Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **517.98**

ОБ УГЛЕ УИЛСОНА В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Лиана М. Энеева

Проблема характеризации гильбертова пространства в классе банаховых пространств является довольно интересной и популярной проблемой в функциональном анализе. Известно большое количество критериев гильбертовости банаховых пространств. В этой статье мы приводим одно из условий, характеризующее гильбертово пространство в классе банаховых пространств.

В работе [1] Уилсон определил угол в произвольном метрическом пространстве X с метрикой d следующим образом: если $a, b, c \in X$ — произвольные точки, то угол $(\widehat{bac})$ с вершиной в точке a определяется по формуле

$$\widehat{bac} = \arccos \frac{d^2(a,b) + d^2(a,c) - d^2(b,c)}{2d(a,b)d(a,c)}. \tag{1}$$

Покажем, что это определение корректно, т. е.

$$-1 \leqslant \arccos \frac{d^2(a,b) + d^2(a,c) - d^2(b,c)}{2d(a,b)d(a,c)} \leqslant 1. \tag{2}$$

Действительно, с одной стороны,

$$d(b,c) \leqslant d(a,b) + d(a,c);$$

$$d^2(b,c) \leqslant d^2(a,b) + d^2(a,c) + 2d(a,b)d(a,c);$$

$$-2d(a,b)(a,c) \leqslant d^2(b,a) + d^2(a,c) - d^2(b,c).$$

С другой стороны,

$$d(b,c) \geqslant d(a,b) - d(a,c);$$

$$d^2(b,c) \geqslant d^2(a,b) + d^2(a,c) - 2d(a,b)d(a,c);$$

$$2d(a,b)(a,c) \geqslant d^2(b,a) + d^2(a,c) - d^2(b,c).$$

Следовательно, (2) выполняется и определение (1) корректно.

Если R, R' — два метрических луча (метрический луч — конгруэнтный образ полупрямой) с общей начальной точкой a такие, что $b \in R$, $c \in R'$, то лучи R, R' образуют угол $[R, R']$, если существует $\lim_{b,c\to a} \widehat{bac}$, когда b, c стремятся к a по метрическим лучам R и R' соответственно.

В работе [2] в качестве метрического пространства рассматривалось произвольное нормированное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и был доказан следующий результат ([2; теорема 6]).

Теорема 1. *Линейное нормированное пространство B является пространством со скалярным произведением тогда и только тогда, когда существует $\lim_{b,c\to a}\widehat{bac}$ при b и c стремящихся к a по лучам ρ и σ соответственно для любой тройки точек a, b, c и любой пары лучей, проходящих через a, b и a, c соответственно.*

Доказательство этой теоремы основывается на пяти утверждениях и теореме из [3]. Мы дадим прямое доказательство приведенного факта.

Заметим, что если $a, b \in X$, то алгебраическая прямая, проходящая через a и b, определяемая следующим образом:

$$L(a,b) = \{x \in X : \, x = \lambda a + (1-\lambda)b : \, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

является метрической прямой, т. е. отображение

$$\lambda a + (1-\lambda)b \to (1-\lambda)\|a-b\| \tag{3}$$

является конгруэнцией между $L(a,b)$ и действительной прямой. Обратно, если a и b две различные точки в X, то a и b определяет единственную метрическую прямую, а именно, алгебраическую прямую.

Действительно, пусть луч берет начало в a и проходит через b, тогда $\|x-a\| = \|\lambda a + (1-\lambda)b - a\| = \|(1-\lambda)a + (1-\lambda)b\| = (1-\lambda)\|a-b\|$; следовательно, отображение (3) ставит в соответствие каждой точке $(\cdot)x \in L(a,b)$ расстояние от начала луча до этой точки, таким образом, $L(a,b)$ — метрическая прямая. А если $a, b \in X$ такие, что $a \neq b$, то через них можно провести только одну прямую A с началом в $(\cdot)a$ и $A = L(a,b) = \{x = \lambda x + (1-\lambda)y, \, \lambda \in [0,1]\}$ — метрическая прямая (если предположить, что можно провести две прямые через a и b ($a \neq b$), то тогда нарушается конгруэнтность отображения (3)).

Приведем доказательство теоремы.

$\lhd$ Пусть B — пространство со скалярным произведением. Покажем, что существует $\lim_{b,c\to a}\widehat{bac}$, где b и c стремятся к a по полупрямым ρ и σ соответственно. Возьмем произвольные точки $\lambda a + (1-\lambda)b$ на луче ρ и $\mu a + (1-\mu)b$ на луче σ. Тогда,

$$\lim_{b,c\to a}\widehat{bac} = \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1}\left[\frac{\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|^2 + \|a-(1-\mu)c-\mu a\|^2}{2\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|\cdot\|a-(1-\mu)c-\mu a\|} -\right.$$

$$\left. - \frac{\|\lambda a + (1-\lambda)b - \mu a - (1-\mu)c\|^2}{2\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|\cdot\|a-(1-\mu)c-\mu a\|}\right] =$$

$$= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1}\left[\frac{(1-\lambda)^2\|a-b\|^2 + (1-\mu)^2\|a-c\|^2}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-b\|\cdot\|a-c\|} -\right.$$

$$\left. - \frac{\big((1-\lambda)(b-a) + (1-\mu)(a-c); (1-\lambda)(b-a) + (1-\mu)(a-c)\big)}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-b\|\cdot\|a-c\|}\right] =$$

$$= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1}\left[\frac{(1-\lambda)^2\|a-b\|^2 + (1-\mu)^2\|a-c\|^2 - (1-\lambda)^2\|a-b\|^2}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-b\|\cdot\|a-c\|} -\right.$$

$$\left. - \frac{(1-\mu)^2\|a-c\|^2 + 2(1-\lambda)(1-\mu)\cdot(a-c, c-b)}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-b\|\cdot\|a-c\|}\right] =$$

$$= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1} \frac{2(1-\lambda)(1-\mu)(a-c,a-b)}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-c\|\cdot\|a-b\|} = \arccos \frac{(a-c,a-b)}{\|a-c\|\cdot\|a-b\|}.$$

Таким образом, $\lim_{b,c\to a}\widehat{bac}$ не зависит от того, как точки по полупрямым ρ и σ стремятся к a. Следовательно, $\lim_{b,c\to a}\widehat{bac}$ существует и

$$\lim_{b,c\to a}\widehat{bac} = \arccos \frac{\|a-b\|^2+\|a-c\|^2-\|b-c\|^2}{2\|a-b\|\cdot\|a-c\|}.$$

Обратно, пусть B — линейное нормированное пространство, в котором существует $\lim_{b,c\to a}\widehat{bac}$; b и c стремятся к a по полупрямым ρ и σ соответственно, имеющим общую начальную точку $(\cdot)a$. Тогда предел не зависит от пути по которому b и c стремятся к a по полупрямым ρ и σ соответственно. Действительно,

$$\lim_{b,c\to a}\widehat{bac} = \arccos \lim_{\lambda\to 1}\left[\frac{\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|^2+\|a-(1-\lambda)c-\lambda a\|^2}{2\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|\cdot\|a-(1-\lambda)c-\lambda a\|}-\right.$$

$$\left.-\frac{\|\lambda a+(1-\lambda)b-\lambda a-(1-\lambda)c\|^2}{2\|a-(1-\lambda)b-\lambda a\|\cdot\|a-(1-\lambda)c-\lambda a\|}\right] =$$

$$= \arccos \lim_{\lambda\to 1}\frac{(1-\lambda)^2\|a-b\|^2+(1-\lambda)^2\|a-c\|^2-(1-\lambda)^2\|b-c\|^2}{2\|a-b\|\cdot\|a-c\|} =$$

$$\arccos \frac{\|a-b\|^2+\|a-c\|^2-\|b-c\|^2}{2\|a-c\|\cdot\|a-c\|}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{b,c\to a}\widehat{bac} =$$

$$= \arccos \lim_{\lambda,\mu\to 1}\frac{(1-\lambda)^2\|a-b\|^2+(1-\mu)^2\|a-c\|^2-\|(1-\mu)(a-c)-(1-\lambda)(a-b)\|^2}{2(1-\lambda)(1-\mu)\|a-b\|\cdot\|a-c\|}.$$

Положим $1-\lambda=\alpha$; $1-\mu=\beta$. Следовательно, $\alpha,\beta\to 0$ и пусть α, β связаны соотношением $\beta=\frac{\alpha}{2}$. Тогда, продолжая предыдущее, получим:

$$\lim_{b,c\to a}\widehat{bac} = \arccos \lim_{\alpha,\beta\to 0}\frac{\alpha^2\|a-b\|^2+\beta^2\|a-c\|^2-\|\beta(a-c)-\alpha(a-b)\|^2}{2\alpha\beta\|a-b\|\cdot\|a-c\|} =$$

$$= \arccos \lim_{\alpha,\beta\to 0}\frac{\alpha^2\|a-b\|^2+\frac{\alpha^2}{4}\|a-c\|^2-\|\frac{\alpha}{2}(a-c)-\alpha(a-b)\|^2}{\alpha^2\|a-b\|\cdot\|a-c\|} =$$

$$= \arccos \frac{\|a-b\|^2+\frac{1}{4}\|a-c\|^2-\|\frac{1}{2}(a-c)-\alpha(a-b)\|^2}{\|a-b\|\cdot\|a-c\|}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем

$$\arccos \frac{\|a-b\|^2+\|a-c\|^2-\|b-c\|^2}{2\|a-c\|\cdot\|a-c\|} =$$

$$= \arccos \frac{\|a-b\|^2 + \frac{1}{4}\|a-c\|^2 - \|\frac{1}{2}(a-c) - \alpha(a-b)\|^2}{\|a-b\| \cdot \|a-c\|};$$

$$\frac{\|a-b\|^2 + \|a-c\|^2 - \|b-c\|^2}{2\|a-c\| \cdot \|a-c\|} = \frac{\|a-b\|^2 + \frac{1}{4}\|a-c\|^2 - \|\frac{1}{2}(a-c) - \alpha(a-b)\|^2}{\|a-b\| \cdot \|a-c\|};$$

$$\frac{1}{2}\|a-b\|^2 + \frac{1}{2}\|a-c\|^2 - \frac{1}{2}\|b-c\|^2 = \|a-b\|^2 + \frac{1}{4}\|a-c\|^2 - \|\frac{1}{2}(a-c) - (a-b)\|^2;$$

$$\frac{1}{2}\|a-b\|^2 - \frac{1}{4}\|a-c\|^2 = \|\frac{1}{2}(a-c)^2 - (a-b)\|^2 - \frac{1}{2}\|b-c\|^2;$$

$$2\|a-b\|^2 - \|a-c\|^2 = 4\|\frac{1}{2}(a-c) - (a-b)\|^2 - 2\|b-c\|^2;$$

$$2\|a-b\|^2 + 2\|b-c\|^2 = \|a-c\|^2 + \|(a-c) - 2(a-b)\|^2;$$

$$2\|a-b\|^2 + 2\|b-c\|^2 = \|a-c\|^2 + \| - a - c + 2b\|^2;$$

$$2\|a-b\|^2 + 2\|b-c\|^2 = \|a-c\|^2 + \|(b-c) - (a-b)\|^2.$$

Положим $X = a - b$, $Y = b - c$, так как a, b, c произвольны, следовательно, мы ничего не нарушаем; тогда последнее выражение примет вид

$$2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2 = \|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2,$$

т. е. для любых двух элементов X и Y из B выполнено тождество параллелограмма. Следовательно, B — пространство со скалярным произведением.

Литература

1. *Wilson W. A.* On certain types of continuons transformations of metric spaces // Amer. J. Math.—1935.—V. 57.—P. 62–68.
2. *Valentine J. E., Wayment S. G.* Wilson angeles in linear normed spaces // Pacific. J. Math.—1971.—V. 36, № 1.—P. 239–243.
3. *Blumental L. M.* Theory and Aplication of distance geometry.—Oxford: Clarendon, 1953.