Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2000, Том 2, Выпуск 1

УДК **539.377**

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Т. З. Чочиев

Рассматривается смешанная задача нелинейного температурного поля для однородного упругого полупространства. Функция $p(x,t)$, от которой зависит нелинейность температурного поля, связана с линейным температурным полем. Особый интерес представляет случай, когда о функции $p(x,t)$ ничего не известно. Цель данной статьи — выявить природу этой функции и изучить законы изменения.

1.

Рассмотрим задачу нелинейного температурного поля [1, 2, 3]

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{1.1}$$

для однородного упругого полупространства, ограниченного поверхностью $x = 0$, при условиях

$$T|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\alpha}{k}(T-\theta) = 0 \ \text{ при } x = 0, \tag{1.2}$$

где $c\rho$ — объемная теплоемкость, $k = k(T)$ — коэффициент теплопроводности, T_0 — начальная температура (температура среды), α — коэффициент теплоотдачи на поверхности полупространства, θ — температура конвективного теплообмена между поверхностью полупространства $x = 0$ и средой.

При помощи обозначения Кирхгофа

$$F = \frac{1}{k_0}\int\limits_{T_0}^{T} k(T)\,dT$$

уравнение (1.1) приводится к виду

$$\frac{c\rho}{k(T)}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1.3}$$

а через промежуточную функцию λ в [4] устанавливается, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.4}$$

где $p = p(x,t)$ — функция, от которой зависит нелинейность температурного поля. В [4] ее связали с линейным температурным полем

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x^2} + \frac{c\rho}{k_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{k_0}{c\rho}\right)\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \frac{c\rho}{k_0} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial t}; \quad p = \frac{c\rho}{k_0} \cdot \frac{\varphi^*}{\frac{\partial \varphi^*}{\partial x}} \tag{1.5}$$

при условиях

$$\varphi^*(x,0) = T_0,$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - \frac{\alpha(t)}{k_0}(\varphi^* - \theta) = 0 \ \text{ при } x = 0,$$

где k_0 — коэффициент теплопроводности, который соответствует линейному температурному полю. Благодаря этой связи было построено соотношение

$$\frac{1}{k_0}\int\limits_{T_0}^{T} k(T)dt = \int\limits_{M_0}^{M} V^* dx + \frac{1}{p}V^* dt, \tag{1.6}$$

по которому всегда можно определить нелинейное температурное поле через линейное. Представляет особый интерес тот случай, когда о $p(x,t)$ ничего не известно. Этот вопрос рассматривается в [4]. Здесь имеем целью выявить природу этой функции и изучить законы изменения.

Введем промежуточную функцию $\lambda(T)$ $(\lambda \neq 0)$ соотношением

$$\int\limits_{0}^{F} \frac{dF}{\lambda} = T^*. \tag{$*$}$$

Тогда

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial T^*}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial T^*}{\partial t}, \tag{1.7}$$

$$p(x,t) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial T^*}{\partial x}}{\frac{\partial T^*}{\partial t}},$$

где T^* пока неизвестна. С учетом $(*)$ уравнение (1.3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \left(\frac{c\rho}{pk} - \frac{\partial \ln p}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial t},$$

и, следовательно, для частных производных от F получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{p_0}{p}\exp\biggl(\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx\biggr),\quad \frac{\partial F}{\partial x}=p_0\exp\biggl(\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx\biggr),\tag{1.8}$$

где $p_0=p_0(t)$ произвольная функция. Заметим, что (1.6) удовлетворяет не только исходному уравнению (1.3) (при условии, что правая часть известна), но и соотношению (1.4). Введем обозначение

$$V=p_0\exp\biggl(\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx\biggr).$$

В связи с тем, что $F(x,t)$ температурная функция, имеет место

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V}{p}\right)=\frac{\partial V}{\partial t}\quad\text{или}\quad\frac{\partial V}{\partial x}-p\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}V.$$

Следовательно,

$$V=\exp\biggl(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}\,d\sigma\biggr)\varphi(\tau)\quad(d\tau=pdx+dt,\ d\sigma=pdx-dt),\tag{1.9}$$

где $\varphi(\tau)$ — произвольная функция. Сравним ее правую часть с правой частью (1.8) и примем, что $\varphi(\tau)=p_0(t)$,

$$\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}\,d\sigma.\tag{1.10}$$

Из $(*)$ выводим

$$\frac{dF}{dT}=\frac{k(T)}{k_0},\quad\frac{dF}{dT^*}=\lambda,\tag{1.11}$$

при этом допускается, что $\lambda=\frac{k}{\lambda_0}$, где $\frac{1}{\lambda_0}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\frac{1}{\lambda_0}}{\partial x}-p\frac{\partial\frac{1}{\lambda_0}}{\partial t}=0.\tag{1.11$_1$}$$

Снова возвращаемся к (1.8)

$$\frac{dF}{dT^*}\frac{\partial T^*}{\partial t}=\frac{p_0}{p}\exp\biggl(\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx\biggr),\ \frac{dF}{dT^*}\frac{\partial T^*}{\partial x}=p_0\exp\biggl(\int\limits_0^x\frac{c\rho}{pk}dx\biggr),\tag{1.12}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = \frac{p_0}{\lambda}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}dx\Bigg) = \frac{p_0 p}{c\rho}\lambda_0\frac{\partial}{\partial x}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}dx\Bigg), \tag{1.12$_1$}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{p_0}{p\lambda}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}dx\Bigg) = \frac{p_0\lambda_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}dx\Bigg).$$

Здесь так же, как и выше, правые части должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial(pV_0)}{\partial t} = \frac{\partial V_0}{\partial x} \qquad \Bigg(V_0 = \frac{p_0\lambda_0}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}\,dx\Bigg)\Bigg) \tag{1.13}$$

или

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial t}p = \frac{\partial p}{\partial t}V_0,$$

откуда получаем

$$V_0 = \varphi_1(\tau)\exp\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \ln p}{\partial t}d\sigma\Bigg),$$

где $\varphi_1(\tau)$ — произвольная функция.

Приравниваем правую часть этой формулы к правой части (1.13)

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp\Bigg(\int\limits_0^x \frac{c\rho}{pk}dx\Bigg) = \exp\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \ln p}{\partial t}\,d\sigma\Bigg) \tag{1.14}$$

при допущении, что

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\lambda_0 p_0}{c\rho}.$$

Аналогичным образом устанавливается потенциальность температурной функции T. В силу (1.10) и (1.14) параллельно получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\exp\Bigg(-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}dx\Bigg) = \exp\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \ln p}{\partial t}d\sigma\Bigg) \tag{1.14$_1$}$$

или, в новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial x} = p\bigg(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\bigg), \quad \frac{\partial}{\partial t} = p\bigg(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \sigma}\bigg)$$

$(d\tau = pdx + dt,\ d\sigma = pdx - dt)$. Имеем

$$\frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \tau^2} + 2\frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma \partial \tau} + \frac{\partial^2 \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma^2} = \frac{2}{p^2}. \tag{1.15}$$

Получили сложное дифференциальное уравнение параболического типа, которое эквивалентно следующей системе:

$$\frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma} = V, \quad \frac{\partial V^*}{\partial \tau} + \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} = \frac{2}{p^2}. \tag{1.16}$$

Если считать p заданной, то (1.16) равносильно дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \tau} + \frac{\partial \int \ln p\, d\sigma}{\partial \sigma} = p + \frac{2l}{p^2},\\ \frac{\partial V^*}{\partial \tau} + \frac{\partial V^*}{\partial \sigma} = \frac{V^* - p}{l},\\ V^* - p = \frac{2l}{p^2},\end{gathered} \tag{1.17}$$

где l неизвестная. Из первых двух уравнений запишем

$$\begin{gathered}\frac{d \int \ln p d\sigma}{d\xi} = \frac{2l}{p^2} + p,\\ V^* = \exp\left(\frac{1}{2}\int l\, d\xi\right)\left(C_1(\eta) - \frac{1}{2}\int \exp\left(-\frac{1}{2}\int l\, d\xi\right)\cdot \frac{p}{l}\, d\xi\right).\end{gathered} \tag{1.18}$$

Правую часть первого равенства заменяем третьим с учетом формулы для V^*

$$\int \ln p\, d\sigma = \int \exp\left(\frac{1}{2}\int l\, d\xi\right)\left(C_1(\eta) - \frac{1}{2}\int \exp\left(-\frac{1}{2}\int l\, d\xi\right)\cdot \frac{p}{l}\, d\xi\right) d\xi$$

или

$$p = \exp\left(\frac{d}{d\sigma}\left[\int \exp\left(\int l d\xi\right)(C_1(\eta) - \frac{1}{2}\int \exp\left(-\frac{1}{2}\int l d\xi\right)\cdot \frac{p}{l} d\xi) d\xi\right]\right). \tag{1.18$'$}$$

В силу формул для V^* и p третье соотношение (1.17) перепишем так:

$$\frac{p}{2l} + \exp\left(-2\frac{d}{d\sigma}\int V^* d\xi\right) = \frac{V^*}{2l}.$$

Однако снова обратившись к (1.18),

$$\frac{dV^*}{d\xi} = \frac{l}{2}V^* - \frac{p}{2l}, \tag{1.19}$$

легко убедимся, что последнее при допущении, что $l = 1$, есть не что иное как дифференциальное соотношение

$$2\exp\left(2\int \frac{dV^*}{d\sigma}d\xi\right) \cdot \frac{dV^*}{d\sigma} = 2\frac{d\xi}{d\sigma},$$

из которого сразу находим $\frac{dV^*}{d\sigma}$:

$$\frac{dV^*}{d\sigma} = \frac{1}{2\xi + C(\eta)}$$

и, следовательно,

$$V^* = \int \frac{d\sigma}{2\xi + C(\eta)},$$

где $C(\eta)$ — произвольная функция. Теперь, когда нашли явное выражение для V^*, для других неизвестных функций устанавливаем:

$$p = \sqrt{2\xi + C(\eta)},$$

$$\rho = V^* - 2\frac{dV^*}{d\xi}.$$

Найденные функции удовлетворяют уравнениям (1.17) и системе (1.16), которая равносильна уравнению (1.15). Тем самым доказана тождественная выполнимость $(1.14)_1$. Мы вправе считать правую часть (1.14) вполне определенной функцией, позволяющей записать значения частных производных (1.8) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right).$$

Но, поскольку правые части изменяются по закону градиента

$$\frac{\partial(\frac{V}{p})}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad \left(V = \varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)\right),$$

то

$$dF = \frac{1}{k_0}K(T)dT = \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)dt + \varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)dx \tag{1.20}$$

представляет собой соотношение, откуда можно окончательно исключить температурную функцию T. Мы не располагаем явным выражением k как функции от T, поэтому второе условие (1.2) перепишем относительно F следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \alpha\left[\frac{F}{k(T_1)} + \frac{T_0-\theta}{k_0}\right] = 0 \quad \text{при } x = 0, \tag{1.2_1}$$

где $k(T_1)$ есть (по теореме о среднем значении) значение $k(T)$ в состоянии $T = T_1$,

$$\int\limits_{T_0}^{T} k(T)\,dT = k(T_1)(T-T_0), \quad T_0 < T_1 < T.$$

Соотношение (1.20) запишем в виде определенного интеграла

$$F = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau + F_0, \tag{1.20_1}$$

где F_0 постоянная, $\tau|_{t=0} = \tau_0$. Для удобства будем еще задавать

$$F = \int\limits_0^{\tau} \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau - \int\limits_0^{\tau_0} \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau + F_0. \tag{1.20_2}$$

Очевидно, первое условие выражения (1.2) выполняется, если при $t = 0$ $F(x,0) = 0$. Но последнее будет иметь место, если $F_0 = 0$. Далее, замечаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right) - \left(\frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)\right)_{t=0}.$$

Внесем это значение и значение $(1.20)_2$ во второе условие $(1.2)_1$

$$\varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)$$
$$-\alpha\left[\frac{1}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau+\frac{T_0-\theta}{k_0}\right]=\varphi(0)\quad\text{при } x=0,$$

и примем обозначение

$$\int\limits_0^\tau \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau=Q(t)\qquad\text{при } x=0.$$

Тогда получается дифференциальное соотношение

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}-\frac{\alpha}{pk(T_1)}Q=\frac{\alpha}{p}\left[\frac{T_0-\theta}{k_0}+\frac{\varphi(0)}{\alpha}\right],$$

из которого находим Q:

$$Q=\exp\left(\frac{1}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau\right)\left[Q_0+\frac{T_0-\theta}{k_0}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{p}\exp\left(-\frac{1}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau\right)d\tau\right.$$
$$\left.+\varphi(0)\int\limits_0^\tau \frac{1}{p}\exp\left(-\frac{1}{k(T_1)}\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{p}d\tau\right)d\tau\right],$$

где Q_0 — постоянная, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}=\frac{\alpha}{pk(T_1)}Q+\frac{\alpha}{p}\frac{T_0-\theta}{k_0}.$$

Из обозначения для функции Q найдем $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(\tau)=\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)\alpha\left(\frac{Q}{k(T_1)}+\frac{T_0-\theta}{k_0}\right)\tag{1.21}$$

полагая $\varphi(0)=0$ и $Q=Q_0$ при $t=0$.

Тогда из (1.21) сразу находим:

$$Q_0 = k(T_1)\frac{\theta - T_0}{k_0}.$$

Далее из $(1.12)_1$ и (1.14) имеем:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = pV_0, \ \ \frac{\partial T^*}{\partial t} = V_0,$$

$$V_0 = \varphi_1(\tau)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \ln p}{\partial t}d\sigma\right),$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{p_0\lambda_0}{c\rho},$$

где $\frac{1}{\lambda_0}$ некоторое частное решение уравнения $(1.11)_1$.

Покажем теперь, что функция T, определенная из уравнения

$$F = \frac{1}{k_0}\int\limits_{T_0}^{T} k(T)dT = \int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau \ \ (T = \psi(F)), \tag{1.22}$$

будет решением (1.1):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \psi'(F)\frac{\partial F}{\partial t}, \ \ \frac{\partial T}{\partial x} = \psi'(F)\frac{\partial F}{\partial x} \ \ \left(k(T) = \frac{1}{\psi'(F)}\right).$$

Подставив эти значения в (1.1) придем к уравнению (1.3),

$$\frac{c\rho}{k}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

которое выполняется тождественно. Отметим, что согласно формулам (1.10), (1.14) и соотношению (1.20) может показаться, что коэффициент теплопроводности $k(T)$ определяется не однозначно. Однако это не так. Легко доказывается, что все перечисленные выражения дают один и тот же результат для $\frac{1}{k(T)}$:

$$\frac{1}{k(T)} = \frac{p}{\lambda_0}\frac{V_0}{V}.$$

Наконец, функция $p(x,t)$ не зависит ни от начальных данных, ни от краевых условий и самой T. Однако, как следует из (1.15), она описывает нелинейное параболическое поле.[1] Оно упрощается, если допустить, что $k(T) = k_0$. В этом случае $F(T) = T$ и из (1.10) получим:

$$\frac{c\rho}{k_0}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\int\frac{1}{p}d\sigma\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\frac{1}{p}d\sigma.$$

При составлении (1.15) было допущено ограничение $\varphi(\tau) = p_0(t)$, что в общем случае не так, ибо фактически мы имели бы не $(1.14)_1$, а более сложное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi(\tau)}{p_0(t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\ln p}{\partial t}d\sigma\right),$$

которое подобным преобразованием приводится к виду

$$\frac{\partial^2\int_0^\sigma\ln p d\sigma}{\partial\tau^2} + 2\frac{\partial^2\int_0^\sigma\ln p d\sigma}{\partial\sigma\partial\tau} + \frac{\partial^2\int\ln p d\sigma}{\partial\sigma^2} = 2\left(\frac{1}{p^2\varphi} + \frac{\varphi^{'}}{\varphi}\right). \tag{1.23}$$

Отыскать для него частное решение, получить для $\varphi(\tau)$ формулу подобную (1.21), не удалось.

Построенное выше для (1.15) частное решение назвали фундаментальной функцией, а соответствующее ей решение $F(x,t)$, для уравнения (1.3), назвали фундаментальным решением.

Рассмотрим пример: $k(T) = T^2$. Тогда $F(T) = \frac{1}{3k_0}T^3$.

Уравнения (1.1) и (1.3) принимают вид

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^2\frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{1.24}$$

$$\frac{c\rho}{T^2}\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{1.25}$$

Так как $k(T)$ неизвестна, то функция p определяется из $(1.14)_1$ (см. (1.17)), F определяется по формуле $(1.20)_2$ и удовлетворяет уравнению (1.25). Покажем, что

$$T = \sqrt[3]{3k_0F}$$

[1] В общем случае это не так. Мы сделали ограничение допущением $\varphi(\tau) = \rho_0$. Оно и повлияло на $p(x,t)$.

удовлетворяет (1.24):

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\sqrt[3]{3k_0}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{F^2}}\frac{\partial F}{\partial t};\ \frac{\partial T}{\partial x}=\sqrt[3]{3k_0}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{F^2}}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\frac{c\rho}{3}\sqrt[3]{\frac{3k_0}{F^2}}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt[3]{3k_0}}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{F^2}}T^2\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{c\rho}{(\sqrt[3]{3k_0F})^2}\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

но это есть уравнение (1.25), которое выполняется тождественно. Далее, запишем условие конвективного теплообмена

$$\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\alpha}{T^2}(T-\theta)=0 \text{ при } x=0. \tag{1.26}$$

В силу $(1.20)_2$, будет

$$F=\int\limits_0^\tau\frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau-\left(\int\limits_0^{\tau_0}\frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau\right)_{t=0}. \tag{1.27}$$

$$(\sigma=-\tau \text{ при } t=0).$$

Так как $T=\sqrt[3]{3k_0F}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\sqrt[3]{3k_0}}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{F^2}}\frac{\partial F}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)-\left(\varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau\right)_{t=0};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0}=\varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}dx\right)d\tau-\varphi(0) \tag{1.28}$$

и (1.26) перепишем так:

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\alpha}{k_0}\left(\sqrt[3]{3k_0F}-\theta\right)=0$$

или с учетом (1.27) и (1.28)

$$\varphi(\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\tau}\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)-\frac{\alpha}{k_0}\left(\sqrt[3]{3k_0\int\limits_0^\tau\frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau}-\theta\right)=\varphi(0). \tag{1.28_1}$$

Пусть

$$Q=\int\limits_0^\tau \frac{\varphi(\tau)}{p}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^\sigma \frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)d\tau,$$

следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}-\frac{\alpha}{p}\left(\sqrt[3]{3k_0Q}-\theta+\frac{\varphi}{\alpha}\right)=0. \tag{1.29}$$

По условию $\varphi(0)$ неизвестно, поэтому с целью упрощения $(1.28)_1$ примем: $\varphi(0)=\alpha\theta$ (α считается постоянной), тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}=\frac{\alpha}{p}\sqrt[3]{3k_0Q}\Rightarrow\ \frac{dQ}{\sqrt[3]{Q}}=\frac{\alpha}{p}d\tau,$$

$$Q=\left(\frac{2\sqrt[3]{3k_0}}{3}\alpha\int\limits_0^\tau\frac{d\tau}{p}+Q_0\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Замечаем, что

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}=\left(\frac{2\sqrt[3]{3k_0}}{3}\alpha\int\limits_0^\tau\frac{d\tau}{p}+Q_0\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{3k_0}\frac{\alpha}{p}.$$

Из (1.29) найдем $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(\tau)=\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{-\tau}\frac{\partial\frac{1}{p}}{\partial x}d\sigma\right)\left(\frac{2\sqrt[3]{3k_0}}{3}\alpha\int\limits_0^\tau\frac{d\tau}{p}+Q_0\right)^{\frac{1}{2}}\alpha\sqrt[3]{3k_0},$$

а так как $\varphi(0)=\alpha\theta$, то

$$Q_0=\frac{\theta^2}{\sqrt[3]{9{k_0}^2}}.$$

2.

Цель этого параграфа привести уравнение (1.15) к виду, откуда можно отыскать фундаментальную функцию. В частности, пусть

$$\int\limits_0^\sigma \ln p\,d\sigma=u\Rightarrow P=\exp\left(\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right), \tag{2.1}$$

тогда (1.15) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial\sigma}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}=2\exp\left(2\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right),$$

или, предположив, что u есть сложная функция: $u=u(\gamma(\tau,\sigma))$

$$u''\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\right)^2+2\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}+\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)^2\right]+u'\left[\frac{\partial^2\gamma}{\partial\tau^2}+2\frac{\partial^2\gamma}{\partial\tau\partial\sigma}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}\right]=2\exp\left(2u'\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right).$$

Проведя группировку последнее уравнение можно переписать так:

$$u''-u'\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}\right)\right]=2\exp\left(2u'\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)\frac{1}{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Если функцию γ подобрать таким образом, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}\right)=-\frac{\frac{\partial^2\gamma}{\partial\sigma^2}}{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)^2},$$

то умножив обе части (2.2) на $2\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\exp\left(-2u'\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)$, получаем

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\exp\left(-2u'\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)\right)=4\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}\right)^2}\Rightarrow d\left(e^{-2u'\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}}\right)=4\frac{\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma}d\gamma}{(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}+\frac{\partial\gamma}{\partial\sigma})^2}.$$

Получили дифференциальное уравнение, в котором все трудности по нахождению γ очевидны. Если из этого уравнения удастся найти γ, то из (2.1) сразу находим фундаментальную функцию $p(\tau,\sigma)$. В аналогичной форме может быть представлено и уравнение (1.23).

Литература

1. *Карлслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.—М.: Наука, 1964.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.—Киев: Наука думка, 1970.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.—М.: Высшая школа, 1967.
4. *Чочиев Т. З.* Класс нестационарных нелинейных температурных полей. Механика сплошных сред // Науч. труды.—Тбилиси: ГПИ, 1989.—№ 6.

г. Цхинвал *Статья поступила 20 февраля 2000 г.*