Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 1999, Том 1, Выпуск 3

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятилетию

УДК **511.3**

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К НЕПРЕРЫВНЫМ ДРОБЯМ ГУРВИЦА

Б. Г. Тасоев

В работе находится наилучший порядок приближения рациональными числами чисел Гурвица. Необходимые обозначения и сведения по теории цепных дробей см. в [1, 2].

1. Предварительные сведения

Задача приближения вещественного числа α рациональными числами состоит в следующем [4]. Пусть $\psi(q)$ — некоторая положительная функция, убывающая с ростом q. Говорят, что иррациональное число α допускает приближение числами $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, порядка $\psi(q)$, если существует постоянная $c_1 > 0$, зависящая от α и функции $\psi(q)$, такая, что неравенство

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < c_1\psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в числах $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$.

Порядок приближения $\psi(q)$ называется наилучшим порядком приближения числа α, если существует постоянная $c_2 > 0$, зависящая от α и $\psi(q)$, такая, что при любых $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$, имеет место неравенство

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < c_2\psi(q).$$

Под арифметической прогрессией m-го порядка будем понимать бесконечную последовательность

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots \tag{1.1}$$

для которой разности m-го порядка

$$\Delta^m\varphi(0),\ \Delta^m\varphi(1),\ \Delta^m\varphi(2), \dots$$

образуют последовательность с одинаковыми постоянными членами.

Например, бесконечная последовательность

$$1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots$$

есть арифметическая прогрессия третьего порядка, так как

$$\begin{array}{llll} \Delta\varphi(0) = 7, & \Delta\varphi(1) = 19, & \Delta\varphi(2) = 37, & \Delta\varphi(3) = 61, \dots; \\ \Delta^2\varphi(0) = 12, & \Delta^2\varphi(1) = 18, & \Delta^2\varphi(2) = 24, & \Delta^2\varphi(3) = 30, \dots; \\ \Delta^3\varphi(0) = 6, & \Delta^3\varphi(1) = 6, & \Delta^3\varphi(2) = 6, & \Delta^3\varphi(3) = 6, \dots. \end{array}$$

Можно показать, что произвольный член $\varphi(\lambda)$ последовательности (1.1) имеет вид [4]:

$$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \tbinom{\lambda}{1}\Delta\varphi(0) + \tbinom{\lambda}{2}\Delta^2\varphi(0) + \dots + \tbinom{\lambda}{m}\delta^m\varphi(0).$$

Иначе говоря, $\varphi(\lambda)$ представляет собой полином степени m относительно λ (в нашем примере $\varphi(\lambda) = (\lambda+1)^3$).

Очевидно, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{m!} f(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Бесконечную последовательность

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

будем называть арифметической прогрессией нулевого порядка.

В этой терминологии, бесконечная арифметическая прогрессия

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+\lambda, \dots$$

является арифметической прогрессией первого порядка.

В дальнейшем мы будем рассматривать арифметические прогрессии m-го порядка с общим членом $\varphi(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$, старший коэффициент которого положителен. Очевидно, что существует такое целое положительное число λ_0, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ все $\varphi(\lambda)$ будут целыми положительными. Поэтому, не ограничивая общность наших рассуждений, будем считать, что все члены последовательности (1.1) целые положительные числа.

Пусть даны K — арифметические прогрессии с известными порядками

$$\begin{gathered} \varphi_1(0),\ \varphi_1(1),\ \varphi_1(2), \dots, \\ \varphi_2(0),\ \varphi_2(1),\ \varphi_2(2), \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_k(0),\ \varphi_k(1),\ \varphi_k(2), \dots, \end{gathered} \tag{1.2}$$

и пусть $b_0, b_1, b_2, \dots, b_3$ — некоторая конечная последовательность целых положительных чисел. Составим цепную дробь

$$\alpha = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_s, \overline{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \dots, \varphi_k(\lambda)}]_{\lambda=0}^{\infty} \tag{1.3}$$

Цепные дроби типа (1.3) называют цепными дробями Гурвица, а число α — числом Гурвица [4].

Легко заметить, что если все арифметические прогрессии (1.2) нулевого порядка, то число α, определяемое равенством (1.3) является периодической.

Для чисел (1.3) Гурвиц доказал следующий результат [4].

Теорема Гурвица. *Пусть иррациональные числа α и β связаны равенством*

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d},$$

где a, b, c, d — целые рациональные числа. Пусть, далее, α число Гурвица. Тогда β также число Гурвица. При этом арифметические прогрессии в цепной дроби α будут такого же порядка, что и в цепной дроби для α, исключая арифметические прогрессии нулевого порядка, которые могут присутствовать в одной и отсутствовать в другой.

Трансцендентность чисел Гурвица, содержащие в их разложении арифметические прогрессии не выше первого порядка, установлено в работах [5, 6]. Для таких чисел найден наилучший порядок аппроксимации [1].

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть*

$$\varphi(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_m \tag{2.1}$$

— многочлен с целыми коэффициентами; $b_0 \in \mathbb{N}$; $m \geqslant 1$; $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,\ \lambda_m$ — корни многочлена $\varphi(\lambda)$; a_0 — произвольное целое;

$$\lambda_0 \in \mathbb{N}, \lambda_0 > \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\}; \tag{2.2}$$

$$\alpha = [a_0; \overline{\varphi(\lambda)}]_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}. \tag{2.3}$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{m^m}{b_0} + \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \cdot \frac{1}{q^2} \tag{2.4}$$

имеет бесчисленное множество решений в числах $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\epsilon)$ такое, что для любого $\frac{p}{q} \in Q$, где $q \geqslant q'$, имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{m^m}{b_0} - \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \cdot \frac{1}{q^2}. \tag{2.5}$$

$\lhd$ Рассмотрим знаменатель подходящей дроби порядка цепной дроби (2.3). Имеем [1]:

$$q_n = f(n)\varphi(\lambda_0 + 1)\varphi(\lambda_0 + 2)\dots\varphi(\lambda_0 + n) =$$

$$= f(n)b_0(\lambda_0 + 1 - \lambda_1)(\lambda_0 + 1 - \lambda_2)\dots(\lambda_0 + 1 - \lambda_m)\times$$

$$\times b_0(\lambda_0 + 2 - \lambda_1)(\lambda_0 + 2 - \lambda_2)\dots(\lambda_0 + 2 - \lambda_m)\times\dots\times$$

$$\times b_0(\lambda_0+n-\lambda_1)(\lambda_0+n-\lambda_2)\dots(\lambda_0+n-\lambda_m)=$$
$$=f(n)b_0^n(\lambda_0+1-\lambda_1)(\lambda_0+2-\lambda_1)\dots(\lambda_0+n-\lambda_1)\times$$
$$\times(\lambda_0+1-\lambda_2)(\lambda_0+2-\lambda_2)\dots(\lambda_0+n-\lambda_2)\times\dots\times$$
$$\times(\lambda_0+1-\lambda_m)(\lambda_0+2-\lambda_m)\dots(\lambda_0+n-\lambda_m).$$

Положим $\mu_k=\lambda_0-\lambda_k,\ k=1,2,\dots,m$. Тогда получим

$$q_n=f(n)b_0^n(\mu_1+1)(\mu_1+2)\dots(\mu_1+n)(\mu_2+1)(\mu_2+2)\dots(\mu_2+n)\times\dots\times$$
$$\times(\mu_m+1)(\mu_m+2)\dots(\mu_m+n)=f(n)b_0^n\cdot\frac{\Gamma(\mu_1+n+1)}{\Gamma(\mu_1+1)}\dots\frac{\Gamma(\mu_m+n+1)}{\Gamma(\mu_m+1)}.$$

Поскольку $\varphi(\lambda)=b_0\lambda^m+b_1\lambda^{m-1}+\dots+b_m=b_0\cdot\prod\limits_{k=1}^{m}(\lambda-\lambda_k)$ — симметрический многочлен относительно набора чисел (корней $\varphi(\lambda)$) $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, то

$$q_n=f(n)b_0^n\cdot\left|\frac{\Gamma(\mu_1+n+1)}{\Gamma(\mu_1+1)}\right|\dots\left|\frac{\Gamma(\mu_m+n+1)}{\Gamma(\mu_m+1)}\right|.$$

Но [1]

$$\left|\frac{\Gamma(\mu_k+n+1)}{\Gamma(\mu_k+1)}\right|\sim\frac{1}{|\Gamma(\mu_k+1)|}\cdot n!n^{|\mu_k|};\ f(n)<2^n. \tag{2.6}$$

Отсюда, имея в виду формулу Стирлинга

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot(\frac{n}{e})^n,$$

находим

$$q_n\sim f(n)|n^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m}|(n!)^m\sim f(n)|n^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m}|(n!)^m\sim$$
$$\sim f(n)|n^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m}|(\sqrt{2\pi n}\cdot n^ne^{-n})^m\sim f(n)(\sqrt{2\pi n})^{\frac{m}{2}}e^{-mn}|n^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_m}|n^{mn}.$$

Откуда, в свою очередь, выводим

$$\ln q_n\sim mn\ln n;\ \ln\ln q_n\sim\ln n,$$

и, следовательно,

$$n\sim\frac{1}{m}\frac{\ln q_n}{\ln\ln q_n}. \tag{2.7}$$

Как известно [1], если $\frac{p_k}{q_k}=[a_0;a_1,a_2,\dots,a_k]$ — подходящая дробь k-го порядка к бесконечной непрерывной дроби $\beta=[a_0;a_1,a_2,\dots,a_k,\dots]$, то

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{1}{\gamma_{k+1}q_k^2},$$

где $\gamma_{k+1}=[0;a_{k+2},a_{k+3},\dots]+a_{k+1}+[0;a_k,a_{k-1},\dots,a_1]$.

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь n-го порядка к цепной дроби 2.3. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\gamma_{n+1} q_n^2}, \tag{2.9}$$

где

$$\gamma_{n+1} = \varphi(\lambda_0 + n + 1) + [0; \varphi(\lambda_0 + n), \ldots, \varphi(\lambda_0 + 1)] +$$
$$+ [0; \varphi(\lambda_0 + n + 2), \varphi(\lambda_0 + n + 3), \ldots] \sim \varphi(\lambda_0 + n + 1) =$$
$$= b_0(\lambda_0 + n + 1 - \lambda_1)(\lambda_0 + n + 1 - \lambda_2) \ldots (\lambda_0 + n + 1 - \lambda_m) =$$
$$= b_0(n+1)^m \cdot \left|(1 + \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{n+1})(1 + \frac{\lambda_0 - \lambda_2}{n+1}) \ldots (1 + \frac{\lambda_0 - \lambda_m}{n+1})\right| \sim$$
$$\sim b_0(n+1)^m \sim b_0 n^m \sim b_0 \left(\frac{\ln q_n}{m \ln\ln q_n}\right)^m.$$

Теперь, пользуясь (2.7) и (2.9), находим

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \sim \frac{m^m}{b_0} \left(\frac{\ln\ln q_n}{\ln q_n}\right)^m \cdot \frac{1}{q_n^2},$$

откуда следует справедливость (2.4).

Второе утверждение теоремы следует из следующих соображений.

Пусть $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ — подходящая дробь цепной дроби (2.3). Тогда, в силу (2.10), верно (2.5). Если $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, то

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \left(\frac{m^m}{b_0} - \epsilon\right) \left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \cdot \frac{1}{q^2},$$

начиная с некоторого $q \geqslant q'$. Известно, что если $p/q \in Q$ не является подходящей дробью к числу β, то

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2}.$$

Теорема 2. *Пусть*

$$\varphi_s(\lambda) = b_{s1}\lambda^{m_s} + b_{s2}\lambda^{m_s - 1} + \cdots + b_{sm_s}, \ s = 1, 2, \ldots, n$$

— многочлены с целыми коэффициентами;

$$b_{s1} \geqslant 1, \ s = 1, 2, \ldots, n, \ \text{если } m_s > 0; \tag{2.12}$$

$$b_{sm_s} = b_{s2}, \ s = 1, 2, \ldots, n, \ \text{если } \deg\varphi_s = m_s = 0; \tag{2.12$_1$}$$

$$\lambda_{s1}, \lambda_{s2}, \ldots, \lambda_{sm_s}, \ s = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.13}$$

— корни многочлена (2.11);

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{s=1}^{n} \deg\varphi_s(\lambda); \ M \geqslant 1; \tag{2.14}$$

$$\max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = m; \tag{2.15}$$

$$b = b_{m_1} \tag{2.16}$$

a_0 — *произвольное фиксированное целое число;*

$$\lambda_0 \in \mathbb{N},\ \ \lambda_0 > \max\{|\lambda_{s1}|, \ldots, |\lambda_{sm_s}|\},\ \ s = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.17}$$

$$\alpha = [a_0; \overline{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)}]_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}. \tag{2.18}$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *выполняется неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{M^m}{b} - \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \cdot \frac{1}{q^2}. \tag{2.20}$$

$\lhd$ Положим

$$\lambda_0 - \lambda_{se} = \mu_{se},\ \ s = 1, 2, \ldots, n;\ \ l = 1, 2, \ldots, m_s. \tag{2.21}$$

В силу (2.11) и (2.13), имеем:

$$\varphi_s(\lambda) = b_{s1} \cdot \prod_{k=1}^{m_s} (\lambda - \lambda_{sk}).$$

Рассмотрим знаменатель подходящей дроби $nt + r$-го порядка цепной дроби, $0 \leqslant r < n$, (2.18). Как и при доказательстве теоремы 1, находим:

$$q_{nt+r} = f(nt + r) \cdot \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\lambda_0 + 1) \cdots \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\lambda_0 + t) \cdot \prod_{k=1}^{r} \varphi_k(\lambda_0 + t + 1) =$$

$$= f(nt + r) \cdot \prod_{k=1}^{t+1} \varphi_1(\lambda_0 + k) \ldots \prod_{k=1}^{t+1} \varphi_r(\lambda_0 + k) \cdot \prod_{k=1}^{t} \varphi_{r+1}(\lambda_0 + k) \cdots \prod_{k=1}^{t} \varphi_n(\lambda_0 + k) =$$

$$= b_{11}^{t+1} f(nt + r) \cdot \prod_{k=1}^{m_1} (\lambda_0 + 1 - \lambda_{1k}) \cdot \prod_{k=1}^{m_1} (\lambda_0 + 2 - \lambda_{1k}) \cdots \prod_{k=1}^{m_1} (\lambda_0 + 1 + t - \lambda_{1k}) \times$$

$$\times b_{21} \prod_{k=1}^{m_2} (\lambda_0 + 1 - \lambda_{2k}) \cdot \prod_{k=1}^{m_2} (\lambda_0 + 2 - \lambda_{2k}) \cdots \prod_{k=1}^{m_2} (\lambda_0 + 1 + t - \lambda_{2k}) \times \cdots \times$$

$$\times b_{r1} t + 1 \cdot \prod_{k=1}^{m_r} (\lambda_0 + 1 - \lambda_{rk}) \cdot \prod_{k=1}^{m_r} (\lambda_0 + 2 - \lambda_{rk}) \cdots \prod_{k=1}^{m_r} (\lambda_0 + 1 + t - \lambda_{rk}) \times$$

$$\times b_{r+1,1} t \cdot \prod_{k=1}^{m_{r+1}} (\lambda_0 + 1 - \lambda_{r+1,k}) \cdot \prod_{k=1}^{m_{r+1}} (\lambda_0 + 2 - \lambda_{r+1,k}) \ldots \prod_{k=1}^{m_{r+1}} (\lambda_0 + t - \lambda_{r+1,k}) \times \cdots$$

$$\times b_{n1} t \cdot \prod_{k=1}^{m_n} (\lambda_0 + 1 - \lambda_{nk}) \prod_{k=1}^{m_n} (\lambda_0 + 2 - \lambda_{nk}) \cdots \prod_{k=1}^{m_n} (\lambda_0 + t - \lambda_{nm_k}) =$$

$$= f(nt+r)(b_{11}b21\dots b_{r1})^{t+1}\cdot(b_{r+1,1}\dots b_{n1})^t\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{11}+k)\cdot\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{12}+k)\cdots\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{1m_1}+k)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{21}+k)\cdot\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{22}+k)\cdots\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{1m_2}+k)\times\dots\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{r1}+k)\cdot\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{r2}+k)\cdots\prod_{k=1}^{t+1}(\lambda_0-\lambda_{rm_r}+k)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{r+1,1}+k)\cdot\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{r+1,2}+k)\cdots\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{r+1,m_{r+1}}+k)\times\dots\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{n1}+k)\cdot\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{n2}+k)\cdots\prod_{k=1}^{t}(\lambda_0-\lambda_{nm_n}+k).$$

Имея в виду (2.21), отсюда следует, что

$$q_{nt+r} = f(nt+r)(b_{11}b_{21}\cdots_{r1})^{t+1}\cdot(b_{r+1,1}\dots b_{n1})^t\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{m_1}\frac{\Gamma(\mu_{1k}+t+1)}{\Gamma(\mu_{1k}+1)}\cdot\prod_{k=1}^{m_2}\frac{\Gamma(\mu_{2k}+t+1)}{\Gamma(\mu_{2k}+1)}\cdots\prod_{k=1}^{m_r}\frac{\Gamma(\mu_{rk}+t+1)}{\Gamma(\mu_{2k}+1)}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{m_{r+1}}\frac{\Gamma(\mu_{r+1,k}+t)}{\Gamma(\mu_{r+1,k}+1)}\cdots\prod_{k=1}^{m_n}\frac{\Gamma(\mu_{nk}+t)}{\Gamma(\mu_{nk}+1)}. \tag{2.22}$$

Многочлен q_{nt+r} от переменных $\lambda_{s1},\lambda_{s2},\dots,\lambda_{sm_s}$, $s=1,2,\dots,n$, является симметрическим многочленом. Поскольку $\varphi_s(\lambda)$, $s=1,2,\dots,n$ — многочлены с целыми коэффициентами. Далее, так как при $\lambda\geqslant\lambda_0$ многочлены $\varphi_s(\lambda)$, $s=1,2,\dots,n$, имеют целые положительные значения, то и q_{nt+r} будет целым положительным числом. В силу (2.6)

$$\left|\frac{\Gamma(\mu_{se}+t+1)}{\Gamma(\mu_{se}+1)}\right|\sim\frac{1}{|\Gamma(\mu_{se}+1)|}\cdot t!|t^{\mu_{se}}|,\ s=1,\dots,n;\ l=1,2,\dots,m_s.$$

Поэтому

$$q_{nt+r}\sim f(nt+r)(b_{11}b_{21}\dots b_{r1})^{t+1}\cdot(b_{r+1,1}\dots b_{n1})^t\times$$

$$\times\left|\prod_{k=1}^{m_1}\Gamma(\mu_{1k}+1)\cdots\prod_{k=1}^{m_n}\Gamma(\mu_{nk}+1)\right|^{-1}\cdot(t!)^{m_1+\dots+m_r}\cdot((t-1)!)^{m_{r+1}+\dots+m_n}\times$$

$$\times|t^A|\sim f(nt+r)(b_{11}b_{21}\dots b_{r1})^{t+1}\cdot(b_{r+1,1}\dots b_{n1})^t\cdot B^{-1}(t!)^M\cdot|t^A|,$$

где

$$A=\sum_{k=1}^{m_1}\mu_{1k}+\sum_{k=1}^{m_2}+\dots+\sum_{k=1}^{n_k},\quad B=\left|\prod_{k=1}^{m_1}\Gamma(\mu_{1k}+1)\cdots\prod_{k=1}^{m_n}\Gamma(\mu_{nk}+1)\right|,$$

отсюда в силу теоремы Стирлинга следует, что

$$\ln q_{nt+r} \sim Mt\ln t,\ \ln\ln q_{nt+r} \sim \ln t,$$

$$t \sim \frac{1}{m}\cdot\frac{\ln q_{nt+r}}{\ln\ln q_{nt+r}} \tag{2.23}$$

Пусть $m_{r+1} \geqslant 1$. Пользуясь (2.8), (2.18) и (2.23), находим, что

$$\gamma_{nt+r+1} = \varphi_{r+1}(\lambda_0+t+1) + [0;\varphi_r(\lambda_0+t+1),\ldots,\varphi_1(\lambda_0+1)]+$$

$$+[0;\varphi_{r+2}(\lambda_0+t+1),\varphi_{r+3}(\lambda_0+t+1),\ldots] \sim \varphi_{r+1}(\lambda_0+t+1) =$$

$$= b_{r+1,1}(\lambda_0+t+1-\lambda_{r+1,1})(\lambda_0+t+1-\lambda_{r+1,2})\ldots(\lambda_0+t+1-\lambda_{r+1,m_{r+1}}) =$$

$$= b_{r+1,1}(t+1)^{m_{r+1}}\left|\left(1+\frac{\lambda_0-\lambda_{r+1,1}}{t+1}\right)\left(1+\frac{\lambda_0-\lambda_{r+1,2}}{t+1}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda_0-\lambda_{r+1,m_{r+1}}}{t+1}\right)\right| \sim$$

$$\sim b_{r+1,1}(t+1)^{m_{r+1}} \sim b_{r+1,1}t^{m_{r+1}} \sim b_{r+1,1}\left(\frac{\ln q_{nt+r}}{M\ln\ln q_{nt+r}}\right)^{m_{r+1}}.$$

Следовательно,

$$\left|\alpha-\frac{p_{nt+r}}{q_{nt+r}}\right| \sim \frac{M^{m_{r+1}}}{b_{r+1,1}}\left(\frac{\ln\ln q_{nt+r}}{\ln q_{nt+r}}\right)^{m_{r+1}}\cdot\frac{1}{q^2_{nt+r}}. \tag{2.24}$$

Первое утверждение теоремы следует из (2.24). Докажем (2.20).

$\lhd$ Пусть

$$\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\} = m = m_{r_0+1} \geqslant 1,\ \frac{p}{q} = \frac{p_{nt+r_0}}{q_{nt+r_0}}.$$

Тогда, в силу (2.24) верно (2.20).

Предположим, что $\frac{p}{q} = \frac{p_{nt+r}}{q_{nt+r}},\ r \neq r_0,\ m_{r+1} \geqslant 1$. Тогда, пользуясь (2.24), находим:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_{nt+r}}{q_{nt+r}}\right| > \left(\frac{M^{m_{r+1}}}{b_{r+1,1}}-\epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q_{nt+r}}{\ln q_{nt+r}}\right)^{m_{r+1}}\cdot\frac{1}{q^2_{nt+r}} >$$

$$> \left(\frac{M^m}{b}-\epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q_{nt+r}}{\ln q_{nt+r}}\right)^m\cdot\frac{1}{q^2_{nt+r}} = \left(\frac{M^m}{b}-\epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m\cdot\frac{1}{q^2},$$

начиная с некоторого $q \geqslant q'$.

Если $m_{r+1} = 0$, то

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha-\frac{p_{nt+r}}{q_{nt+r}}\right| = \frac{1}{\gamma_{nt+r+1}q^2_{nt+r}} > \frac{1}{b_{r+1,m_{r+1}}q^2_{nt+r}} >$$

$$> \left(\frac{M^m}{b}-\epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q_{nt+r}}{\ln q_{nt+r}}\right)^m\cdot\frac{1}{q^2_{nt+r}}.$$

Пусть теперь $\frac{p}{q} \neq \frac{p_{nt+r}}{q_{nt+r}}$. Тогда

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2} > \left(\frac{M^m}{b} - \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \frac{1}{q^2},$$

начиная с некоторого $q \geqslant q'$.

Теорема 2 доказана полностью. $\triangleright$

Аналогичными рассуждениями доказывается предложение

Теорема 3. *Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — некоторая конечная последовательность натуральных чисел;*

$$\alpha = [a_0; b_1, b_2, \ldots, b_s, \overline{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)}]_{\lambda=\lambda_0}^{\infty}$$

— число Гурвица; где для многочленов $\varphi_s(\lambda)$, $s = 1, 2, \ldots, n$, выполняются условия (2.11)–(2.17). Тогда для любого $\epsilon > 0$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left(\frac{M^m}{b} - \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \frac{1}{q^2}$$

имеет бесчисленное множество решений в числах $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Существует число $q' = q(\epsilon)$ такое, что для любого рационального числа $\frac{p}{q}$, где $q \geqslant q'$, имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \left(\frac{M^m}{b} - \epsilon\right)\left(\frac{\ln\ln q}{\ln q}\right)^m \frac{1}{q^2}.$$

Таким образом, нами найден наилучший порядок аппроксимации ко всем числам Гурвица.

Литература

1. *Тасоев Б. Г.* О рациональных приближениях к некоторым бесконечным цепным дробям: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М., 1997.—115 с.
2. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби.—М.: Наука, 1978.—112 с.
3. *Шидловский А. Б.* Диофантовы приближения и трансцендентные числа.—М.: МГУ, 1982.—264 с.
4. *Perron O.* Die lehre von den Kettenbrüchen, Bandi-Stuttgart, 1954.
5. *Siegel C. L.* *Ü* ber einige Anwendungen Diophantischer Approximationen. Abh. Press. Acad., Wiss. Phys. Math. Kl.—1929–1930, № 1.—S. 1–70.
6. *Webber G. C.* Transcendense of certain continued fractions // Bull. Amer. Math. Soc.—1944.—V. 50.—P. 736–740.