Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2000, Том 2, Выпуск 2

Юрию Леонидовичу Ершову
к его шестидесятилетию

УДК **510.6**

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ СИЛЬНОЙ КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТИ АТОМНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

В. Д. Дзгоев

Настоящая работа посвящена доказательству сильной конструктивизируемости фактор-алгебр конструктивной булевой алгебры относительно идеала при условии, что множество номеров, соответствующих этому идеалу, хорошо расположено в арифметической иерархии. Этот результат был доложен автором на IV Всесоюзной конференции по математической логике в 1976 году в Кишиневе и анонсирован в [1]. Однако полное доказательство до сих пор так и не было опубликовано.

Настоящая работа посвящена доказательству сильной конструктивизируемости фактор-алгебры конструктивной булевой алгебры относительно идеала при условии, что множество номеров, соответствующих этому идеалу, хорошо расположено в арифметической иерархии. Этот результат был доложен автором на IV Всесоюзной конференции по математической логике в 1976 году в Кишиневе и анонсирован в [1]. Однако полное доказательство до сих пор так и не было опубликовано.

Автор сознательно сохранил стиль, терминологию и прочие особенности текста двадцатипятилетней давности, как напоминание о необыкновенной творческой обстановке семинаров Ю. Л. Ершова, на которых автор постигал идеи теории конструктивных моделей.

Необходимые сведения из теории счетных булевых алгебр и теории конструктивных моделей имеются в [2], [3] и [4].

В доказательстве основной теоремы нам понадобится известный и весьма простой факт из теории рекурсии.

Лемма 1. *Если множество A является Δ_2^0-множеством арифметической иерархии, то существует вычислимая последовательность $\{B_i \mid i \in \omega\}$ конечных множеств такая, что для любого $n \in \omega$ существуют $t_1, t_2 \in \omega$, удовлетворяющие условию: если $n \in A$, то $n \in B_{t'}$, $t' \geq t_1$, а если $n \notin A$, то $n \notin B_{t'}$ для $t \geq t_2$.*

$\lhd$ Так как $\Delta_2^0 = \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, то существуют рекурсивные предикаты P и Q такие, что

$$(\exists x)(\forall y)Q(n,x,y) \longleftrightarrow n \notin A,$$

$$(\exists x)(\forall y)P(n,x,y) \longleftrightarrow n \in A.$$

Определим функцию f так:

$$f(n,y) \rightleftharpoons \mu x[(\forall y' \leq y)P(n,x,y') \vee (\forall y' \leq y)Q(n,x,y')].$$

Очевидно, что f — рекурсивная функция. Пусть $B_m \rightleftharpoons \{n \mid n \leq m \ \& \ (\forall y \leq m)P(n,f(n,m),y)\}$. Покажем, что $\{B_m\}_{m\in\omega}$ — искомая последовательность. Пусть $n \in A$, тогда существует такое число $y_0 \geq n$, что для $y \geq y_0$ имеем $(\forall y' \leq y)\ P(n,f(n,y),y')$ и, следовательно, $n \in B_y$. Наоборот, пусть $n \notin A$. Тогда существует y_1 такое, что $y_1 \geq n$ и для $y \geq y_1$ верно

$$(\forall y' \leq y)Q(n,f(n,y),y') \ \& \ \neg(\forall y \leq y)P(n,f(n,y),y').$$

Допустим, что существует $\bar{y} \geq y_1$ и $n \in B_{\bar{y}}$. Тогда по определению $B_{\bar{y}}$ имеем $(\forall y \leq \bar{y})P(n,f(n,\bar{y}),y)$, что противоречит выбору числа y_1. $\rhd$

Нам понадобится техника деревьев, предложенная М. Г. Перетятькиным (см. [5]). Определим частичный порядок $\preccurlyeq$ на натуральных числах с помощью следующих рекурсивных функций:

$$P[n] \rightleftharpoons \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$L(n) \rightleftharpoons 2n+1,\ R(n) \rightleftharpoons 2n+2,$$

$$n' \rightleftharpoons \begin{cases} n+1, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ n-1, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$$

$$\alpha(n,0) \rightleftharpoons n,$$

$$\alpha(n,m+1) \rightleftharpoons P(\alpha(n,m)).$$

Полагаем

$$m \preccurlyeq n \rightleftharpoons \prod_{i=0}^{m} |\alpha(m,i) - n| = 0.$$

Понятно, что $\preccurlyeq$ — рекурсивное отношение, $\langle N, \preccurlyeq\rangle$ — частично упорядоченное множество, которое будем называть полным деревом. Множество $D \subseteq N$ будем называть деревом, если выполнены условия:

(1) если $n \in D$, $n \preccurlyeq m$, то $m \in D$;

(2) если $n \in D$, то $n' \in D$.

В терминах частичного порядка $\preccurlyeq$ функции P, R, L можно понимать следующим образом. $P(n)$ — непосредственный последователь элемента n, $L(n)$ — непосредственный левый предшественник элемента n, $R(n)$ — непосредственный правый предшественник элемента n, n' — несравнимый с n элемент, но имеющий с n один и тот же последователь.

Множество $\pi[n] \rightleftharpoons \{x \in D \mid x \succcurlyeq n\}$ назовем цепью, содержащей n. Тупиком дерева назовем $n \in D$ такое, что $R(n) \notin D$. Понятно, что полное дерево тупиков не имеет.

Лемма 2. *Пусть D — дерево, тогда D — рекурсивно тогда и только тогда, когда множество тупиков $T(D)$ рекурсивно.*

$\lhd$ Доказательство очевидно. $\rhd$

Лемма 3. *Если D — рекурсивно перечислимое дерево и $T(D)$ — множество тупиков рекурсивно перечислимо, то D — рекурсивно.*

$\lhd$ Перечисляем одновременно D и $T(D)$. Если $n \in \omega$ принадлежит D, то через конечное число шагов вычислится в D. Если $n \notin D$, то через конечное число шагов в $T(D)$ вычислится элемент m такой, что $m < n$ и $m \succcurlyeq n$.

Покажем, как по дереву D каноническим образом строится булева алгебра, будем ее обозначать $\mathfrak{B}_D$ (см. [5]). Пусть A — бесконечное множество. Определим отображение $f : \omega \to \mathcal{P}(A)$ индуктивно. Пусть $f(0) = A$. Предположим, что $f(n) = A_n$ уже определено, причем A_n бесконечно. Пусть A_1, A_2 — разбиение A_n на два бесконечных непересекающихся подмножества. Полагаем $f(L(n)) = A_1$, $f(R(n)) = A_2$.

Зафиксируем функцию f и будем обозначать $f(n)$ через A_n. Обозначим $A(D) \rightleftharpoons \{A_n \mid n \in D\} \cup \{\varnothing\}$. Непосредственно проверяется, что семейство $A(D)$ замкнуто относительно конечных пересечений и дополнение $A_n \in A(D)$ до A равно некоторому конечному объединению множеств из $A(D)$.

Обозначим посредством $B(D) \subseteq \mathcal{P}(A)$ семейство множеств, порожденное семейством $A(D)$ с помощью операций $\cap, \cup, \neg$. Тогда

$$\mathfrak{B}_D \rightleftharpoons \langle B(D), \cap, \cup, \neg, \varnothing, A\rangle$$

является булевой алгеброй. Пусть D — рекурсивно перечислимое дерево и $G : \omega \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{P}_\omega(D)$ — гёделева нумерация всех конечных подмножеств дерева D. Определим отображение $\nu_D : \omega \to B(D)$ следующим образом:

$$\nu_D(n) \rightleftharpoons \bigcup\{A_s \mid s \in G(n)\}.$$

В [5] доказано, что $(\mathfrak{B}_D, \nu_D)$ — конструктивная булева алгебра.

Покажем теперь, как по конструктивной булевой алгебре $(\mathfrak{B}, \nu)$ построить рекурсивно перечислимое дерево D такое, что $(\mathfrak{B}, \nu)$ изоморфно $(\mathfrak{B}_D, \nu_D)$. Построение по индукции. На шаге n будем строить конечное дерево D_n и ч. р. ф. f такие, что $D_{n+1} \supseteq D_n$ и функция f определяется на шаге n на элементах дерева D_n.

Шаг 0. Пусть $\nu_{n_0} = 1$. Тогда положим, $D_0 \rightleftharpoons \{0\}$ и $f(0) \rightleftharpoons n_0$. На других элементах f на шаге 0 не определяется.

Шаг $n + 1$. Рассмотрим все концевые вершины дерева D_n, пусть это $n_1, ..., n_k$ и пусть $f(n_1) = m_1, ..., f(n_k) = m_k$.

Положим $D_{n+1} \rightleftharpoons D_n \cup \{L(n_i), R(n_i) \mid 1 \leq i \leq k \ \ \& \ \ \nu(n) \cap \nu(m_i) \neq 0 \ \ \& \ \neg\nu(n) \cap \nu(m_i) \neq 0\}$. На элементах D_n функция f определяется по-старому и если $m \in D_{n+1} \backslash D_n$, то

$$f(m) \rightleftharpoons \begin{cases} f(P(m)) \cap n, \text{ если } L(P(m)) = m, \\ f(P(m)) \cap \neg n, \text{ если } R(P(m)) = m. \end{cases}$$

В силу эффективности построения $D = \bigcup\limits_n D_n$ — рекурсивно перечислимо и легко проверить, что $(\mathfrak{B}_D, \nu_D)$ изоморфно $(\mathfrak{B}, \nu)$. Важно заметить для дальнейшего, что атомам булевой алгебры $\mathfrak{B}$ соответствуют тупики дерева D и наоборот, тупики D переходят в атомы булевой алгебры $\mathfrak{B}_D$. $\rhd$

Приступим к доказательству основного утверждения этой статьи.

Теорема 1. *Пусть $(\mathfrak{B}, \nu)$ — конструктивная булева алгебра и J — идеал $\mathfrak{B}$. Если $B = \nu^{-1}(J)$ является Δ_2^0 множеством арифметической иерархии, то существует сильно конструктивизируемая атомная булева алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{B}/J$ изоморфна $\mathfrak{A}/\Phi$, где Φ — идеал Фреше.*

$\lhd$ Пусть $D = \bigcup_i D_i$ — рекурсивно перечислимое дерево такое, что $\mathfrak{B}_D \cong \mathfrak{B}$ и для любых $n, m \in \omega$, если $m \in D_{n+1}$, то $\mathcal{P}(A) \in D_n$. Пусть $\{B_i \mid i < \omega\}$ — вычислимая последовательность конечных множеств, существование которой доказано в лемме 1.

По индукции строим рекурсивно перечислимое дерево D', которое будет порождать искомую алгебру $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \mathfrak{B}_{D'}$. По индукции будет строиться также частично рекурсивная функция $\varphi(x, y)$, которая будет порождать изоморфизм булевых алгебр и рекурсивно перечислимый предикат A, который совпадает с множеством тупиков дерева D'.

Построение дерева D'.

Шаг 0. $D' \rightleftharpoons 0, \ \varphi(0, 0) \rightleftharpoons 0, \ A(0) \neq 1$.

Шаг $2n+1$. Пусть $e \in D_{n+1}$ — наименьшее число такое, что $e \in B_n$, метка $\boxed{e}$ не стоит на элементах D_{n+1}, и выполняются следующие два условия.

(1) Существует тупик $a \in D_{n+1}$ такой, что элементы цепи $\pi[a]$ не помечены никакими метками и $e \notin \pi[a]$.

(2) Для любого элемента $m \in D_{n+1}$, $m \succ e$, не помеченного никакими метками, существует тупик k такой, что $m \succcurlyeq k \;\;\&\;\; e \not\succcurlyeq k$ и элементы $\pi[k]$ не помечены метками.

Тогда помечаем меткой $\boxed{e}$ все числа $x \in D_{n+1}$, $x \preccurlyeq e$.

Пусть $n_0, n_1, ..., n_s$ — тупики дерева D'_n такие, что $A(n_i) \neq 1$, $i \leq s$. Пусть $n_i = \varphi(2n, m_i)$, $i \leq s$. Тогда полагаем $\tilde{D}_{2n+1} \rightleftharpoons D'_{2n} \cup \{R(n_i), L(n_i) \mid i \leq s\}$, $D'_{2n+1} \rightleftharpoons \tilde{D}_{2n+1} \cup \{L(R(n_i)), R(R(n_i)) \mid R(m_i) \in D_{n+1}$ и $R(m_i)$ не помечено метками $(i \leq s)\}$.

Определяем функцию φ так:

$$\varphi(2n+1, m_i) \rightleftharpoons R(n_i), \qquad \varphi(2n+1, L(m_i)) = L(R(n_i)),$$

$$\varphi(2n+1, R(m_i)) = R(R(n_i)).$$

Для $t \in D_{n+1}\{m_i, L(m_i), R(m_i) \mid i \leq s\}$ полагаем $\varphi(2n+1, t) = \varphi(2n, t)$, $A(L(n_i)) = 1$ для $i \leq s$. Для всех $k \preccurlyeq \varphi(2n+1, e)$ полагаем $A(k) = 1$ если k является тупиком дерева D'_{n+1}. Переходим к следующему шагу.

Шаг $2n+2$. Пусть p — наименьший из элементов D_{n+1} таких, что p помечен меткой $\boxed{p}$, вместе с тем $p \in B_n$. Тогда пусть $m \in D'_{2n+1}$ — наименьший элемент относительно порядка $\preccurlyeq$ со следующим свойством:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \in \pi[\varphi(2n+1, p)] \text{ и существует } a \text{ — тупик дерева,} \\ {D'}_{2n+1} \text{ такой, что } a \preccurlyeq m, \;\; A(a) \neq 1. \end{array} \right. \tag{$*$}$$

Пусть a — наименьший элемент с таким свойством. Определяем

$$D'_{2n+2} \rightleftharpoons D'_{2n+1} \cup \{x \mid x \in D^m_a\},$$

где D^m_a — конечное поддерево полного дерева с вершиной, совпадающей с элементом a, которое изоморфно дереву $D(q)$, где q определяется равенством $m = \varphi(2n+1, q)$,

$$D_{n+1}(q) \rightleftharpoons \{x \in D_{n+1} \mid x \preccurlyeq q\}.$$

Полагаем $A(y) = 1$ для всех y, которые являются тупиками D'_{2n+1} и выполнено $(\neg y \preccurlyeq a \;\;\&\;\; y \preccurlyeq m)$. Для всех $x \in D_{n+1}(q)$ полагаем $\varphi(2n+2, x) = y$, где y — образ элемента x при изоморфизме $D_{n+1}(q)$ на поддерево D^m_a.

Для остальных $x \in D_{n+1}$ определяем $\varphi(2n+2, x) \rightleftharpoons \varphi(2n+1, x)$. Метку $\boxed{p}$ снимаем со всех элементов D_{n+1}. Если какое-то условие шага не выполняется, то переходим к следующему шагу, полагая $\varphi(2n+2, x) \rightleftharpoons \varphi(2n+1, x)$ для $x \in D_{n+1}$. Построение закончено.

Замечание (1) Если число $x \in D_n$ помечено меткой $\boxed{e}$ и $y \prec x$, то y также помечено меткой $\boxed{e}$.

(2) Если $t \in \omega,\ x \prec y$, то $\varphi(2t+1, x) \prec \varphi(2t+1, y)$.

(3) Число $x \in D$ помечается меткой тогда и только тогда, когда $D'(P(\varphi(t,x))) \rightleftharpoons \{y \in D' \mid y \preccurlyeq \varphi(t,x)\}$ — конечное множество для $t \in \omega$ такого, что $\varphi(t,x)$ определено.

(4) Число $x \in \omega$ является тупиком дерева D' тогда и только тогда, когда $A(x) = 1$.

Для завершения доказательства теоремы 1 потребуется еще несколько вспомогательных фактов.

Лемма 4. *Для любого $n \in \omega$ метка $\boxed{n}$ ставится не более конечного числа раз.*

$\lhd$ Предположим, что метка $\boxed{e}$ ставится бесконечное число раз и снимается бесконечное число раз. Рассмотрим возрастающую последовательность $\xi = \{n_i \mid i < \omega\}$ таких натуральных чисел, что на шаге $2n_i + 1$ метка $\boxed{e}$ ставилась, а на шаге $2n_{i+1} + 2$ метка $\boxed{e}$ снималась с элементов дерева. Из построения следует, что $e \in B_{n_i}$ и $e \notin B_{n_i+1}$, для $n_i \in \xi$. Это противоречит лемме 1, выбору $\{B_i \mid i < \omega\}$. $\rhd$

Лемма 5. *Для любого $x \in \omega$ существует шаг, начиная с которого, если $x \in B$, то метка $\boxed{x}$ ставится и не снимается, если $x \notin B$, то метка $\boxed{x}$ снимается и больше не ставится.*

$\lhd$ В силу выбора последовательности $\{B_i\}_{i<\omega}$ для любого $x \in \omega$ существует $n \in \omega$ такое, что, если $x \in B$, то $x \in B_{\bar{n}},\ \bar{n} \geq n$; если $x \notin B$, то $x \notin B_{\bar{n}},\ \bar{n} \geq n$. Начиная с шага $2n + 1$, метка $\boxed{x}$ либо установится и сниматься не будет, либо вообще не будет ставиться. $\rhd$

Лемма 6. *Для любого $x \in D \backslash B$ существует $t \in \omega$ такое, что $\varphi(t,x)$ определено.*

$\lhd$ Пусть $x \in D \backslash B$ и существует $t \in \omega$, что $\varphi(t,x)$ определено. Предположим, что $L(x) \in D \backslash B$. Пусть n — наименьшее число такое, что $L(x) \in D_{n+1}$. Если на шаге $2n+1$ $L(x)$ не помечено никакой меткой, то $\varphi(2n+1, L(x))$ определено. Пусть число $L(x)$ на шаге $2n + 1$ помечено меткой. Так как $L(x) \notin B$, то по лемме 5 существует шаг k такой, что на этом шаге и далее число $L(x)$ никаких меток не получит. Тогда на шаге $2k + 2$ определится $\varphi(2k + 2, L(x))$. Для $R(x)$ доказательство аналогично. $\rhd$

Лемма 7. *Для любого элемента $y \in D'$, не являющегося тупиком, существуют $x \in D$ и $t \in \omega$ такие, что $y = \varphi(t,x)$.*

$\lhd$ На каждом шаге $n \in \omega$, если y не становилось тупиком дерева D', то с добавлением y к D'_n, указывалось $x \in D$ такое, что $\varphi(n,x) = y$. $\rhd$

Лемма 8. *Для любого $x \in D \backslash B$ не являющегося тупиком дерева D, существует t_0, такое, что при $t \leq t_0$ выполняется $\varphi(t,x) = \varphi(t_0,x)$, т. е. φ стабилизируется.*

$\lhd$ Если $x \in D$ ни разу не получало меток, то утверждение следует из определения шага $2n+1$. Пусть $x \notin B$, но на x ставились и с x снимались метки. Для любого $x \in D$, если $x \notin B$, то либо $L(x) \notin B$, либо $R(x) \notin B$. Рассмотрим два случая:

$$(i) \quad L(x) \notin B, \;\; R(x) \in B,$$

$$(ii) \quad L(x) \notin B, \;\; R(x) \notin B.$$

Случай $R(x) \notin B, \; L(x) \in B$ аналогичен (i) и мы его не рассматриваем.

(i): В силу леммы 5 и 6 существует шаг n_1, после которого на x и $L(x)$, не ставится никакая метка, $\varphi(n_1, x)$ определено, на $R(x)$ поставлена метка и больше не снимется. Предположим, что $\varphi(n_1, x) \neq \varphi(n_1 + t, x)$ для некоторого $t \in \omega$. Это означает, что на каком-то шаге $2k$, $2k \geq n_1$ наименьшее $m \in D'_n$, удовлетворяющее условию $(*)$ шага $2k$, равно x. Но так как $R(x)$ помечено меткой, то, если x удовлетворяет условию $(*)$, то $L(x)$ тоже удовлетворяет $(*)$. Следовательно, $m \preccurlyeq L(x)$ и $\varphi(n_1, x) = \varphi(n_1 + t, x)$ для любого $t \in \omega$.

(ii): Пусть n_2 — шаг, после которого на элементы x, $L(x)$, $R(x)$ не ставится меток. Тогда в силу условия Y_2 шага $2k+1$, для любого $n > n_2$ в дереве D_{n+1} существуют тупики k_0, k_1 такие, что элементы цепи $\pi[k_i]$, $i \leq 1$, не помечены метками и $k_1 \preccurlyeq L(x)$, $k_2 \preccurlyeq R(x)$. В силу замечания 3 существуют бесконечные цепи π_0, π_1 в дереве D' такие, что $\varphi(n_2, L(x)) \in \pi_0$, $\varphi(n_2, R(x)) \in \pi_2$. Это гарантирует, что на любом шаге $2k$ минимальное относительно порядка $\preccurlyeq$ число $m \in {D'}_{2k}$, удовлетворяющее условию $(*)$, не равно x и, следовательно, $\varphi(n_2, x) = \varphi(n_2 + t, x)$ для любого $t \in x$. $\rhd$

Окончание доказательства теоремы 1. Для любого $x \in \mathfrak{B}_D$, если $x \notin J$, существует $n_i \in D \backslash B$, $n_i \subseteq x$. С другой стороны, если $x \subset y$, то $[x] \subset [y]$. Следовательно, $X \rightleftharpoons \{[x] \in \mathfrak{B}/J \mid x \in D \backslash B\}$ — плотное множество в $\mathfrak{A}/J$. Очевидно, что X порождает $\mathfrak{B}_D/J$. Применяя теорему 2.9 главы 1 из [9], получаем, что булева алгебра $\mathfrak{B}_D \backslash J$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}_{D_1}$, где D_1 — дерево, порожденное множеством $D \backslash B$.

Пусть $Y \rightleftharpoons \{[y] \in \mathfrak{B} \backslash \Phi \mid y \in D'$ и существуют $x \in D$ и $t_0 \in \omega$ такие, что $y = \varphi(t_0, x)$ и для любого $t \in \omega$ выполняется $\varphi(t_0, x) = \varphi(t_0 + t, x)$ либо, если такого t_0 нет, то любое $t \in \omega$, что $y = \varphi(t, x)\}$.

Покажем, что Y плотно в $\mathfrak{B}_{D'} \backslash \Phi$. Из леммы 6 следует, что для любого $y \in D'$, если y — не тупик, то существуют $x \in D$ и $t \in D$ такие, что $y = \varphi(t, x)$. Пусть t_0 — наименьшее число такое, что $\varphi(t_0, x) = \varphi(t_0 + t, x)$, $t \in \omega$. Если $t_0 = 2n+1$, то $\varphi(2n+1, x) \prec \varphi(2n, x)$. Если $t_0 = 2n+1$, то пусть m — наименьшее относительное порядка $\preccurlyeq$ число, удовлетворяющее условию $(*)$ шага $2n+2$, $\varphi(t_0, x) \preccurlyeq m$, $m = \varphi(2n+1, q)$.

Из определения шага $2n+2$ имеем, что

$$[m] = [\varphi(2n+1, q)] = [\varphi(2n+2, q)]$$

и

$$\varphi(t_0, x) \preccurlyeq \varphi(2n+2, q).$$

Следовательно, Y плотно в $\mathfrak{B}_{D'} \backslash \Phi$. Из лемм 7 и 8 следует, что Y порождает $\mathfrak{B}_{D'} \backslash \Phi$.

Зададим функцию f следующим образом,

$$f([\cup\{n_1, ..., n_s\}]) \rightleftharpoons [\cup\{\varphi(t, n_1), ..., \varphi(t, n_s)\}],$$

где t — наименьшее число такое, что $\varphi(t, n_i) = \varphi(t+k, n_i),\ k \in \omega,\ i \leq s$, либо, если такое не существует, то произвольное.

Из определения дерева и способа построения по дереву D булевой алгебры $\mathfrak{B}_D$ можно получить, что для любого $x \in \mathfrak{B}_D, x = \cup\{p_1, ..., p_s\}$, имеется единственное представление минимальной длины s. Это позволяет легко проверить корректность определения функции f.

Применяя леммы 7 и 8, легко доказать, что f задает биекцию X на Y с сохранением включений. Применяя теорему 2.9 главы 1 из [9], имеем, что булевы алгебры $\mathfrak{B}_{D'}/\Phi$ и $\mathfrak{B}_D/\Phi$ изоморфны. Теорема 1 доказана. $\rhd$

Теорема 1 позволяет доказать одно достаточное условие сильной конструктивизируемости атомных булевых алгебр.

Теорема 2. *Если $(\mathfrak{B}, \nu)$ — конструктивная атомная булева алгебра, Φ — идеал Фреше алгебры $\mathfrak{B}, \nu^{-1}(\Phi) \in \Delta_2^0$, то $\mathfrak{B}$ — сильно конструктивизируема.*

$\lhd$ По теореме 1 существует сильно конструктивизируемая атомная булева алгебра $\mathfrak{B}'$ такая, что $\mathfrak{B}'/\Phi$ изоморфна $\mathfrak{B}/\Phi$. Из предложения 2.6 главы 1 из [9] следует, что $\mathfrak{B}'$ изоморфна $\mathfrak{B}$. $\rhd$

С помощью теоремы 1 можно доказать

Следствие 1 [7]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — конструктивизируемая булева алгебра. Тогда существуют сильно конструктивизируемые булевы алгебры $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ такие, что $\mathfrak{B}_1 \cong \mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{B}_1/\Phi \cong \mathfrak{B},\ \mathfrak{B}_1 \ncong_r \mathfrak{B}_2$. Здесь $\mathfrak{A} \cong_r \mathfrak{L} \rightleftharpoons$ булевы алгебры рекурсивно изоморфны.*

Следствие 2 [5]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — атомная булева алгебра. Тогда, если $\mathfrak{B}/\Phi$ — конструктивизируема, то $\mathfrak{B}$ — сильно конструктивизируема.*

$\lhd$ Для доказательства нужно воспользоваться критерием автоустойчивости булевых алгебр. $\rhd$

Литература

1. *Дзгоев В. Д.* О конструктивизируемости булевых алгебр // В кн: IV Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов.— Кишинев, 1976.—С. 42.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость.—Новосибирск: Научная книга, 1996.

3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели.—Новосибирск: Научная книга, 2000.
4. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость.—Новосибирск: Научная книга, 1996.
5. *Перетятькин М. Г.* Сильно конструктивные модели и нумерации булевой алгебры рекурсивных множеств // Алгебра и логика.—1971.—Т. 10, № 5.—С. 535-557.
6. *Гончаров С. С.* Некоторые свойства конструктивизаций булевых алгебр // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 2.—С. 257–282.
7. *Remmel J. B.* Recursive isomorphism types of recursively presented Boolean algebras // Notices Amer. Math. Soc.—1978, V. 25, № 7, A-706.
8. *Дзгоев В. Д.* Декартовы степени конструктивных моделей // В кн: V Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов.—Новосибирск, 1979.—С. 43-44.
9. *Дзгоев В. Д.* Конструктивизации алгебраических конструкций.—НГУ, Новосибирск: Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1980.

г. Владикавказ *Статья поступила 29 апреля 2000 г.*