Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 1999, Том 1, Выпуск 3

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятилетию.

УДК **517.98**

ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. Кусраев, М. А. Плиев

В работе вводится новый класс — мажорируемых, нелинейных, ортогонально аддитивных операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах. Рассматриваются вопросы существования и вычисления точной мажоранты оператора, разложимости мажорантной нормы. Изучаются латерально непрерывные и вполне аддитивные операторы.

В работе [5] М. Мазон и С. де Леон ввели понятие абстрактных операторов Урысона — ортогонально аддитивных, порядково ограниченных операторов, действующих в векторных решетках. Оказалось, что такие операторы обладают хорошими порядковыми свойствами, для них имеет место, в частности, порядковое исчисление Рисса-Канторовича. Опираясь на эти результаты в [6] был получен критерий представимости оператора из указанного класса в виде интегрального оператора Урысона. Цель настоящей статьи — показать возможность распространения теории в духе [3] на ортогонально аддитивные мажорируемые операторы, включающие в себя операторы урысоновского типа, действующие в пространствах измеримых вектор-функций. Теория решеточно нормированных пространств в требуемом объеме изложена в [3]. Необходимые сведения о векторных решетках и положительных операторах можно подчерпнуть в [1, 2].

1. Основное определение

Введем необходимые обозначения и терминологию. Всюду ниже E и F — архимедовы векторные решетки, (V, E) и (W, F) — решеточно нормированные пространства. Оператор $T : E \to F$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(e + f) = Te + Tf$, когда $e \perp f$. Оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*, если T порядково ограничен и ортогонально аддитивен. Множество всех абстрактных операторов Урысона, действующих из E в F обозначается $U(E, F)$. Оператор $S \in U(E, F)$ называется *положительным*, если $Sf \geqslant 0$ $(f \in E)$. Множество всех положительных операторов из E в F обозначается $U_+(E, F)$. Следующий результат установлен в [4].

1.1. Теорема. *Если F — K-пространство, то упорядоченное векторное пространство $U(E, F)$ также является K-пространством. При этом для произвольных T, $S \in U(E, F)$ точные границы и модуль вычисляются по следующим формулам:*

(1) $(T \wedge S)(e) = \inf\{Te_1 + Se_2 : e_1 \perp e_2;\ e_1 + e_2 = e\}$;

(2) $(T \vee S)(e) = \sup\{Te_1 + Se_2 : e_1 \perp e_2;\ e_1 + e_2 = e\}$;

(3) $|T|(e) = \sup\{Te_1 - Te_2 : e_1 \perp e_2;\ e_1 + e_2 = e\}$.

В пространстве $U(E,F)$ выделим важное для дальнейшего множество $U_{\mathrm{sim}} \in U_+(E,F)$, где

$$U_{\mathrm{sim}} := \{T \in U_+(E,F) : Te = T(-e);\ e_1 \leqslant e_2 \Rightarrow Te_1 \leqslant Te_2\,(e_1, e_2 \in E_+)\}\,.$$

1.2. Лемма. *Пусть E — решетка с проекциями на главные полосы, а F это K-пространство. Тогда $U_{\mathrm{sim}}(E,F)$ — конус и порядково полная подрешетка в K-пространстве $U(E,F)$.*

$\lhd$ Ясно, что если $T \in U_{\mathrm{sim}}$, то и $\lambda T \in U_{\mathrm{sim}}$, $\forall \lambda \geqslant 0$. Возьмем S_1 и $S_2 \in U_{\mathrm{sim}}$ и положим $R := (S_1 \wedge S_2)$ и $Q := (S_1 \vee S_2)$. Легко видеть, что R и Q — положительные, четные операторы. Покажем, что R и S возрастают на E_+. Пусть $0 \leqslant d \leqslant e$. Тогда для любого разложения $e = e_1 + e_2$, $e_1 \perp e_2$ найдется разложение $d = d_1 + d_2$ такое, что $d_1 \leqslant e_1$, $d_2 \leqslant e_2$. Отсюда видно, что $R(d) \leqslant S_1(d_1) + S_2(d_2) \leqslant S_1(e_1) + S_2(e_2)$. Переходя к инфимуму получаем $R(d) \leqslant R(e)$. Заметим, что в этой части доказательства мы пока не использовали существование проекций на главные полосы. Это предположение обеспечивает монотонность Q. В самом деле для произвольного разложения $d = d_1 + d_2$, $d_1 \perp d_2$, можно ввести элементы $e_1 := \pi e$ и $e_2 := \pi^{\perp} e$, где π проекция на полосу $d_1^{\perp\perp}$. Тогда $e = e_1 + e_2$, $e_1 \perp e_2$, $d_1 \leqslant e_1$, $d_2 \leqslant e_2$. Следовательно, $S_1(d_1) + S_2(d_2) \leqslant S_1(e_1) + S_2(e_2) \leqslant Q(e)$. Переход у супремуму по указанным d_1 и d_2 приводит к неравенству $Q(d) \leqslant Q(e)$. Для точных границ направленных семейств операторов требуемые свойства устанавливаются путем перехода к o-пределу. Отсюда вытекает порядковая замкнутость решетки U_{sim}. $\rhd$

1.3. Всюду ниже (V,E) и (W,F) — РНП нормируемые решетками E и F. Нелинейный оператор $T : V \to W$ называется ортогонально аддитивным, если $T(v + w) = Tv + Tw$, когда v и w дизъюнктны. Напомним, что элементы v и w называются дизъюнктными, если $\lvert v\rvert \perp \lvert w\rvert$. Оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если выполняются следующие условия:

1) T ортогонально аддитивен;

2) существует $S \in U_{\mathrm{sim}}$ такой, что выполняется каноническое неравенство $\lvert Tv\rvert \leqslant S\,\lvert v\rvert$. Оператор S, обладающий указанными свойствами называется *мажорантой* T. Множество всех мажорант обозначается через $\mathrm{maj}(T)$. Наименьший элемент в $\mathrm{maj}(T)$ относительно естественного порядка, индуцированного из $U(E,F)$, называется *точной мажорантой* оператора T и обозначается $\lvert T\rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $M_U(V,W)$.

При достаточно слабых условиях у мажорируемого оператора существует точная мажоранта.

1.4. Теорема. *Пусть пространство W разложимо, а решетка F порядкова полна. Тогда для любого мажорируемого оператора $T : V \to W$ существует точная мажоранта $\lvert T\rvert$ и отображение $T \mapsto \lvert T\rvert$ является решеточной нормой со значением в пространстве $U(E,F)$. При этом точная мажоранта может быть вычислена по формулам:*

(1) $\lvert T\rvert(e) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \lvert Tv_i\rvert : \sum_{i=1}^{n} \lvert v_i\rvert \leqslant e;\ \lvert v_i\rvert \perp \lvert v_j\rvert,\ i \neq j,\ e \in E_+\right\}$;

(2) $\lvert T\rvert(e) = \lvert T\rvert(e_+) + \lvert T\rvert(e_-);\ e \in E$.

$\lhd$ Из 1.2. следует, что множество $\mathrm{maj}(T)$ фильтровано вниз. В этом случае определен оператор $S^\star$ такой, что

$$S^\star e = \inf\{Se : S \in \mathrm{maj}\, T\}.$$

При этом $S^\star = |T|$. Правую часть (1) обозначим символом S. Очевидно, что S положительный оператор. Требуется показать, что S ортогонально аддитивен и $S = |T|$. Для любого набора попарно дизъюнктных элементов $v_1, \dots, v_n \in V$ таких, что $\sum_{i=1}^n v_i \leqslant e$ можем написать

$$\sum_{i=1}^n |Tv_i| \leqslant |T|\,(\sum_{i=1}^n |v_i|) \leqslant |T|\,(e).$$

Переход к супремуму в левой части дает $Se \leqslant |T|\,(e)$. Таким образом S корректно определен и порядково ограничен. Покажем, что $S(e+f) = Se + Sf$ при $e \perp f$. Возьмем два набора попарно дизъюнктных элементов $v_1, \dots, v_m \in V$ и $u_1, \dots, u_l \in V$. Если

$$\sum_{k=1}^l |u_k| \leqslant e, \ \sum_{p=1}^m |v_p| \leqslant f.$$

То набор $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_l$ состоит из попарно диъюнктных элементов и поэтому

$$\sum_{k=1}^l |Tu_k| + \sum_{p=1}^m |Tv_p| \leqslant S(e+f).$$

Переходим к супремуму в левой части, получаем $Se + Sf \leqslant S(e+f)$. Пусть теперь $\sum_{i=1}^n |w_i| \leqslant e + f$, $|w_i| \perp |w_j|$, $i \neq j$, тогда из леммы о двойном разбиении в векторной решетке и разложимости пространства V следует существование элементов $e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_n \in E$ и $v_1, \dots, v_n; u_1, \dots, u_n \in V$ таких, что

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \ f_i \perp f_j, \ i \neq j; \quad e = \sum_{i=1}^n e_i, \ e_i \perp e_j, \ i \neq j;$$

$$w_i = u_i + v_i, \ |u_i| = f_i, \ |v_i| = e_i.$$

Отсюда используя ортогональную аддитивность оператора T и неравенство треугольника для $|\cdot|$ выводим

$$Se + Sf \geqslant \sum_{i=1}^n |Tu_i| + \sum_{i=1}^n |Tv_i| \geqslant \sum_{i=1}^n |Tw_i| \geqslant \sum_{i=1}^n |Tw_i|.$$

Двойной переход к супремуму дает $Se + Sf \geqslant S(e+f)$. Оператор S на конусе E_+ удовлетворяет неравенству $S \leqslant |T|$, но так как $|Tv| \leqslant S\,|v|$, то справедливо и обратное неравенство $|T| \leqslant S$. Таким образом $|T| = S$. Для $e \in -E_+$ положим $|T|\,(e) = |T|\,(-e)$. На все пространство E оператор S распространим по формуле $S(e) = |T|\,(e_+) + |T|\,(e_-)$. $\rhd$

1.5. В случае, когда $M_U(V,W) = U(E,F)$, мы приходим к формуле точной мажоранты, полученной в [4; лемма 3.4.]. $Se = \sup\{|T|e_0 : e_0 \leqslant e\}$, где $|T|$ — модуль оператора T. Покажем, что на E_+ операторы S и $|\!|T|\!|$ совпадают. В самом деле, пусть Se — правая часть требуемой формулы и напишем $Re = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Te_i| : \sum_{i=1}^n e_i \leqslant e\right\}(e_i \perp e_j);(i \neq j);\ (e_i \in E_+)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^n |Te_i| \leqslant \sum_{i=1}^n Se_i \leqslant Se$, переходя к супремуму получаем $|\!|T|\!|\,e \leqslant Se$. С другой стороны, так как

$$|T|e_0 = \sup\{Th - Tg; \quad h \perp g; \quad h + g = e_0\},$$

то можно написать

$$Th - Tg \leqslant Th + Tg \leqslant |Th| + |Tg| \leqslant \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Tv_i| : \sum_{i=1}^n v_i \leqslant e_0;\, v_i \in E_+\right\} \leqslant |\!|T|\!|\,e,$$

$$|T|e_0 \leqslant |\!|T|\!|\,e$$

и переходя к супремуму получаем $Se \leqslant |\!|T|\!|\,e$ и $S = |\!|T|\!|$. $\rhd$

1.6. Как доказано в [5] существует вложение $j : L_r(E,F) \to U(E,F)$. Для пространства $M(V,W)$ аналогичное вложение задается парой (i,j) такой, что: $i : M(V,W) \to M_U(V,W)$ — тождественное отображение, а $j : L_r^+(E,F) \to U_+(E,F)$ такое отображение, что $j(T)e = T|e|$.

2. Частичная разложимость мажорантной нормы

Простейшие примеры показывают, что мажорантная норма в пространстве $M_U(E,F)$ не обладает свойством разложимости. Тем не менее некоторый ослабленный аналог разложимости нормы оператора сохраняется.

2.1. Пусть π и σ порядковые проекторы в F и E соответственно. Покажем, что если S — симметричный оператор, то $\pi S\sigma$ — также симметричный осколок оператора S.

$\lhd$ Доказательство проведем в два этапа. Первый шаг: покажем, что оператор $\pi S\sigma$ — осколок оператора πS.

$$\begin{aligned}\big((\pi S - \pi S\sigma) \wedge \pi S\sigma\big)(e) &= (\pi S\sigma^\perp \wedge \pi S\sigma)(e) = \\ &= \inf\{\pi S\sigma^\perp e_1 + \pi S\sigma e_2;\ e_1 \perp e_2,\ e_1 + e_2 = e\}.\end{aligned}$$

В качестве e_1 возьмем σe, в качестве e_2 возьмем $\sigma^\perp e$. Отсюда видно, что инфимум в правой части равен нулю.

Второй шаг: покажем, что оператор πS — осколок оператора S.

$$\big((S - \pi S) \wedge \pi S\big)(e) = (\pi^\perp S \wedge \pi S)(e) = \inf\{\pi^\perp Se_1 + \pi Se_2;\ e_1 \perp e_2,\, e_1 + e_2 = e\}.$$

В одном случае $e_1 = e$, $e_2 = 0$, в другом случае $e_1 = 0$, $e_2 = e$. Тогда получаем, что инфимум в правой части равен нулю. Покажем, что $\pi S\sigma \in U_{\mathrm{sim}}$. Достаточно показать, что $S - \pi S\sigma \in U_{\mathrm{sim}}$. Но

$$S - \pi S\sigma = \pi^\perp S + \pi S\sigma^\perp.$$

Тогда замечанием, что U_{sim} является конусом, завершаем доказательство. $\rhd$

Операторы вида $\bigvee_{i=1}^{n}\pi_i S\sigma_i$, где π_i попарно дизъюнктны, σ_i произвольны будем называть *простыми осколками.* Множество таких операторов обозначим через A_S. Множество всех симметричных осколков обозначим через B_S.

Ниже будет доказан важный результат, о том что B_S совпадает с $A_S^{\uparrow\downarrow}$. Для произвольного множества $C\subset B_S$ $C^{\uparrow}=\{e\in B_S$ существует сеть e_α; $e_\alpha\in C$; $e_\alpha\uparrow e\}$. Аналогично определяем $C^{\downarrow}$.

2.2. Предварительно установим, что множество A_S является подалгеброй в B_S.

$\lhd$ Для порядковых проекторов в векторных решетках справедлива формула, установленная в [4; стр. 248]. $\pi_1(x)\wedge\pi_2(y)=\pi_1\circ\pi_2(x\wedge y)$. Возьмем порядковые проекторы в пространстве операторов: $S\sigma\mapsto\pi S\sigma$ и $S\delta\mapsto\lambda S\delta$. Тогда верна следующая формула.

$$\pi S\sigma\wedge\lambda S\delta=\pi\lambda(S\sigma\wedge S\delta).$$

Оператор $S\sigma\wedge S\delta$ обозначим через R. Ясно, что $S\sigma\delta\leqslant R$. Докажем обратное неравенство

$$Re=\inf\{S\sigma e_1+S\delta e_2:e_1+e_2=e;e_1\bot e_2\}.$$

В качестве e_1 возьмем $\sigma^{\bot}e$, а в качестве e_2 элемент σe. Отсюда вытекает неравенство: $Re\leqslant S\sigma\delta$. Таким образом,

$$\pi S\sigma\wedge\lambda S\delta=\pi\lambda S\delta\sigma.$$

Еще нам понадобится следующая формула:

$$\begin{aligned}S-\pi S\sigma&=\pi S\sigma+\pi^{\bot}S\sigma+\pi^{\bot}S\sigma^{\bot}+\pi S\sigma^{\bot}-\pi S\sigma=\\&=\pi S\sigma^{\bot}+\pi^{\bot}S\sigma^{\bot}+\pi^{\bot}S\sigma=\pi^{\bot}S\vee\pi S\sigma^{\bot}.\end{aligned}$$

Теперь можем написать

$$\bigvee_{i=1}^{n}\pi_i S\sigma_i\wedge\bigvee_{j=1}^{m}\lambda_j S\delta_j=\bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{j=1}^{m}\pi_i\lambda_j S\sigma_i\delta_j\in A_S,$$

$$\bigvee_{i=1}^{n}\pi_i S\sigma_i\vee\bigvee_{j=1}^{m}\lambda_j S\delta_j\in A_S,$$

$$(\bigvee_{i=1}^{n}\pi_i S\sigma_i)^{\star}=S-\bigvee_{i=1}^{n}\pi_i S\sigma_i=\bigwedge_{i=1}^{n}\pi_i^{\bot}S\vee\pi_i S\sigma_i\in A_S.$$

3.2. Лемма. *Пусть E — решетка с проекциями на главные компоненты, а F — K-пространство с единичным фильтром $\Re_F$ и $S,P\in U_{\rm sim}$. Если $S\bot P$, то для любых $\varepsilon>0$, $e\in E$, $\mathbf{1}\in\Re_F$ существуют полное семейство попарно дизъюнктных порядковых проекторов π_ξ $(\xi\in\Xi)$ в F и семейство (σ_ξ) $(\xi\in\Xi)$ порядковых проекторов в E, такие что справедливо:*

$$(\pi_\xi P\sigma_\xi)(e)\leqslant\varepsilon\mathbf{1};\quad\pi_\xi(S-\pi_\xi S\sigma_\xi)(e)\leqslant\varepsilon\mathbf{1}.$$

$\lhd$ Заметим, что

$$0=(P\wedge S)(e)=\inf\big\{Pe_1+Se_2;\ e_1\bot e_2,\ e_1+e_2=e\big\}.$$

Из этого соотношения следует существование полного семейства π_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в F и семейства $(e^1_\xi + e^2_\xi = e)$ $(\xi \in \Xi)$ разбиений элемента $(e^1_\xi + e^2_\xi = e)$ $(\xi \in \Xi)$ таких, что $\pi_\xi P(e^1_\xi) + \pi_\xi S(e^2_\xi) \leqslant \varepsilon \mathbf{1}$. Через σ_ξ, обозначим оператор проектирования на компоненту $\{e^1_\xi\}^{\perp\perp}$. Тогда $(\pi_\xi P \sigma_\xi)(e) = (\pi_\xi P)(e^1_\xi) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$; $\pi_\xi(S - \pi_\xi S\sigma_\xi)(e) = (\pi_\xi S)(e^2_\xi) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$. $\rhd$

2.3. Лемма. *Пусть E и F те же, что и в 3.2, $P \in U_{\mathrm{sim}}$. Если $S \in B_P$, то для любых $e \in E$, $\varepsilon > 0$, $\mathbf{1} \in \Re_F$ существуют такие полное семейство π_ξ $(\xi \in \Xi)$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в F и семейство (σ_ξ) $(\xi \in \Xi)$ порядковых проекторов в E, что справедливо соотношение:*

$$\pi_\xi|S - \pi_\xi P\sigma_\xi|(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}.$$

$\lhd$ Применим 3.2 к операторам $P - S$, S и $\frac{1}{2}\mathbf{1} \in \Re_F$. Получим

$$\pi_\xi|S - \pi_\xi P\sigma_\xi|(e) \leqslant \pi_\xi|S - \pi_\xi S\sigma_\xi|(e) + \pi_\xi|\pi_\xi S\sigma_\xi - \pi_\xi P\sigma_\xi|(e) =$$

$$= \pi_\xi(S - \pi_\xi S\sigma_\xi)(e) + \pi_\xi(P - S)\sigma_\xi(e). \ \rhd$$

Следующее утверждение характеризует все операторы из B_S.

2.4. Теорема. *Пусть E и F те же, что и в 3.2, $P \in U_{\mathrm{sim}}$ и $S \in B_P$, тогда справедливы утверждения:*

(а) *для любых $e \in E$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{1} \in \Re_F$ существует $K \in A^{\uparrow}_P$ и $|S - K|(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$;*

(б) *для любого $e \in E$, существует $R \in A^{\uparrow\downarrow}_P$ и $|S - R|(e) = 0$.*

$\lhd$ (а): По предыдущему предложению существуют полное семейство (π_ξ) $(\xi \in \Xi)$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в F и семейство порядковых проекторов (σ_ξ) $(\xi \in \Xi)$ в E такие, что $\pi_\xi|S - \pi_\xi P\sigma_\xi|(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$ $(\xi \in \Xi)$.

Множество Ω всех конечных подмножеств Ξ упорядочим по включению. Для $\omega \in \Omega$ положим $K_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} \pi_\xi P\sigma_\xi$. Сеть $(K_\omega)(\omega \in \Omega)$ возрастает. Пусть $K = \sup K_\omega$, тогда $K \in A^{\uparrow}_P$ и $\pi_\xi|S - K_\omega|(e) = \pi_\xi|S - \sum_{\omega\in\Omega}\pi_\xi P\sigma_\xi|(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$ для всех $\xi \in \Xi$ и всех $\omega > \{\xi\}$. Поэтому $\pi_\xi \,\lvert S - K_\omega\rvert\,(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$ $(\forall\xi \in \Xi)$ и $\lvert S - K\rvert\,(e) \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$.

(б): зафиксируем $\mathbf{1} \in \Re_F$ для $\varepsilon = 1/2^n$, тогда существует $K_n \in A^{\uparrow}_P$ и справедливы формулы:

$$\lvert S - K_n\rvert\,(e) \leqslant 1/2^n\mathbf{1};\ L_k = \sum_{n=k}^{\infty} K_n;$$

$$D_{k,i} = \sum_{n=k}^{k+i} K_n; \quad D_{k,i} \uparrow L_k \in A^{\uparrow}_P;$$

$$\lvert S - D_{k,i}\rvert\,(e) = \left|\sum_{k=n}^{k+i}(S - K_n)\right|(e) \leqslant \sum_{k=n}^{k+i}\lvert S - K_n\rvert\,(e) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} 1/2^n\mathbf{1} < 1/2^{k-2}\mathbf{1};$$

$$\lvert S - L_k\rvert\,(e) \leqslant 1/2^{k-2}\mathbf{1}, \quad \{L_k\}\downarrow,$$

$$R = \inf\{L_k\}; \quad R \in A^{\uparrow\downarrow}_P; \quad \lvert S - R\rvert\,(e) = 0. \ \rhd$$

2.5. Лемма. *Пусть (V, E) и (W, F) — произвольные решеточно нормированные пространства, $T \in M_U(V, W)$ и $0 \leqslant R \leqslant P \leqslant \lvert T\rvert$, P и R — симметричные осколки* *оператора* $|T|$. *Если существуют операторы* $R_T, P_T \in M_U(V,W)$ *такие, что* $|R_T| = R$, $|P_T| = P$, $|T - R_T| = |T| - R$, $|T - P_T| = |T| - P$, *то* $|P_T - R_T| = P - R$.

$\lhd$ Рассмотрим неравенство

$$|P_T - R_T| \leqslant |T - P_T| + |T - R_T| = (|T| - P) + (|T| - R)$$

и так как $(|T| - R) \wedge R = 0$, $(|T| - P) \wedge R = 0$, то $|P_T - R_T| \wedge R = 0$. В произвольном решеточно нормированном пространстве для дизъюнктных элементов w и v справедлива формула $|v + w| = |v| + |w|$. Отсюда получаем

$$|P_T - R_T| + R = |P_T - R_T + R_T| = |P_T|. \ \rhd$$

2.6. Лемма. *Пусть* (V,E), (W,F) *— произвольные решеточно нормированные пространства,* $T \in M_U(V,W)$, $S = \sum_{i=1}^{n} \pi_i |T| \sigma_i$, *где* (π_i) $(i = 1,\dots n)$ *— семейство попарно дизъюнктных порядковых проекторов в* F, *а* (σ_i) $(i = 1,\dots,n)$ *— семейство произвольных порядковых проекторов в* E. *Тогда существует оператор* $S_T \in M_U(V,W)$ *такой, что* $|S_T| = S$, $|T - S_T| = |T| - S$.

$\lhd$ Через h_1 обозначим каноническое отображение булевой алгебры $B(E)$ на базу $B(V,E)$, через h_2 каноническое отображение булевой алгебры $B(F)$ на базу $B(W,F)$. Для каждого $x \in X$ положим $S_T(x) = \sum_{i=1}^{n} h_1(\pi_i) T h_2(\sigma_i)$, где $i = 1,\dots,n$. Оператор S_T является ортогонально аддитивным, кроме того,

$$\bigl|S_T(x)\bigr| = \sum_{i=1}^{n} \bigl|h_1(\pi_i) T h_2(\sigma_i)(x)\bigr| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i \bigl|T h_2(\sigma_i)(x)\bigr| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i |T| \sigma_i(|x|) = S(|x|).$$

Следовательно, $S_T \in M_U(V,W)$ и $|S_T| \leqslant S$. Покажем, что $S \leqslant |S_T|$. Обозначим через $I_E(I_F)$ тождественный оператор в $E(F)$ и положим $\pi = I_F - \sup \pi_i$ $(i = 1,\dots,n)$. Далее имеем

$$\bigl|T(x) - S_T(x)\bigr| = \left|\sum_{i=1}^{n} h_1(\pi_i) T(x) + h_1(\pi) T(x) - \sum_{i=1}^{n} h_1(\pi_i) T h_2(\sigma_i)(x)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} h_1(\pi_i) T h_2(I_E - \sigma_i)(x) + h_1(\pi) T(x)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i |T| (I_E - \sigma_i) |x| + \pi |T| \, |x| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi_i |T| \, |x| + \pi |T| (|x|) - \sum_{i=1}^{n} \pi_i |T| \sigma_i(|x|) = (|T| - S)(|x|).$$

Таким образом, $|T - S_T| \leqslant |T| - S$. Если предположить, что $|S_T| < S$ или $|T - S_T| < |T| - S$, то учитывая дизъюнктность S и $|T - S_T|$ выводим $|T| = |T - S_T + S_T| \leqslant |T - S| + |S_T| < |T| - S + S = |T|$. Поэтому $|S_T| = S$ и $|T - S_T| = |T| - S$. $\rhd$

Следующее утверждение показывает, что симметричные осколки замкнуты относительно булевых операций.

2.7. Лемма. *Пусть оператор* S *принадлежит* $U_{\mathrm{sim}}(E,F)$, *где* E*—решетка с проекциями на главные полосы, а* F *это* K*-пространство. Тогда множество осколков* S, *принадлежащих* U_{sim} *образуют булеву подалгебру.*

$\lhd$ Супремум и инфимум двух симметричных осколков снова будет симметричным осколком в силу того, что U_{sim} решетка. Требуется установить, что и дополнение симметричного осколка также будет симметричным осколком.

$$(A_S^{\uparrow\downarrow})^{\star} = (A_S^{\star})^{\downarrow\uparrow} = (A_S)^{\downarrow\uparrow}.$$

Так как множество $(A_S)^{\downarrow\uparrow}$ состоит из симметричных операторов, то справедливо включение $(A_S)^{\downarrow\uparrow} \subset (A_S)^{\uparrow\downarrow}$. $\rhd$

2.8. Теорема. *Пусть (V, E) — решеточно нормированное пространство, а (W, F) — пространство Банаха — Канторовича и в K-пространстве F есть слабая порядковая единица. Тогда для любого $T \in M_U(V, W)$ и любых $S, P \in U_{\mathrm{sim}}$ таких, что*

$$0 \leqslant S \leqslant |T|\,,\ 0 \leqslant P \leqslant |T|\,,\ P \perp S,\ P + S = |T|$$

найдется оператор $S_T \in M_U(V, W)$ и $|T| = |S_T| + |T - S_T|\,,\ |S_T| = S,\ |T - S_T| = P$.

$\lhd$ Пусть $T \in M_U(V, W)$. Возьмем произвольный оператор $S \in A_{|T|}^{\uparrow}$ и покажем существование оператора $S_T \in M_U(V, W)$ такого, что $|S_T| = S$, $|T - S_T| = |T| - S$. По лемме 2.6 существует сеть операторов S_ξ $(\xi \in \Xi) \subset M_U(V, W)$ таких, что $\left|S_\xi\right| \in A_{|T|}$; $\left|T - S_\xi\right| = |T| - \left|S_\xi\right|$ $(\xi \in \Xi)$ и $(\left|S_\xi\right|) \uparrow S$, где $(\xi \in \Xi)$. Для фиксированного $x \in V$ рассмотрим сеть $(S_\xi x)(\xi \in \Xi)$. Если $\alpha, \beta \leqslant \lambda$, то в силу леммы 2.4 справедливы неравенства

$$\left|S_\beta x - S_\alpha x\right| \leqslant \left|S_\beta - S_\alpha\right|(|x|) \leqslant (\left|S_\lambda - S_\beta\right| + |S_\lambda - S_\alpha|)(|x|) =$$

$$= (|S_\lambda| - \left|S_\beta\right| + |S_\lambda| - |S_\alpha|)(|x|) \leqslant (2S - \left|S_\beta\right| - |S_\alpha|)(|x|).$$

Таким образом, сеть $(S_\xi x)(\xi \in \Xi)$ является (o)-фундаментальной. Так как (W, F) (o)-полно, полагаем $S_T(x) = (o)\text{-}\lim S_\xi x$ $(x \in X)$. Оператор S_T ортогонально аддитивен и для каждого $x \in V$ справедливы неравенства

$$\left|S_T(x)\right| = \left|(o)\text{-}\lim S_\xi x)\right| = \circ - \lim\left|S_\xi(x)\right| \leqslant (o)\text{-}\lim\left|S_\xi\right|(|x|) = S(|x|);$$

$$|T - S_T|(|x|) = (o)\text{-}\lim\left|(T - S_\xi)\right|(|x|) = (o)\text{-}\lim(|T| - \left|S_\xi\right|)(|x|).$$

Отсюда имеем $|S_T| = S$, $|T - S_T| = |T| - S = P$. Общий случай, когда $S \in B_{|T|}$ получается повторением приведенных выше рассуждений. $\rhd$

3. Вполне аддитивные и латерально непрерывные операторы

В настоящем пункте рассмотрим классы вполне аддитивных и дизъюнктно непрерывных операторов. Оператор $T \in M_U(E, F)$ называется *вполне аддитивным* (*вполне σ-аддитивным*), если выполняется равенство $T(\sum w_\xi) = \sum T w_\xi$ $\xi \in \Xi$, $(T(\sum_{i=1}^{\infty} w_i) = \sum_{i=1}^{\infty} T w_i)$, где w_ξ — семейство попарно дизъюнктных элементов.

3.1. Теорема. *Оператор T вполне аддитивен тогда и только тогда, когда вполне аддитивна его точная мажоранта.*

$\lhd$ Пусть $|T|$ — вполне аддитивный оператор, $w = \sum w_\xi$, Θ — конечное подмножество Ξ. Тогда можно написать

$$w = \sum_{\xi \in \Theta} w_\xi + w_\Theta;\ \left|Tw - \sum_{\xi \in \Xi} T w_\xi\right| = |T w_\Theta| \leqslant |T|\,|w_\Theta|\,.$$

Пусть теперь T — вполне аддитивный оператор. Требуется показать, что $|T|(\sum e_\xi) = \sum |T| e_\xi$. Пусть $e = \sum e_\xi$, а π_ξ — проектор на компоненту $\{e_\xi\}$. Достаточно установить неравенство $|T| e \leqslant \sum |T| e_\xi$. Напишем цепочку равенств:

$$\sum_{i=1}^{n} |w| \leqslant e = \sum e_\xi; w_{i\xi} = \pi_\xi w_i; \sum_{i=1}^{n} \left|w_{i\xi}\right| = \pi_\xi e = e_\xi.$$

Отсюда выводим

$$\sum_{i=1}^{n} |Tw_i| = \pi_\xi \sum_{i=1}^{n} \left|Tw_{i\xi}\right| \leqslant \pi_\xi |T| e_\xi \leqslant |T| e_\xi;$$

$$\sum_{i=1}^{n} |Tw_i| \leqslant \sum_{\xi \in \Xi} |T| e_\xi.$$

Переходя в левой части к супремуму по всем конечным разбиениям, получаем требуемое. $\rhd$

3.2. Рассмотрим теперь так называемые латерально непрерывные операторы. Сеть (v_α) в РНП (V, E) называется *латерально сходящейся* к v, если $v = \lim_\alpha (v_\alpha)$ и, кроме того, $(v_\alpha - v_\beta) \perp v_\beta \, \forall \alpha \geqslant \beta$. В дальнейшем для сети (v_α) латерально сходящейся к v будем писать $v = (l)\text{-}\lim_\alpha (v_\alpha)$. Оператор $T : (V) \to (W)$ называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если из $v = (l)\text{-}\lim_\alpha (v_\alpha) (v = (l)\text{-}\lim_n v_n)$ следует $Tv = (o)\text{-}\lim_\alpha (Tv_\alpha) (Tv = (o)\text{-}\lim_n Tv_n)$.

3.3. Теорема. *Оператор $T \in M_U(V, W)$ латерально непрерывен тогда и только тогда, когда латерально непрерывна его точная мажоранта.*

$\lhd$ Пусть $|T|$ — латерально непрерывный оператор. Рассмотрим сеть $(v_\alpha) \in V$, такую что $v = (l)\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Тогда сеть e_α латерально сходится к e, где $e_\alpha = |v_\alpha|$, $e = |v|$. Действительно, $e - e_\alpha = |v| - |v_\alpha| \leqslant |v - v_\alpha|$, таким образом $e = (o)\text{-}\lim_\alpha e_\alpha$. Кроме того,

$$e_\alpha - e_\beta = |v_\alpha| - \left|v_\beta\right| \leqslant \left|v_\alpha - v_\beta\right| \Rightarrow (e_\alpha - e_\beta) \perp e_\beta; \; Tv = T(v + v_\alpha - v_\alpha);$$

$$|Tv - Tv_\alpha| = \left|T(v - v_\alpha)\right| \leqslant |T| \, |v - v_\alpha| = |T| (e - e_\alpha) = |T| e - |T| e_\alpha.$$

Проведем доказательство в другую сторону. Пусть T латерально непрерывный оператор и $e = (l)\text{-}\lim_\alpha e_\alpha$, где $e, e_\alpha \in E_{0+}$. Тогда

$$Re = \sup_\alpha \sup \{ \sum_{k=1}^{n} |Tv_k| : \sum_{k=1}^{n} |v_k| = e_\alpha \}, \; Re \leqslant |T| e.$$

С другой стороны, пусть $\sum_{k=1}^{n} |v_k| = e$, $|v_i| \perp \left|v_j\right|$, $i \neq j$. В силу разложимости найдутся z_k^α и w_k^α такие, что

$$v_k = z_k^\alpha + w_k^\alpha; \quad \sum_{k=1}^{n} |w_k^\alpha| = e - e_\alpha; \quad \sum_{k=1}^{n} |z_k^\alpha| = e_\alpha.$$

Тогда z_k^α латерально сходится к v_k и

$$\sum_{k=1}^{n} |Tv_k| = (o)\text{-}\lim_{\alpha} \sum_{k=1}^{n} |Tz_k^\alpha|;$$

$$\sum_{k=1}^{n} |Tz_k^\alpha| \leqslant \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |Tg_k| : \sum_{k=1}^{n} |g_k| = e_\alpha\right\};$$

$$\sum_{k=1}^{n} |Tv_k| = (o)\text{-}\lim_{\alpha} \sum_{k=1}^{n} |Tz_k^\alpha| \leqslant \sup_{\alpha}\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |Tg_k| : \sum_{k=1}^{n} |v_k| = e_\alpha\right\}.$$

Переходя к супремуму в левой части получим $|T|(e) = (o)\text{-}\lim_\alpha |T|(e_\alpha)$. $\triangleright$

3.4. Покажем, что оператор вполне σ-аддитивен тогда и только тогда, когда он латерально σ-непрерывен. Пусть оператор T — латерально σ-непрерывен. Рассмотрим ограниченное семейство попарно дизъюнктных элементов (x_n). Введем новую последовательность $y_n := \sum_{i=1}^{n} x_n$. Ясно, что (y_n) латерально сходится к $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, тогда $Ty = (o)\text{-}\lim_n Ty_n$ и оператор вполне аддитивен. Пусть теперь T вполне аддитивен. Рассмотрим последовательность (x_n) латерально сходящуюся к x. С каждым x_n свяжем конечное множество попарно дизъюнктных элементов $\{x_1, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}$. Ясно, что $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - x_{n-1}$. Воспользовавшись полной аддитивностью, получим $Tx = (o)\text{-}\lim_n Tx_n$. Оператор $T : V \to V$ называется *коммутирующим с проектором*, если равенство $T \circ \pi = \pi \circ T$ справедливо для любого порядкового проектора $\pi : V \to V$ такого, что $\pi(V) \subset V$.

3.5. Теорема. Пусть (V, E) и (W, F) — пространства Банаха — Канторовича, E будет подрешеткой в F и V — подпространство W. Если оператор $T : (V, E) \to (W, F)$ — коммутирует с проектором, то T — ортогонально аддитивный, латерально непрерывный оператор.

$\triangleleft$ Пусть элементы $v, w \in (W, F)$ дизъюнктны. Если π и σ — проекторы на компоненты v^{dd} и w^{dd} соответственно. Тогда $\pi(w) = 0$ и $\sigma(v) = 0$ и справедлива формула

$$T(v + w) = T(\pi + \sigma)(v + w) = (\pi + \sigma)T(v + w) = T\pi(v + w) + T\sigma(v + w) = Tv + Tw.$$

Таким образом T ортогонально аддитивен. Покажем, что T — латерально непрерывен. Пусть сеть v_α латерально сходится к v. Через π_α обозначим проектор на компоненту v_α^{dd}. Тогда $\pi_\alpha v = v_\alpha$ и сеть π_α возрастает. Через π обозначим проектор на компоненту v^{dd}. В этом случае $\pi = \sup_\alpha \pi_\alpha$. Так как T — оператор, коммутирующий с проектором, то $\pi T(v) = T(v)$ и $\pi_\alpha T(v) = T(v_\alpha)$ для любого α. А так как $(\pi - \pi_\alpha) \downarrow 0$, то получаем

$$|Tv - Tv_\alpha| = |\pi Tv - \pi_\alpha Tv| = (\pi - \pi_\alpha)|Tv| \downarrow 0. \ \triangleright$$

3.6. Теорема. *Множество вполне аддитивных и латерально непрерывных операторов образуют полосы в пространстве $M_U(V, W)$. Множества σ-аддитивных и латерально σ-непрерывных операторов совпадают и образуют полосу в пространстве $M_U(V, W)$.*

$\triangleleft$ Это следует из доказанных выше утверждений 2.3 и 2.4, а также [4; предложения 3.7, 3.8] и [3; предложения 1.1.5 (1-3)]. $\triangleright$

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. Линейные операторы согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.
4. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* The components of a positive operator // Math. Z.—1987.—V. 184.—P. 245–257.
5. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—V. 35 (4).—P. 329–353.
6. *Segura de Leon S.* Bukhvalov type characterizations of Uryson operators // Studia Math.—1991.—V. 99.—P. 199–220.