папповости некоторых слабо-дистрибутивных плоскостей.

26. Теорема. *Если в плоскости B_8^* имеет место локальное выполнение теоремы D_{10} [11], соответствующее квазитождеству $a^{-1} \cdot ab = b$, то она муфангова.*

$\lhd$ Доказательство соотношения $D_{10} \Leftrightarrow a^{-1} \cdot ab = b$ приводится в [1]. Тернар же B_8 с $a^{-1}ab = b$, в силу (C) есть альтернативное тело. $\rhd$

27. Теорема. *Если в плоскости B^* над левой IP_0VW–системой $B(+,\cdot)$ характеристики 2, в которой $a(b+1) = ab + a$, $\forall a, b$, имеют место:*

(1) *локальное выполнение D_{10}, соответствующее соотношению $a^{-1} \cdot ab = b$;*

(2) *локальное выполнение теоремы Паппа* Π [11], *соответствующее системе образующих точек $\bar{1} = (\infty)$, $\bar{2} = (a, a)$, $\bar{3} = (1, a)$, $\bar{4} = (0, 0)$, $\bar{5} = (1, b)$, $\bar{6} = (b, b)$, то плоскость B^* будет папповой. Если же в ней имеют место: (1) и*

(3) *локальное выполнение D_{10}, соответствующее квазитождеству $ba \cdot a^{-1} = b$, $\forall a \neq 0, b$, то плоскость B^* будет дезарговой.*

$\lhd$ I. Из D_{10} следует $a^{-1} \cdot ab = b$ (см. [1]) в тернарном кольце.

При указанной системе образующих точек Π (см. [11]) справедливо «$\Pi \Rightarrow ab = ba$».

В силу теоремы Жевлакова [8], в условиях теоремы тернарное кольцо плоскости B^* является полем. Первая часть теоремы доказана.

II. В условиях теоремы, из локальных выполнений D_{10} следует $a^{-1} \cdot ab = b$ и $ba \cdot a^{-1} = b$ в тернарном кольце.

В силу теоремы D в тернаре будет выполняться $a(b + c) = ab + ac$ и поэтому он будет представлять кольцо с вполне обратимыми элементами. В силу теорем Мальцева E и Линника F, такой тернар будет ассоциативным телом характеристики 2. Плоскость же над этим тернаром дезаргова. Вторая часть теоремы 27 доказана. $\rhd$

Очевидна и следующая

28. Теорема. *Если в проективной плоскости над слабо–дистрибутивным телом B характеристики 2 имеют место локальные выполнения условий* (3) *и* (4) *из теоремы 27, то плоскость B^* дезаргова.*

Справедлива следующая

29. Теорема [4, 5]. *В плоскости M^* над слабо-дистрибутивным телом имеют место локальные выполнения теоремы L_{10} и Бола B* [12], *соответствующие следующим системам их образующих точек: $\{4 = (0), 2' = (1, m), \bar{7} = (\infty), \bar{3} = (1 + b, 1), \bar{1} = (0, 0)\}$ и $\{E_1 = (0, ac), Q_2 = (b, bc), A = (1), E_2 = (a, ac), Q_1 = (0, bc), B = (0, 0), C = (0)\}$.*

◁ Доказательство следует из соотношений: «$L_{10} \Rightarrow (1+b)m = m + bm$» [4] и «$B \Rightarrow b(1 \Leftrightarrow c) = b \Leftrightarrow bc$» [31]. ▷

В силу работ Аргунова [11] и Скорнякова [12] легко доказывается

30. Теорема [4, 5]. *В плоскости B_7^* имеют место:*

(1) *локальное выполнение теоремы Бола, соответствующее системе образующих точек, указанных в теореме 29;*

(2) *локальное выполнение L_{10}, соответствующее системе образующих точек, указанных в теореме 29;*

(3) *локальные выполнения второй малой теоремы Паппа* (Π_2) *соответствующие следующим наборам ее образующих точек:*

a) $\bar{1} = (a, a), \bar{2} = (0, 0), \bar{3} = (1, 1), \bar{4} = (0), \bar{5} = (\infty)$,

b) $\bar{6} = (0, 0), \bar{5} = (1, a), \bar{7} = (a, a), \bar{8} = (0), \bar{0} = (\infty)$,

c) $\bar{5} = (a, aa), \bar{6} = (\infty), \bar{7} = (1, aa), \bar{8} = (0), \bar{0} = (0, 0)$,

d) $\bar{5} = (a, a), \bar{6} = (0), \bar{7} = (1, 1), \bar{8} = (0, 0), \bar{0} = (\infty)$,

влекущим за собою, соответственно, квазитождества $a^{-1}a = 1$; $a \cdot aa = aa \cdot a$; $aa \cdot a^{-1} = a = a^{-1} \cdot aa$.

Очевидно, что в плоскости B_5^* теорема L_{10} выполняется аффинно на прямой l_∞ и имеет локальные выполнения на прямой $[x = 0]$, ибо B_5 есть левая VW-система, в которой $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$, $ba \cdot a^{-1} = b$ и $a(b+1) = ab + a$, что в B_5^* теорема 7_3 имеет локальное выполнение с квазитождеством $1 + 1 = 0$ и, что плоскость B_5^* представляет некоторое обобщение муфанговой плоскости.

Что же касается плоскости B_6^*, то она представляет правую VW–плоскость, в тернарном кольце, в которой: $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$, $a^{-1} \cdot ab = b$, $(1 + a)b = b + ab$ и $1 + 1 = 0$, т. е. она двойственна плоскости B_5^*. В ней L_{10} имеет локальные выполнения на L_∞, $[x = 0]$ и $[y = 0]$.

Аналогичным образом изучаются конфигурационные свойства плоскостей над другими слабо-дистрибутивными телами и IP_0VW-системами.

31. Примечание. Было бы интересным изучение слабо-дистрибутивных алгебр, почти-алгебр, тел, IP_0VW-систем и их обобщений и применение их к дальнейшему описанию инцидентностных структур B_i^*.

Литература

1. *Холл М.* Теория групп.—М.: Мир, 1962.
2. *Zassenhaus H.* Uberendliche Fastkorper // Abh. math. sem. Hamburg.—1936.—V. 11.—P. 187–220.
3. *Хубежты И. А.* Об инцидентностных структурах над алгебрами со слабыми дистрибутивными законами // Деп. в ВИНИТИ.—1989.—109-В89.
4. *Хубежты И. А.* О некоторых классах алгебр и инцидентностных структур.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1994.

5. *Хубежты И. А.* О некоторых почти-алгберах с обратимым умножением // Деп. в ВИНИТИ.—1993.—1357–В93.
6. *Хубежты И. А.* О коллинеациях в сверхслабых IP_0VW-плокостях // Междунар. науч. конф. по алгебре. Сб. тезисов, Красноярск.—1993.
7. *Хубежты И. А.* О VW-плоскостях и их некоторых обобщениях.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1992.
8. *Жевлаков В. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Альтернативные алгебры.—Новосибирск, 1976.
9. *Линник Ю. В.* Кватернионы и числа Кэлли // Успехи мат. наук.—1949.—Т. IV, Вып. 5.—С. 49–65.
10. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.—М.: Наука, 1970.
11. *Аргунов Б. И.* Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты // Мат. сб.—1950.—Т. 26.—С. 425–456.
12. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости // Успехи мат. наук.—1951.—Т. VI, Вып. 6.—С. 112–154.

г. Владикавказ *Статья поступила 30 июля 2000 г.*