Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **517.982**

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО КОНУСА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Т. Худалов

В этой статье установлены явные формулы расстояния от точки до произвольного круглого конуса в гильбертовом пространстве [1]. В [2] эти формулы были получены лишь для частного случая регулярного круглого конуса в терминах метрически положительной и метрически отрицательной частей элемента. В качестве приложения дано решение одной экстремальной задачи в пространстве непрерывных функций.

1^0. Пусть $K(e_1,\alpha)$ — круглый конус в гильбертовом пространстве H с оротонормированным базисом $e_1, e_2, \dots$, где α – произвольное число, $\alpha \in (0,1)$, т. е.

$$K(e_1,\alpha) = \Big\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : (x, e_1) \geqslant \alpha\|x\|\Big\} =$$

$$= \left\{x \in H:\ x_1 \geqslant \alpha\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\} = \left\{x \in H:\ x_1 \geqslant 0,\, x_1^2 \geqslant \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right\} =$$

$$= \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots):\ x_1 \geqslant \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2}\right\} =$$

$$= \left\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots):\ x_1 \geqslant \beta\sqrt{\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2}\right\},$$

где $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$. Согласно теореме 2.1.5

$$K^*(e_1,\alpha) = K(e_1, \sqrt{1-\alpha^2}) = \left\{x:\ x_1 \geqslant \frac{1}{\beta}\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2}\right\}.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in H, x = (x_1, x_2, \dots)$ и положим $c = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} x_n^2}$. Если $x \in K(e_1,\alpha)$, то ясно, что $d(x, K(e_1,\alpha)) = 0$, и проекция x на $K(e_1,\alpha)$ равна $x : Px = x$.

Если $x \in -K(e_1,\alpha)$, то имеем: $x = 0 + x$, где $0 \in K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$, $x \in -K(e_1,\alpha) = -K^*(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$ (см. [3; теорема 3]) и по теореме Моро [3] получаем: проекция x на $K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$ равна 0 и

$$d(x, K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})) = \|x\|.$$

Рассмотрим теперь основной случай. Пусть $x \notin \pm K(e_1,\alpha)$, тогда

$$x_1 < \beta c, \quad -x_1 < \frac{1}{\beta}c. \tag{1}$$

Будем искать представление вектора x в виде: $x = u+v$, $(u,v)=0$, где $u \in K(e_1,\alpha)$, $v \in -K^*(e_1,\alpha) = -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$. Положим

$$u = \lambda\biggl(\beta, \frac{x_2}{c}, \dots, \frac{x_n}{c}, \dots\biggr), \quad v = -\mu\biggl(\frac{1}{\beta}, -\frac{x_2}{c}, \dots, -\frac{x_n}{c}, \dots\biggr).$$

Имеем

$$(u,v) = -\mu\lambda\biggl(1 - \frac{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 + \dots}{c^2}\biggr) = 0,$$

$$x = u + v = \biggl(\lambda\beta - \frac{\mu}{\beta}, \frac{\lambda+\mu}{c}x_2, \dots, \frac{\lambda+\mu}{c}x_n, \dots\biggr),$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \lambda\beta - \frac{\mu}{\beta} = x_1, \\ \frac{\lambda}{\beta} + \frac{\mu}{\beta} = \frac{c}{\beta}. \end{cases}$$

Складывая уравнения, будем иметь

$$\lambda\biggl(\beta + \frac{1}{\beta}\biggr) = x_1 + \frac{c}{\beta},$$

откуда

$$\lambda = \frac{x_1\beta + c}{\beta^2+1}; \quad \mu = \frac{\beta(c\beta - x_1)}{\beta^2+1}.$$

При этом в силу неравенств (1)

$$x_1\beta + c > 0, \quad c\beta - x_1 > 0,$$

т. е. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ и $u \in K(e_1,\alpha)$, $v \in -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$. Следовательно, по теореме Моро имеем: проекция вектора x на $K(e_1,\alpha)$ равна u, где

$$u = \frac{x_1\beta + c}{\beta^2+1}\biggl(\beta, \frac{x_2}{c}, \dots, \frac{x_n}{c}, \dots\biggr) = \frac{c + x_1\beta}{c(\beta^2+1)}(c\beta, x_2, \dots, x_n, \dots) =$$

$$= \frac{(c+x_1\beta)(c\beta - x_1)}{c(\beta^2+1)}e_1 + \frac{c+x_1\beta}{c(\beta^2+1)}x.$$

Тогда

$$d(x, K(e_1,\alpha) = \|v\| = \frac{\beta(c\beta - x_1)\sqrt{1+\beta^2}}{\beta(\beta^2+1)} = \frac{c\beta - x_1}{\sqrt{1+\beta^2}}.$$

Учитывая, что

$$x_1 = (e_1, x); c = \sqrt{\|x\|^2 - (e_1,x)^2},$$

получаем

$$d(x, K(e_1,\alpha)) = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\left(\sqrt{\|x\|^2 - (e_1,x)^2}) - \frac{1}{\beta}(e_1,x)\right).$$

Расстояние достигается на векторе

$$u=\frac{(\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2}+(e_1,x)\beta)(\beta\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2}-(e_1,x))}{(1+\beta^2)\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2}}+$$
$$+\frac{\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2}+\beta(e_1,x)}{(1+\beta^2)\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2}}x.$$

Наконец, если $x\notin K(e_1,\alpha)$ и $x\in -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$, то $x\in -K^*(e_1,\alpha)$ и $x=0+x$, проекция x на $K(e_1,\alpha)$ есть 0, а $d(x,K(e_1,\alpha))=\|x\|$. Итак, получаем следующую формулу:

$$d(x,K(e_1,\alpha))=\begin{cases}0, & \text{если } x\in K(e_1,\alpha);\\ \|x\|, & \text{если } x\notin K(e_1,\alpha) \text{ и } x\in -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2});\\ \alpha(\sqrt{\|x\|^2-(e_1,x)^2} & -\frac{\sqrt{1-\alpha_2}}{\alpha}(e_1,x)),\\ & \text{если } x\notin K(e_1,\alpha) \text{ и } x\notin -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2}).\end{cases}$$

Замечание. При $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем формулу (4) из примера 2.1.2 в [4].

2^0. Рассмотрим теперь произвольный круглый конус $K(a,\alpha)$, где $a\in H$ — произвольный вектор, $\|a\|=1$ и $\alpha\in(0,1)$. Пусть U_ω — преобразование Хаусхолдера [5], переводящее вектор a в вектор e_1.

Тогда $U_\omega: H\to H$, $\omega=a-e_1$, U_ω — унитарный оператор, т. е. $U_\omega^{-1}=U_\omega^*=U_\omega$. Согласно утверждению 1.5.2 U_ω переводит конус $K(a,\alpha)$ в конус $K(e_1,\alpha)$.

Пусть $x\in H$ — произвольный вектор. Имеем $U_\omega(a)=e_1$, $U_\omega(e_1)=a$,

$$U_\omega(x)=x+\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}a-\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}e_1.$$

Так как U_ω — изометрия, то

$$d(x,K(a,\alpha))=d(U_\omega(x),K(e_!,\alpha)).$$

Если $x\in K(a,\alpha)$, то $d(x,K(a,\alpha))=0$. Если $x\notin K(a,\alpha)$ и $x\in -K(a,\sqrt{1-\alpha^2})$, то $U_\omega(x)\notin K(e_1,\alpha)$ и $x\in -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$ и, значит, в этом случае

$$d(x,K(a,\alpha))=\|U_\omega(x)\|=\|x\|.$$

Если же $x\notin K(a,\alpha)$ и $x\notin -K(a,\sqrt{1-\alpha^2})$, то $U_\omega(x)\notin K(e_1,\alpha)$ и $U_\omega(x)\notin -K(e_1,\sqrt{1-\alpha^2})$, следовательно, в силу предыдущего пункта, имеем

$$d(x,K(a,\alpha))=d\left(x+\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}a-\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}e_1,K(e_1,\alpha)\right)=$$
$$=\alpha\sqrt{\|x\|^2-\left[(e_1,x)+\frac{(x_1-(a,x))(a_1-1)}{1-a_1}\right]^2}-\sqrt{1-\alpha^2}(a,x)=$$
$$=\alpha\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}-\sqrt{1-\alpha^2}(a,x).$$

Найдем проекцию вектора x на конус $K(a,\alpha)$. Имеем

$$d(x,K(a,\alpha)) = d(U_\omega(x), K(e_!,\alpha)),$$

т. е. проекция x на $K(a,\alpha)$ равна образу проекции вектора

$$U_\omega(x) = x + \frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}a - \frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}e_1$$

на $K(e_1,\alpha)$ при отображении U_ω. Согласно предыдущему пункту, получим

$$Px = \frac{(\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}+(a,x)\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}})(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}-(a,x))}{\frac{1}{1-\alpha^2}\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}}a+$$

$$+\frac{\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}+\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}(a,x)}{\frac{1}{1-\alpha^2}\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}}U_\omega(x+\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}a-\frac{x_1-(a,x)}{1-a_1}e_1) =$$

$$= \frac{(\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}+\alpha(a,x))(\alpha\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}-\sqrt{1-\alpha^2}(a,x))}{\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}}a+$$

$$+\frac{(1-\alpha^2)\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}+\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(a,x)}{\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2}}x.$$

Итак, получаем следующую формулу:

$$d(x,K(a,\alpha)) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\in K(a,\alpha);\\ \|x\|, & \text{если } x\notin K(a,\alpha) \text{ и } x\in -K(a,\sqrt{1-\alpha^2});\\ \alpha\sqrt{\|x\|^2-(a,x)^2} & -\sqrt{1-\alpha^2}(a,x),\\ & \text{если } x\notin K(a,\alpha),\ x\notin -K(a,\sqrt{1-\alpha^2}). \end{cases} \tag{2}$$

3^0. Пусть ϕ — непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция действительного переменного такая, что $\int_a^b \phi^2(x)dx = 1$, α — произвольное число из $(0,1)$. Обозначим через $M(\phi,\alpha)$ следующее множество

$$M(\phi,\alpha) = \left\{ g\in C_{[a,b]}:\ \int\limits_a^b g(x)\phi(x)dx \geqslant \alpha\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx} \right\}.$$

Рассмотрим следующую экстремальную задачу: для любой функции $f\in C_{[a,b]}$ найти

$$d_f = \inf\left\{ \sqrt{\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2dx}:\ g\in M(\phi,\alpha) \right\}. \tag{3}$$

Результаты пункта 2^0 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.4.1. *Для любой функции $f \in C_{[a,b]}$ существует единственная непрерывная функция $h_f \in C_{[a,b]}$, которая доставляет инфимум в задаче* (3). *При этом*

$$d_f = \begin{cases} 0, & \text{если } f \in M(\phi,\alpha); \\ (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } f \notin M(\phi,\alpha) \text{ и } f \in -M(\phi,\sqrt{1-\alpha^2}); \\ \alpha(\int_a^b f^2(x)dx & -(\int_a^b f(x)\phi(x)dx)^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{1-\alpha^2}\int_b^a f(x)\phi(x)dx, \\ & \text{если } f \notin M(\phi,\alpha) \text{ и } f \notin -M(\phi,\sqrt{1-\alpha^2}). \end{cases}$$

Функция h_f равна f, если $f \in M(\phi,\alpha)$; h_f равна 0, если $f \notin M(\phi,\alpha)$ и $f \in -M(\phi,\sqrt{1-\alpha^2})$; если же $f \notin M(\phi,\alpha)$ и $f \notin -M(\phi,\sqrt{1-\alpha^2})$, то

$$h_f = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\left(\int_a^b f^2(x)dx - (\int_a^b f(x)\phi(x)dx)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\left(\int_a^b f^2(x)dx - (\int_a^b f(x)\phi(x)dx)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\left(\alpha\left(\int\limits_a^b f^2(x)dx - \left(\int\limits_a^b f(x)\phi(x)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{1-\alpha^2}\int\limits_a^b f(x)\phi(x)dx\right)\phi+$$

$$+\frac{(1-\alpha^2)\left(\int_a^b f^2(x)dx - (\int_a^b f(x)\phi(x)dx)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\int_a^b f(x)\phi(x)dx}{\left(\int_a^b f^2(x)dx - (\int_a^b f(x)\phi(x)dx)^2\right)^{\frac{1}{2}}} f.$$

Литература

1. *Худалов В. Т.* Регулярные конусы в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 1.—С. 193–196.
2. *Худалов В. Т.* Аппроксимативные свойства положительной и отрицательной частей элемента в упорядоченных банаховых пространствах // Мат. заметки.—1996.—Вып. 5.—С. 793–798.
3. *Худалов В. Т.* В гильбертовом пространстве регулярность конуса равносильна самосопряженности // Матем. заметки.
4. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения.—Владикавказ, 1999.—200 с.
5. *Хорн Р., Джонстон Ч.* Матричный анализ.—М.: Мир, 1989.—655 с.