Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 1999, Том 1, Выпуск 3

Юрию Григорьевичу Решетняку
к его семидесятилетию

УДК **517.98**

О СТРУКТУРЕ AJW-АЛГЕБР ТИПА I_2

А. Г. Кусраев

Введение

Цель настоящей статьи — дать полное описание структуры AJW-алгебр типа I_2 и, в частности, указать кардинальнозначные инварианты, характеризующие любую такую алгебру с точностью до изоморфизма. При этом используются комбинированные методы, развитые в [1, 2].

AJW-алгебры представляют собой вещественные неассоциативные аналоги AW^*-алгебр. Впервые о них упомянуто в 1965 году в работе [3], однако до сих пор не построена удовлетворительная теория AJW-алгебр. В [4] исследован йорданов аналог условия Бэра для AJW-алгебр, в [2] рассмотрен класс AJW-алгебр, вложимых в AW^*-алгебру типа I. Ряд актуальных задач этой теории решен в [5, 6].

В §1 настоящей статьи содержатся необходимые определения и вспомогательные факты. В §2 рассмотрены два важных примера: абстрактный спин-фактор и алгебра непрерывных вектор-функций со значениями в абстрактном спин-факторе. В §3 уточняются для рассматриваемого случая результаты из [2] о булевозначной реализации JB-алгебр. В §4 устанавливается, что всякая AJW-алгебра типа I_2 строится из абстрактных спин-факторов путем непрерывного или измеримого [[размазывания]] и операции прямой суммы. Выясняются условия, когда такое представление единственно.

Необходимые сведения из теории JB-алгебр имеются в [7, 8, 9], см. также [10]. Относительно булевозначного анализа см. [11].

§ 1. Предварительные сведения

Здесь напомним некоторые определения и необходимые факты о JB-алгебрах.

1.1. Вещественное банахово пространство A называют *JB-алгеброй*, если оно является йордановой алгеброй с единицей 1 и норма удовлетворяет следующим трем условиям:

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad (x, y \in A),$$
$$\|x^2\| = \|x\|^2 \quad (x \in A),$$
$$\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\| \quad (x, y \in A).$$

Если сверх сказанного A является двойственным банаховым пространством, то A именуют *JBW-алгеброй*. Произвольная JB-алгебра является JBW-алгеброй, если она монотонно полна и имеет разделяющее множество нормальных состояний. Множество всех идемпотентов алгебры A, называемых также *проекторами*, будем обозначать символом $\mathfrak{P}(A)$.

Подалгебра A_0 JB-алгебры A называется *сильно ассоциативной*, если $(xa)y = x(ay)$ для всех $x, y \in A_0$ и $a \in A$. Говорят, что множество $M \subset A$ *совместно*, или что элементы этого множества совместны, если подалгебра порожденная этим множеством сильно ассоциативна. Пересечение всех максимальных сильно ассоциативных подалгебр именуют *центром* алгебры и обозначают символом $\mathcal{Z}(A)$. Элементы множества $\mathfrak{P}_c(A) := \mathfrak{P}(A) \cap \mathcal{Z}(A)$ называют *центральными проекторами*.

1.2. Между классами JB-алгебр и JBW-алгебр существует интересный класс AJW-алгебр, впервые упомянутый в работе Д. М. Топпинга [3].

Под *AJW-алгеброй* понимается JB-алгебра A, удовлетворяющая двум условиям:

$(\mathcal{F}_1(A))$ в частично упорядоченном множестве проекторов $\mathfrak{P}(A)$ любое множество попарно ортогональных проекторов имеет точную верхнюю границу в этом множестве;

$(\mathcal{F}_2(A))$ любая максимальная сильно ассоциативная подалгебра порождается своими проекторами (т. е. совпадает с наименьшей замкнутой подалгеброй, содержащей ее проекторы).

Из этого определения видно, что максимальная сильно ассоциативная подалгебра AJW-алгебры является порядково полной векторной решеткой ограниченных элементов, следовательно, она изоморфна алгебре и решетке $C(Q)$ для некоторого стоуновского компакта Q.

1.3. В [4, 6] установлено, что определение AJW-алгебры равносильно условию типа Бэра, где используются различные йордановы аналоги аннуляторов. В частности, имеет место следующий факт.

Теорема. *Для произвольной JB-алгебры равносильны условия:*

(1) A является AJW-алгеброй;

(2) для непустого подмножества $M \subset A$ существует проектор $p \in \mathfrak{P}(A)$ такой, что $M^\perp = U_p(A)$, где $M^\perp := \{a \in A : \ (\forall x \in M)\, U_a x = 0\}$.

1.4. Упорядоченное множество $\mathfrak{P}(A)$ проекторов AJW-алгебры является полной ортомодулярной решеткой, а множество центральных проекторов $\mathfrak{P}_c(A)$ — полной булевой алгеброй. Дополнение элемента e в решетке $\mathfrak{P}(A)$ обозначаем через $e^* := 1 - e$. *Центральным носителем* $c(p)$ проектора $p \in \mathfrak{P}(A)$ называют наименьший центральный проектор, мажорирующий p, т. е. $c(p) := \bigwedge\{e \in \mathfrak{P}_c(A) : \ p \leqslant c\}$. Проектор p именуют *абелевым*, если $U_p(A)$ — ассоциативная подалгебра. Если существует абелев проектор $p \in A$, для которого $c(p) = 1$, то говорят, что A *имеет тип I*. Допустим, что существуют два ортогональных абелевых проектора $p, q \in \mathfrak{P}(A)$ такие, что $p + q = 1$, $c(p) = c(q) = 1$. Тогда A называют *алгеброй типа I_2*. Если AJW-алгебра типа I_2 является фактором, то ее принято называть *спин-фактором*. Следующий результат также установлен в [4, 5].

1.5. Теорема. *Всякий AJW-фактор типа I является JBW-фактором.*

1.6. *Симметрией* в JB-алгебре A называют такой элемент $s \in A$, что $s^2 = 1$. Говорят, что симметрии s и s' *ортогональны*, если $ss' = 0$. Симметрию s называют *собственной*, если для любого центрального проектора e из равенства $es = \pm e$ следует

$e = 0$. Ортогональное семейство собственных симметрий $(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset A$ называют *центрально максимальным*, если для каждого ненулевого центрального проектора $e \in A$ семейство $(es_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ является максимальным ортогональным семейством собственных симметрий в eA. Будем называть что алгебру A *$s(\lambda)$-однородным*, если в ней существует центрально максимальное ортогональное семейство собственных симметрий мощности λ и просто *s-однородным*, если она $s(\lambda)$-однородна для некоторого кардинала λ. Под мощностью произвольного множества M понимаем кардинал λ, биективный с M, и пишем в этой ситуации $\lambda := |M| := \mathrm{card}\,(M)$. Ординалы и кардиналы понимаются в смысле Дж. фон Неймана, см. [11].

1.7. Рассмотрим две JB-алгебры A и B. Линейный оператор $\phi: \ A \to B$ будет йордановым гомоморфизмом (т. е. гомоморфизмом алгебр) лишь в том случае, если $\phi(a^2) = \phi(a)^2$ $(a \in A)$. Если $\phi(1) = 1$ и ϕ инъективен, то $\quad \|a\| = \|\phi(a)\| \quad (a \in A)$. В частности, йорданов изоморфизм JB-алгебр является изометрией. Если $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, изоморфная правильным подалгебрам в $\mathfrak{P}_c(A)$ и $\mathfrak{P}_c(B)$, то будем считать, допуская вольность, что $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}_c(A)$ и $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}_c(B)$. В этой ситуации гомоморфизм (изоморфизм) будем называть *$\mathbb{B}$-гомоморфизмом* (*$\mathbb{B}$-изоморфизмом*), если $b\phi(a) = \phi(ba)$ $(a \in A,\ b \in \mathbb{B})$.

§ 2. Два примера

Здесь рассматриваются два примера: абстрактный спин-фактор и JB-алгебра непрерывных вектор-функций, принимающих значения в абстрактном спин-факторе.

2.1. Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Символом $\mathcal{J}(H)$ обозначим тройку $(\mathbb{R}\otimes H, \circ, \|\cdot\|)$, где $\circ$ — бинарная операция и $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}\otimes H$, определяемые следующими равенствами

$$(s,k)\circ(t,h) := (st + \langle k,h\rangle, sh + tk) \quad (s,t \in \mathbb{R};\ k,h \in H),$$
$$\|(t,h)\| := |t| + (\langle h,h\rangle)^{\frac{1}{2}} \quad (t \in \mathbb{R},\ h \in H).$$

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{J}(H)$ есть JB-алгебра с единицей $\mathbf{1} := (1,0)$. Так как $\mathbb{R}\otimes H$ — рефлексивное банахово пространство, то $\mathcal{J}(H)$ также будет JBW-алгеброй. Произвольный проектор в $\mathcal{J}(H)$ имеет вид $(1,h)/2$, где $h \in H$, $\langle h,h\rangle = 1$. Два проектора $(1,h)/2$ и $(1,k)/2$ ортогональны в том и только в том случае, если $h = -k$. Каждый проектор является минимальным (значит, и абелевым), а максимальное число попарно ортогональных проекторов равно двум. Центр алгебры совпадает с $\mathbb{R}\cdot e$. Из всего сказанного следует, что $CalL(H)$ является AJW-фактором типа I_2. Эту алгебру принято называть *абстрактным спин-фактором.*

Любая симметрия в $\mathcal{J}(H)$, отличная от $\pm\mathbf{1}$, имеет вид $(0,h)$, где $h \in H$ и $\langle h,h\rangle = 1$. Симметрии $(0,h)$ и $(0,k)$ ортогональны (т. е. $(0,h)\circ(0,k) = 0$) лишь в том случае, когда $\langle h,k\rangle = 0$. Легко видеть, что алгебра $\mathcal{J}(H)$ будет $s(\lambda)$-однородной, где λ — размерность гильбертова пространства H. Отметим также, что положительный конус $\mathcal{J}(H)_+$ состоит из таких элементов (t,h), что $\sqrt{\langle h,h\rangle} \leqslant t$.

2.2. Теорема [5]. *Любой AJW-фактор типа I_2 изоморфен некоторому абстрактному спин-фактору.*

$\lhd$ Доказательство следует из 1.5. и предложения 7.1. из [8]. Прямое доказательство проводится так же, как и в [8, предложение 7.1]. $\rhd$

2.3. Рассмотрим экстремальный компакт Q и вещественное гильбертово пространство H. Напомним определение пространства $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ из [1]. Пусть $\mathcal{F}$ — множество ограниченных непрерывных вектор-функций $u : \mathrm{dom}\,(u) \to \mathcal{J}(H)$, где $\mathrm{dom}\,(u)$ — котощее подмножество компакта Q. Множество именуют *котощим*, если оно имеет тощее дополнение. Вектор-функции $u, v \in \mathcal{F}$ считаем эквивалентными и пишем $u \sim v$, если $u(t) = v(t)$ при всех $t \in \mathrm{dom}\,(u) \cap \mathrm{dom}\,(v)$. По определению полагаем $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H)) := \mathcal{F}/\sim$, и на фактор-множестве рассматриваем естественную структуру вещественного векторного пространства. Если $x \in C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$, то существует единственная функция $|x| \in C(Q)$, которая продолжает на все Q непрерывную функцию $q \mapsto \|u(q)\|$ $(q \in \mathrm{dom}\,(u))$ для каждого представителя $u \in x$. Положим

$$\|x\| := \|\,|x|\,\|_\infty := \sup\{|x|\,(q) : q \in Q\}.$$

Нетрудно проверить, что $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ — банахово пространство и одновременно o-полное решеточно нормированное пространство относительно векторной нормы (см. [12]).

Введем теперь в $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ структуру йордановой алгебры. Возьмем $x, y \in C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$, $u \in x$ и $v \in y$. Вектор-функция $w : q \mapsto u(q) \circ v(q)$ $(q \in \mathrm{dom}\,(u) \cap \mathrm{dom}\,(v))$ непрерывна, ограничена и определена на котощем множестве, значит $w \in \mathcal{F}$. Пусть $x \circ y$ — класс эквивалентности вектор-функции w. Непосредственно из определений легко усматривается, что $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ — JB-алгебра с единицей $\mathbb{1} : q \mapsto \mathbf{1}$ $(q \in Q)$. Центр алгебры $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ изоморфен $C(Q)$ и определяется вектор-функциями со значениями в $\mathbb{R} \cdot \mathbf{1}$.

2.4. Выясним вид проекторов и симметрий в алгебре $C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$. Если $x \in C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$, то любая вектор-функция $u \in x$ имеет вид $u = (r, h)$, где $r \in C(Q)$, а h — непрерывное отображение из котощего множества $\mathrm{dom}\,(h) \subset Q$ в H.

Элемент $x \in C_{\#}(Q, \mathcal{J}(H))$ является проектором в том и только в том случае, если существует разбиение Q на три открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_{\frac{1}{2}}, Q_1$ такие, что $r(t) = i$ при $t \in Q_i$ $(i = 0, \frac{1}{2}, 1)$, $h(t) = 0$ при $t \in (Q_0 \cup Q_1) \cap \mathrm{dom}\,(h)$ и $\langle h(t), h(t) \rangle = \frac{1}{2}$ при $t \in Q_{\frac{1}{2}} \cap \mathrm{dom}\,(h)$. Проектор будет центральным, если $Q_{\frac{1}{2}} = \varnothing$.

В самом деле, равенство $x \circ x = x$ означает, что для всех $t \in \mathrm{dom}\,(h)$ совместна система условий:

$$2r(t)h(t) = h(t), \quad r^2(t) + \langle h(t), h(t) \rangle = r(t) \quad (t \in \mathrm{dom}\,(h)).$$

Тем самым, либо $h(t) \neq 0$, и тогда из первого условия вытекает $r(t) = \frac{1}{2}$, а из второго условия следует $\langle h(t), h(t) \rangle = \frac{1}{2}$; либо $h(t) = 0$, и в этом случае из второго условия видно, что $r^2(t) = r(t)$. Значит непрерывная функция r принимает три значения $i = 0, \frac{1}{2}, 1$, поэтому $Q_i := r^{-1}(i)$ — открыто-замкнутое множество, причем $Q = Q_0 \cup Q_{\frac{1}{2}} \cup Q_1$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что если x, r и h те же, что и выше, то x будет симметрией в том и только в том случае, когда существует разбиение Q на три открыто-замкнутых множества Q_0, Q_1 и Q_{-1} такие что $(r, h)(t) = (0, h(t)), \langle h(t), h(t) \rangle = 1$ при $t \in Q_0 \cap \mathrm{dom}\,(h)$, $(r, h)(t) = (1, 0)$ при $t \in Q_1 \cap \mathrm{dom}\,(h)$ и $(r, h)(t) = (-1, 0)$ при $t \in Q_{-1} \cap \mathrm{dom}\,(h)$. Симметрия x будет собственной, если $Q_1 = Q_{-1} = \varnothing$.

2.5. Теорема. *Если λ — размерность гильбертова пространства H, то $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ — $s(\lambda)$-однородная AJW-алгебра типа I_2.*

$\lhd$ Тот факт, что $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ является AJW-алгеброй выводится ниже посредством булевозначной реализации (см. 3.5.). Прямое доказательство несложно, но довольно громоздко, поэтому оно не приводится. Пусть $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис в H. Для каждого $e \in \mathcal{E}$ обозначим символом s_e постоянное отображение $q \mapsto (0,e)$ $(q \in Q)$. Тогда $(s_e)_{e\in\mathcal{E}}$ — семейство попарно ортогональных собственных симметрий в $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$. Допустим, что существует собственная симметрия $s \in C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$, ортогональная всем s_e. Тогда любой представитель $u \in s$ имеет представление $u(t) = (0,h(t))$ $t \in \mathrm{dom}\,(h)$, где $\langle h(t),h(t)\rangle = 1$ и $\mathrm{dom}\,(h)$ — котощее множество в Q. Так как $s \circ s_e = 0$, то $h(t) \circ e = 0$ для всех $e \in \mathcal{E}$, следовательно, $h(t) = 0$. Это противоречие показывает, что семейство $(s_e)_{e\in\mathcal{E}}$ максимально. Если b — центральный проектор, то вектор-функция $u \in b$ равна $\mathbf{1}$ на некотором открыто-замкнутом множестве Q_1 и равна нулю на $Q \setminus Q_1$. Применив проведенные выше рассуждения к алгебре $b \circ C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ видим, что $(b \circ s_e)_{e\in\mathcal{E}}$ — максимальное ортогональное семейство собственных симметрий в $b \circ C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$. Так как $\mathrm{card}\,(\mathcal{E}) = \lambda$, то получаем $s(\lambda)$-однородность алгебры $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$. $\rhd$

2.6. Как отмечалось выше $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ является пространством Банаха — Канторовича относительно нормы $|\!\cdot\!|$ (см. [12]). Для множества $M \subset C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ обозначим символом $d(M)$ множество элементов y, представимых в виде $y = \sum b_\xi x_\xi$, где (b_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре центральных проекторов, а (x_ξ) — ограниченное семейство в M. Пусть $r(M)$ обозначает множество всех r-пределов $y = r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(|y - x_n| \leqslant \lambda_n e,\ e \in C(Q),\ \lambda_n \to 0)$ последовательности из M.

Алгебраическое тензорное произведение $C(Q) \otimes \mathcal{J}(H)$ отождествим с подпространством в $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ следующим образом: если $z = f_1 \otimes u_1 + \dots + f_m \otimes u_m$ для некоторых $f_1,\dots,f_m \in C(Q)$ и $u_1,\dots,u_m \in \mathcal{J}(H)$, то z сопоставим вектор функцию

$$\bar{z} : t \mapsto f_1(t)u_1 + \dots + f_m(t)u_m \in \mathcal{J}(H) \quad (t \in Q).$$

Введем еще одно множество вектор-функций. Пусть (Q_ξ) — разбиение единицы в булевой алгебре открыто-замкнутых множеств компакта Q и (u_ξ) — ограниченное семейство элементов в $\mathcal{J}(H)$. Тогда можно определить вектор-функцию f условиями: $\mathrm{dom}\,(f) := \bigcup Q_\xi$ и $f(t) = u_\xi$ при $t \in Q_\xi$. Ясно, что $f \in C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$. Множество таких f обозначим символом $\mathrm{St}_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$. Если в этом определении убрать предположение об ограниченности семейства (u_ξ), то полученное множество обозначим через $\mathrm{St}\,(Q,\mathcal{J}(H))$.

2.7. Теорема. *Имеют место следующие равенства:*

$$C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H)) = r(\mathrm{St}_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))) = rd(C(Q) \otimes \mathcal{J}(H)).$$

$\lhd$ Очевидно, что $\mathrm{St}\,(Q,\mathcal{J}(H)) \subset d(C(Q) \otimes \mathcal{J}(H))$, поэтому достаточно установить первое равенство. Оно вытекает из соотношения $C_\infty(Q,\mathcal{J}(H)) = r(\mathrm{St}\,(Q,\mathcal{J}(H))$, доказательство которого содержится в [11, теорема 5.4.10]. $\rhd$

2.8. Так как по определению $\mathcal{J}(H) = \mathbb{R} \otimes H$, то $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ изоморфна $C(Q) \otimes C_{\#}(Q,H)$. Из 2.4 видно, что если (s_α) — центрально максимальное семейство собственных симметрий в $C_{\#}(Q,\mathcal{J}(H))$ и $s_\alpha = (0,h_\alpha(\cdot))$, то $(h_\alpha(\cdot))$ — ортонормированный базис $C(Q)$ — модуля $C_{\#}(Q,H)$. Если $\bar{H}$ — комплексификация гильбертова пространства H, то $C_{\#}(Q,\bar{H})$ — AW^*-модуль, являющийся комплексификацией

$C_\#(Q,H)$. Таким образом, алгебра $C_\#(Q,\mathcal{J}(H))$ будет $s(\lambda)$-однородной в том и только в том случае, если AW^* — модуль $C_\#(Q,H)$ является λ-однородным (см.[1, §2]).

§ 3. Булевозначная реализация AJW-алгебр

Общий факт о булевозначной реализации JB-алгебр установлен в [2]. Здесь приводятся некоторые уточнения для случая AJW-алгебр.

3.1. Пусть A — некоторая AJW-алгебра, а $\mathbb{B}$ — булева алгебра ее центральных проекторов. Тогда A является $\mathbb{B}$-JB-алгеброй в следующем смысле: для любого разбиения единицы $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{B}$ и ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в A существует и притом единственный элемент $x\in A$, для которого $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ при всех $\xi\in\Xi$. (В определении $\mathbb{B}$-JB-алгебры из [2] необходимое условие ограниченности семейства (x_ξ) пропущено).

В самом деле, семейство $(b_\xi x_\xi)$ состоит из попарно совместных элементов, следовательно, оно содержится в максимальной сильно ассоциативной подалгебре A_0 с единицей. Но так как A_0 является порядково полной векторной решеткой, а семейство $(b_\xi x_\xi)$ порядково ограничено в A_0, то в A_0 существует элемент $x := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$. Очевидно, что $b_\xi x = b_\xi x_\xi$ для всех ξ.

Таким образом к AJW-алгебре применима реализационная теорема 3.1 из [2]. Однако здесь возможны некоторые уточнения.

3.2. Теорема. *Ограниченный спуск A AJW-алгебры $\mathcal{A}\in V^{(\mathbb{B})}$ является AJW-алгеброй, причем $\mathfrak{P}_c(A)$ содержит правильную подалгебру изоморфную $\mathbb{B}$. Наоборот, если A — некоторая AJW-алгебра и $\mathfrak{P}_c(A)$ содержит правильную подалгебру, изоморфную $\mathbb{B}$, то в модели $V^{(\mathbb{B})}$ существует единственная с точностью до изоморфизма AJW-алгебра $\mathcal{A}$, ограниченный спуск которой $\mathbb{B}$-изоморфен A. При этом, $\mathcal{A}$ является AJW-фактором внутри $V^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{B}=\mathfrak{P}_c(A)$.*

$\lhd$ В [2; теорема 3.1] установлена, что сформулированная теорема справедлива с заменой AJW-алгебры $\mathcal{A}$ на JB-алгебру, а AJW-алгебры A на $\mathbb{B}$-JB-алгебру. Следовательно, нужно лишь доказать, что $\mathbb{B}$-JB-алгебра A будет AJW-алгеброй в том и только в том случае, если ее булевозначная реализация $\mathcal{A}$ является AJW-алгеброй. Другими словами, нужно обосновать следующую эквивалентность (см. определение 1.2):

$$\mathcal{F}_1(A)\,\&\,\mathcal{F}_2(A) \leftrightarrow [\![\,\mathcal{F}_1(\mathcal{A})\,]\!]=1\,\&\,[\![\,\mathcal{F}_2(\mathcal{A})\,]\!]=1.$$

(1) Вначале установить, что $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}) \leftrightarrow [\![\,\mathcal{F}_1(\mathcal{A})\,]\!]=1$. Потребуется следующее вспомогательное равенство $\mathfrak{P}(\mathcal{A}){\downarrow}=\mathfrak{P}(A)$. Если e — проектор в A, т. е. $[\![\, e\in\mathfrak{P}(\mathcal{A})\,]\!]=1$, то по определению $[\![\, e\in\mathcal{A}\,]\!]=[\![\, e^2=e\,]\!]=1$. Тем самым, $e\in\mathcal{A}$ и $e^2=e$. Так как $[\![\,\|e\|=1\,]\!]=1$, то $|e|=1$, поэтому $e\in A$ и $e\in\mathfrak{P}(A)$. Итак $\mathfrak{P}(\mathcal{A}){\downarrow}\subset\mathfrak{P}(A)$. Обратное включение очевидно.

Возьмем теперь множество попарно ортогональных проекторов $\mathcal{E}\subset\mathfrak{P}(\mathcal{A})$ и пусть $E:=\mathcal{E}{\downarrow}$. Из сказанного вытекает, что $E\subset\mathfrak{P}(A)$. Тот факт, что $\mathcal{E}$ состоит из попарно ортогональных элементов, записывается в виде

$$[\![\,(\forall e\in\mathfrak{P}(\mathcal{A}))\,(\forall c\in\mathfrak{P}(\mathcal{A}))\ (e\neq c\to ec=0)\,]\!]=1.$$

После раскрытия булевых оценок истинности для кванторов, с учетом сказанного выше приходим к следующему утверждению: для любых $e,c\in\mathfrak{P}(A)$ и проектора $b:=\bigvee\{b\in\mathbb{B}: be=bc\}$ выполняется $b^*ec=0$. Как видно, элементы E не являются, вообще говоря, попарно ортогональными и нельзя воспользоваться справедливостью $\mathcal{F}_1(A)$. Необходимо подправить E, заменив его новым множеством E'. Если

$\gamma := \mathrm{card}\,(E)$, то элементы E можно занумеровать кардиналами из γ, т. е. имеет место представление $E = (e_\beta)_{\beta\in\gamma}$. Положим $e'_1 := e_1$ и

$$e'_\alpha := b^*_\alpha e_\alpha, \quad b_\alpha := \bigvee_{\beta<\alpha} [\![\, e_\alpha = e_\beta \,]\!] \quad (1 < \alpha < \gamma).$$

Если $d_{\alpha\beta} := [\![\, e_\alpha = e_\beta \,]\!]$, то в силу отмеченного выше свойства множества $\mathcal{E}$ будет $d_{\alpha\beta}e_\alpha e_\beta = 0$. Используя это обстоятельство и определение e'_α, при $\beta < \alpha$ выводим:

$$e'_\alpha e'_\beta = b^*_\alpha e_\alpha b^*_\beta e_\beta = \left(\bigvee_{\nu<\alpha} d_{\alpha\nu}\right)^* e_\alpha b^*_\beta e_\beta = \bigwedge_{\nu<\alpha} d^*_{\alpha\nu} e_\alpha e_\beta b^*_\beta \leqslant d^*_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta = 0.$$

Таким образом, множество $E' := (e'_\alpha)_{\alpha\in\gamma}$ состоит из попарно ортогональных проекторов. Согласно нашему предложению о справедливости $\mathcal{F}_1(A)$ для каждого $\alpha \in \gamma$ существует $e''_\alpha := \bigvee_{\beta\leqslant\alpha} e'_\beta$. Покажем индукцией по α, что $e_\alpha \leqslant e''_\alpha \quad (\alpha \in \gamma)$. При $\alpha = 1$ имеем $e_1 = e'_1 = e''_1$. Допустим, что $e_\beta \leqslant e''_\beta$ при всех $\beta < \alpha$. Тогда с учетом выше изложенного имеют место соотношения

$$e_\alpha = e'_\alpha \vee b_\alpha e_\alpha = e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta<\alpha} d_{\alpha\beta} e_\alpha = e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta<\alpha} e_\beta \leqslant e'_\alpha \vee \bigvee_{\beta<\alpha} e''_\beta = e''_\alpha,$$

т. е. $e_\alpha \leqslant e''_\alpha$. Из $\mathcal{F}_1(A)$ вытекает существование $e := \sup E' = \sup\limits_{\alpha<\gamma} e'_\alpha$. Но так как $e'_\alpha \leqslant e_\alpha \leqslant e''_\alpha \leqslant e$ $(\alpha \in \gamma)$, то множество E также имеет точную верхнюю границу и $\sup E \sup \mathcal{E}{\downarrow} = e$. Теперь ясно, что $[\![\, \sup \mathcal{E} = e \,]\!]$, следовательно, $\mathcal{F}_1(A) \to [\![\, \mathcal{F}_1(\mathcal{A}) \,]\!] = 1$.

Обратная импликация проста и вытекает из следующего соображения: если E — множество попарно ортогональных проекторов в A, что $\mathcal{E} := E{\uparrow}$ — множество попарно ортогональных проекторов в $\mathcal{A}$, причем из существования $\sup \mathcal{E} \in \mathcal{A}$ по принципу максимума следует существование $\sup E$.

(2) Покажем теперь, что справедливы импликации

$$\mathcal{F}_2(A) \to [\![\, \mathcal{F}_2(\mathcal{A}) \,]\!] = 1, \quad [\![\, CalF_1(\mathcal{A})\,\&\,\mathcal{F}_2(\mathcal{A}) \,]\!] = 1 \to \mathcal{F}(A).$$

Прежде всего убедимся, что отображение ограниченного спуска $\mathcal{A}_0 \mapsto \mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A$ ($\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$) осуществляет биекцию между множествами $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{M}(A)$ максимальных сильно ассоциативных подалгебр $\mathcal{A}$ и A соответственно.

Возьмем $x \in \mathcal{A}_0{\downarrow}$. Так как $\mathcal{A}{\downarrow} = \mathrm{mix}\,(A)$, то $x = \mathrm{mix}\,(b_\xi a_\xi)$ для некоторых разбиения единицы $(b_\xi) \subset \mathbb{B}$ и семейства $(a_\xi) \subset A$. В частности $[\![\, a_\xi \in \mathcal{A}_0 \,]\!] \geqslant b_\xi$. Если a'_ξ — перемешивание элементов a_ξ и 0 с весами b_ξ и $1 - b_\xi$ соответственно, то попрежнему $x = \mathrm{mix}\,(b_\xi a'_\xi)$, но $a'_\xi \in \mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A$. Тем самым $\mathcal{A}_0{\downarrow} = \mathrm{mix}\,(\mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A)$, что равносильно соотношению $[\![\, \mathcal{A}_0{\uparrow} = (\mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A){\uparrow} \,]\!] = 1$.

Пусть $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и $A_0 := \mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A$. Тогда для ассоциативной подалгебры $A_0 \subset A_1 \subset A$ будет $[\![\, \mathcal{A}_0 = A_0{\uparrow} \subset A_1{\uparrow} \,]\!] = 1$ и, в силу ассоциативности подалгебры $A_1{\uparrow}$ выполняется $[\![\, \mathcal{A}_0 = A_1{\uparrow} \,]\!] = 1$. Отсюда выводим $A_0 = \mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A = A_1{\uparrow}{\downarrow} \cap A \supset A_1$, значит $A_0 \in \mathcal{M}(A)$. Наоборот, возьмем $A_0 \in \mathcal{M}(A)$ и положим $\mathcal{A}_0 := A_0{\uparrow}$. Если $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ — сильно ассоциативная подалгебра, содержащая $\mathcal{A}_0$, то $\mathcal{A}_1{\downarrow} \cap A$ — сильно ассоциативная подалгебра A содержащая $\mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A = A_0{\uparrow}{\downarrow} \cap A \supset A_0$. Тем самым, $A_0 = \mathcal{A}_1{\downarrow} \cap A$ и, применив операцию подъема, получим $\mathcal{A}_0 = A_0{\uparrow} = (\mathcal{A}_1{\downarrow} \cap A){\uparrow} = \mathcal{A}_1$. Это доказывает максимальность $\mathcal{A}_0$. В дальнейших рассуждениях $\mathcal{A}_0$ и A_0 соответствуют друг другу в силу указанной биекции. Отметим также равенство $\mathfrak{P}(\mathcal{A}_0){\downarrow} = \mathfrak{P}(A_0)$, вытекающее из приведенных в (1) соображений.

Допустим, что выполнено $\mathcal{F}_2(A)$. Возьмем замкнутую подалгебру $\bar{\mathcal{A}}$ в $\mathcal{A}_0$, содержащую $\mathfrak{P}(\mathcal{A}_0)$. Тогда $\bar{A} := \bar{\mathcal{A}}{\downarrow} \cap A$ — замкнутая подалгебра в A_0, следовательно, $A_0 = \bar{A}$. Отсюда выводим $\bar{\mathcal{A}} = \bar{A}{\uparrow} = A_0{\uparrow} = \mathcal{A}_0$, т. е. имеет место $\mathcal{F}_2(\mathcal{A})$ внутри $V^{(\mathbb{B})}$.

Предположим теперь, что $[\![\mathcal{F}_1(\mathcal{A})]\!] = [\![\mathcal{F}_2(\mathcal{A})]\!] = 1$. Пусть $\bar{A}$ — наименьшая замкнутая подалгебра в A_0, содержащая $\mathfrak{P}(A_0)$. В соответствие с уже доказанным в (1) имеет место $\mathcal{F}_1(A)$, стало быть, $\bar{A}$ — порядково полная векторная решетка ограниченных элементов. Кроме того $\mathbb{B} \subset \mathfrak{P}(A_0) \subset \bar{A}$, следовательно, $\bar{A} = \mathrm{mix}\,(\bar{A}) \cap A$. Если $\bar{\mathcal{A}} := \bar{A}{\uparrow}$, то $[\![\mathrm{ba}\,\mathcal{A}$ — замкнутая подалгебра в $\mathcal{A}_0]\!] = [\![\mathfrak{P}(\mathcal{A}_0) \subset \bar{\mathcal{A}}]\!] = 1$. Так как внутри $V^{(\mathbb{B})}$ выполняется $\mathcal{F}_2(\mathcal{A})$, то $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_0$ и $\bar{\mathcal{A}}{\downarrow} = \mathcal{A}_0{\downarrow}$. Ограничив спуски на A, получим $\bar{A} = (\bar{A}{\uparrow}{\downarrow}) \cap A = \mathcal{A}_0{\downarrow} \cap A = A_0$. Итак, имеет место утверждение $\mathcal{F}_2(A)$. Теорема доказана полностью. $\triangleright$

3.3. Теорема. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство и $\lambda := \dim H > 1$. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{A}$ — пополнения метрических пространств $H^\wedge$ и $\mathcal{J}(H)^\wedge$ соответственно в модели $V^{(\mathbb{B})}$. Тогда имеют место утверждения:*

(1) $V^{(\mathbb{B})} \models [[\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $\dim \mathcal{H} = |\lambda^\wedge|]]$;

(2) $V^{(\mathbb{B})} \models [[\mathcal{A}$ — спин-фактор, изометрически изоморфный абстрактному спин-фактору $\mathcal{J}(\mathcal{H})]]$.

$\triangleleft$ Утверждение (1) установлено в [1], см. также [11]. Докажем (2). Пусть формула $\phi(A, H, \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \circ, \|\cdot\|)$ утверждает, что JB-алгебра A совпадает с абстрактным спин-фактором $\mathcal{J}(H)$, в построении которого участвуют вещественное гильбертово пространство H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, поле действительных чисел $\mathbb{R}$, йорданово произведение $\circ$ и норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R} \otimes H$. Нетрудно убедиться, что эту формулу можно считать ограниченной. В силу принципа ограниченного переноса будет

$$\phi(A, H, \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle, \circ, \|\cdot\|) \leftrightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \phi(A^\wedge, H^\wedge, \mathbb{R}^\wedge, \langle\cdot,\cdot\rangle^\wedge, \circ^\wedge, \|\cdot\|^\wedge).$$

Отсюда видно, что $[\![\mathcal{J}(H)^\wedge = \mathcal{J}(H^\wedge)]\!] = 1$. Более подробно, внутри $V^{(\mathbb{B})}$ выполняется утверждение: $\mathcal{J}(H)^\wedge$ — йорданова алгебра $\mathbb{R}^\wedge \otimes H^\wedge$ над полем $\mathbb{R}^\wedge$ с умножением $\circ^\wedge$ и нормой $\|\cdot\|^\wedge$. Пополнение $\mathcal{A}$-алгебры $\mathbb{R}^\wedge \otimes H^\wedge$ как $\mathcal{R}$-метрического пространства изометрически изоморфно $\mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$. Умножение и норма в $\mathbb{R}^\wedge \otimes H^\wedge$ являются равномерно непрерывными функциями, стало быть имеют непрерывные продолжения на $\mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$, которые обозначим соответственно $\circledcirc$ и $|||\cdot|||$. Если $s, t \in \mathbb{R}^\wedge$ и $h, k \in H^\wedge$, то

$$(s,k) \circ^\wedge (t,h) = (st + \langle k,h\rangle^\wedge, sh + tk); \quad \|(s,k)\| = |s| + (\langle k,k\rangle^\wedge)^{\frac{1}{2}},$$

По непрерывности эти соотношения продолжаются на все $\mathcal{R} \otimes \mathcal{H}$, следовательно, при $s, t \in \mathcal{R}$ и $k, h \in \mathcal{H}$ будет

$$(s,k) \circledcirc (t,h) = (st + (k,h), sh + tk); \quad |||(s,k)||| = |s| + (k,k)^{\frac{1}{2}},$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Теперь ясно, что $\mathcal{A}$ изометрически изоморфно спин-фактору $\mathcal{J}(\mathcal{H})$ внутри $V^{(\mathbb{B})}$. $\triangleright$

3.4. Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — пополнение нормированного пространства $X^\wedge$ в модели $V^{(\mathbb{B})}$, а Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathbb{B}$. Тогда спуск $\mathcal{X}$ линейно изометричен решеточно нормированному пространству $C_\infty(Q, X)$, а ограниченный спуск $\mathcal{X}$ изометрически $\mathbb{B}$-изоморфен $C_\#(Q, X)$.*

$\lhd$ Доказательство первой части см. в [11, теорема 5.4.10]. Вторая часть — простое следствие первой. $\rhd$

3.5. Следствие. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство, а $\mathcal{H}$ — метрическое пополнение $H^\wedge$ внутри модели $V^{(\mathbb{B})}$. Тогда ограниченный спуск абстрактного спин-фактора $\mathcal{J}(\mathcal{H}) \in V^{(\mathbb{B})}$ $\mathbb{B}$-изоморфен JB-алгебре $C_\#(Q, \mathcal{J}(H))$, где Q — стоуновский компакт алгебры $\mathbb{B}$. В частности, $C_\#(Q, \mathcal{J}(H))$ является AJW-алгеброй.*

$\lhd$ Очевидно следствие из 3.4 и 3.3. $\rhd$

§4. **Функциональная реализация AJW-алгебр типа I_2**

В этом параграфе приводится детальное описание структуры AJW-алгебры типа I_2 и дается полная классификация таких алгебр с точностью до изоморфизма.

4.1. Пусть A — некоторая AJW-алгебра типа I_2 и $\mathcal{A}$ — ее булевозначная реализация в модели $V^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B}$ — булева алгебра центральных идемпотентов A. Тогда $[\![\,\mathcal{A}$ — спин-фактор$\,]\!] = 1$.

$\lhd$ По теореме 3.2 $[\![\,\mathcal{A}$ — AJW-фактор$\,]\!] = 1$. Пусть p и q — абелевы проекторы в A, причем $p+q = 1$. Тогда $[\![\,p, q \in \mathfrak{P}(\mathcal{A})\,]\!] = 1$, так как $\mathfrak{P}(\mathcal{A}){\downarrow} = \mathfrak{P}(A)$. Кроме того ясно, что $[\![\,p + q = 1\,]\!] = 1$. Абелевость проектора p (или q) внутри $V^{(\mathbb{B})}$ устанавливается следующим образом. Пусть $\mathcal{U}_a \in V^{(\mathbb{B})}$ — отображение, определяемое внутри модели соотношением $x \mapsto 2a(ax) - a^2x$ $(x \in \mathcal{A})$. Тогда $[\![\,\mathcal{U}_a = U_a{\uparrow}\,]\!] = 1$, стало быть внутри $V^{(\mathbb{B})}$ выполняется

$$U_p(A){\uparrow} = U_p{\uparrow}\,(A{\uparrow}) = \mathcal{U}_p(\mathcal{A}).$$

Так как $U_p(A)$ — ассоциативна, то $[\![\,\mathcal{U}_p(\mathcal{A})$ ассоциативна$\,]\!] = 1$. $\rhd$

4.2. Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathbb{B}$, а β — ординал, снабженный дискретной топологией. Положим $Q(\beta) := C_\infty(Q, \beta)$. Будем писать $Q(\beta) \simeq Q_0(\gamma)$ следует $\gamma \leqslant \alpha$. Легко видеть, что данное определение равносильно определению γ-стабильности из [1, пункт 2.6]. Как показано в [1, теорема 2.7] γ-стабильность булевой алгебры $\mathbb{B}$ (или соответствующего стоуновского компакта) Q равносильна соотношению $V^{(\mathbb{B})} \models \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|$.

4.3. Теорема. *Для любого AJW-алгебры A типа I_2 существует такое семейство непустых экстремальных компактов $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, где Γ — множество кардиналов > 1,* что Q_γ γ-стабилен при всех $\gamma \in \Gamma$ имеет место представление

$$A \simeq \sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{\otimes} C_\#(Q_\gamma, \mathcal{J}(l_2(\gamma))).$$

Если $(P_\delta)_{\delta\in\Delta}$ — семейство экстремальных компактов, удовлетворяющие тем же условиям, что и семейство $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, то $\Gamma = \Delta$ и P_γ гомеоморфен Q_γ при всех $\gamma \in \Gamma$.

$\lhd$ Пусть $\mathcal{A}$ — булевозначная реализация алгебры A в модели $V^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра центральных идемпотентов в A. Согласно 4.1 $[\![\,\mathcal{A}-$ спин-фактор $]\!] = 1$. Из 2.2 в силу принципа переноса выводим, что $[\![\,\mathcal{A} \simeq \mathcal{J}(\mathcal{H})\,]\!] = 1$ для некоторого вещественного гильбертова пространства $\mathcal{H} \in V^{(\mathbb{B})}$. Размерность $\lambda := \dim(\mathcal{H})$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ внутри $V^{(\mathbb{B})}$ можно представить в виде $\lambda = \mathrm{mix}\,_{\gamma\in\delta} b_\gamma\gamma\hat{}$, где δ — множество кардиналов, а $(b_\gamma)_{\gamma\in\delta}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$. Так как $b_\gamma \leqslant [\![\dim(\mathcal{H}) = \gamma\hat{}]\!]$, то в силу принципа переноса будет $[\![\mathcal{H}$ изометрически изоморфно $l_2(\gamma\hat{})]\!] \leqslant b_\gamma$. Но тогда верно соотношение $b_\gamma \leqslant [\![\mathcal{A} \simeq \mathcal{J}(l_2(\gamma\hat{}))]\!]$. Так как $[\![\lambda > 1]\!] = 1$, то $b_\gamma \leqslant [\![\gamma\hat{} > 1\hat{}]\!]$, поэтому $\gamma > 1$ при $b_\gamma \neq 0$. Положим $\Gamma := \{\gamma \in \delta : b_\gamma \neq 0\}$. Пусть $\mathcal{A}_\gamma \in V^{(\mathbb{B}_\gamma)}$ — образ $\mathcal{A}$ при отображении $\rho^* : V^{(\mathbb{B})} \to V^{(\mathbb{B}_\gamma)}$, индуцированным булевым эпиморфизмом $\rho : b \mapsto b \wedge b_\gamma$ $(b \in \mathbb{B})$ из $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}_\gamma := [\![0, b_\gamma]\!]$. Тогда $\mathcal{A}_\gamma$ — спин-фактор в модели $V^{(\mathbb{B}_\gamma)}$ и $[\![\mathcal{A} \simeq \mathcal{J}(l_2(\gamma\hat{}))]\!] \geqslant b_\gamma$ (см. [11, теорема 2.2.3]). Отображение $\bar{\rho}x \mapsto \rho^* x$ $(x \in A)$ является гомоморфизмом A на ограниченный спуск A_γ алгебры $\mathcal{A}_\gamma$ из модели $V^{(\mathbb{B})}$. При этом $[\![\rho^* x = 0]\!] = \rho([\![x = 0]\!]) = 1$ в том и только в том случае, если $b_\gamma \leqslant [\![x = 0]\!]$ или $b_\gamma x = 0$. Тем самым ядро гомоморфизма $\bar{\rho}$ совпадает с $b_\gamma^* A$, значит A_γ изоморфна $b_\gamma A$. В соответствие с 3.5. A_γ изоморфна алгебре $C_\#(Q_\gamma, \mathcal{J}(l_2(\gamma)))$, где Q_γ — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathbb{B}_\gamma$. Остается заметить, что A есть прямая сумма компонент A_γ. Тот факт, что компакт Q_γ γ-стабилен следует из [11, теорема 6.3.5 и 6.3.7]. Единственность устанавливается так же, как и в [11, теорема 6.4.11]. $\rhd$

4.4. Из доказанной теоремы следует, что AJW-алгебра типа I_2 разлагается в прямую сумму s-однородных компонент. Однако такое разложение не будет однозначным. Так же, как и в [1, теорема 3.4(4)] можно показать, что для любых двух вещественных гильбертовых пространств H_1 и H_2 при $\lambda_1 := \dim(H_1) < \dim(H_2) = \lambda_2$ можно подобрать стоуновский компакт Q так, чтобы алгебры $C_\#(Q, \mathcal{J}(H_1))$ и $C_\#(Q, \mathcal{J}(H_2))$ оказались изоморфными. Разумеется это невозможно, если компакт Q λ_k-стабилен при $k := 1, 2$. Эта трудность преодолевается так же, как и в [1] и [13], т.е. путем введения $\mathbb{B}$-размерности AJW-алгебры типа I_2.

Для ненулевого $b \in \mathbb{B}$ обозначим символом $\sigma(b)$ наименьший кардинал γ, для которого AJW-алгебра A будет $s(\gamma)$-однородной. Скажем, что A *строго $s(\gamma)$-однородна*, если она $s(\gamma)$-однородна и $\sigma(b) = \gamma$ для всех ненулевых $b \in \mathbb{B}$. Разбиение единицы $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в $\mathbb{B}$ назовем *$\mathbb{B}$-размерностью* или *булевой размерностью* AJW-алгебры A (типа I_2), если Γ — множество кардиналов и для каждого $\gamma \in \Gamma$ выполняются условия: 1) $\gamma > 1$, 2) $b_\gamma \neq 0$, 3) $b_\gamma A$ строго $s(\gamma)$-однородна. Если A — спин-фактор, то $\mathbb{B}$-размерность определяется одним единственным кардиналом $\gamma > 1$, который назовем просто размерностью A. Две $\mathbb{B}$-размерности $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и $(e_\delta)_{\delta\in\Delta}$ будем называть конгруентными, если $\Gamma = \Delta$ и существует автоморфизм π булевой алгебры $\mathbb{B}$ такой, что $\pi(b_\gamma) = e_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Будем говорить просто о *строгой s-однородности*, если алгебра $S(\gamma)$-однородна для некоторого кардинала γ.

4.5. Теорема. *Пусть A — некоторая AJW-алгебра типа I_2 и $\mathcal{A}$ — ее булевозначная реализация. Пусть $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$, причем $b_\gamma \neq 0$ и $\gamma > 1$ при всех $\gamma \in \Gamma$. Тогда $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ будет $\mathbb{B}$-размерностью алгебры A в том и только в том случае, если $[\![\mathrm{mix}\,_{\gamma\in\Gamma}(b_\gamma\gamma\hat{})$ — размерность спин-фактора $\mathcal{A}]\!] = 1$.*

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из [1, теорема 2.5] с учетом 2.8. $\rhd$

Пусть $(Q_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — то же, что и в 4.3, а b_γ — элемент $\mathbb{B}$, соответствующий открыто-замкнутому множеству Q_γ. Из 4.2 и 4.5 видно, что $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — $\mathbb{B}$-размерность A.

4.6. Теорема. *Две AJW-алгебры типа I_2 изоморфны в том и только в том случае, если они имеют конгруентные булевы размерности.*

$\lhd$ Пусть A и B — произвольные AJW-алгебры типа I_2, а $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра. Возьмем две $\mathbb{B}$-размерности $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ и положим $\alpha := \mathrm{mix}\,_{\gamma\in\Gamma}(e_\gamma\gamma\hat{})$ и $\beta := \mathrm{mix}\,_{\gamma\in\Gamma}(e_\gamma\gamma\hat{})$. Пусть π — автоморфизм $\mathbb{B}$, а π^* — его продолжение на $V^{(\mathbb{B})}$

(см. [11, пункт 2.2.2.]). Тогда из $e_\gamma \leqslant [\![\, \alpha = \gamma^\wedge \,]\!]$ следует, что $\pi(e_\gamma) \leqslant [\![\, \pi^*(\alpha) = \gamma^\wedge \,]\!]$ (см. [11, теорема 2.2.3(2) и теорема 2.2.8(5)]). Отсюда видно, что равенство $[\![\, \pi^*(\alpha) = \gamma \,]\!] = 1$ выполняется лишь в том случае, если $\pi(e_\gamma) = c_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Итак, указанные $\mathbb{B}$-размерности конгруентны тогда только тогда, когда $\beta = \pi^*(\alpha)$.

Пусть теперь (e_γ) и (c_γ) — $\mathbb{B}$-размерности алгебр A и B соответственно, причем A и B — ограниченные спуски спин-факторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \in V^{(\mathbb{B})}$. Тогда имеем

$$[\![\, \alpha \text{ — размерность } \mathcal{A} \,]\!] = [\![\, \beta \text{ — размерность } \mathcal{B} \,]\!] =$$
$$[\![\, \pi^*(\mathcal{A}) \text{ — спин-фактор} \,]\!] = [\![\, \pi^*(\alpha)\text{— размерность } \pi^*(\mathcal{A}) \,]\!] = 1.$$

Если $\beta = \pi^*(\alpha)$, то $[\![\, \pi^*(\mathcal{A}) \sim \mathcal{B} \,]\!] = 1$, следовательно, AJW-алгебры $\pi^*(A)$ и B $\mathbb{B}$-изоморфны, так как в силу [11, теорема 2.2.2(3)] $\pi^*(A)$ совпадает с ограниченным спуском $\pi^*(A)$. Отображение $a \mapsto \pi^*(a)$ $(a \in A)$ осуществляет изоморфизм $A \simeq \pi^*(\mathcal{A})$, стало быть $A \simeq B$. Наоборот, допустим, что имеется изоморфизм $\varphi : A \to B$. Этот изоморфизм не является экстенсиональным и его нельзя поднять до изоморфизма алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Пусть i_A и i_B — изоморфизмы $\mathbb{B}$ на $\mathfrak{P}_c(A)$ и $\mathfrak{P}_c(B)$, определяемые соотношениями

$$e = [\![\, i_A(e) = 1_A \,]\!] = [\![\, i_B(e) = 1_B \,]\!], \quad e^* = [\![\, i_A(e) = 0_A \,]\!] = [\![\, i_B(e) = 0_B \,]\!].$$

Положим $\pi := i_B^{-1}\varphi i_A$. Легко проверить, что $i_* := i_{\pi^*(A)} = \pi^* i_A \pi^{-1}$. В самом деле, $\pi(b) = [\![\, \pi^*(i_A(b)) = 1_A \,]\!]$ и $\pi(b)^* = [\![\, \pi^*(i_A(b)) = 0_B \,]\!]$, а это и означает, что $i_*(\pi(b)) = \pi^*(i_A(b))$. Если $\psi := \varphi\pi^{*-1}$, то для $b \in \mathbb{B}$ и $a \in \pi^*(A)$ будет

$$\psi(i_*(b)a) = \varphi(\pi^{*-1}(i_*(b)) \cdot \pi^{*-1}(a)) = \varphi(i_A \circ \pi^{-1}(b) \cdot \psi(a) = i_B(b)\psi(a).$$

Таким образом ψ — $\mathbb{B}$-гомоморфизм из $\pi^*(A)$ на B, значит $[\![\, \pi^*(\mathcal{A})$ изоморфен $\mathcal{B} \,]\!] = 1$. Но тогда $[\![\, \beta = \pi(\alpha) \,]\!] = 1$. $\triangleright$

4.7. Отметим несколько следствий из доказанных результатов.

(1) *Любая AJW-алгебра типа I_2 допускает единственное разложение в прямую сумму строго s-однородных компонент.*

(2) *Пусть $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$, причем Γ — множество кардиналов и для каждого $\gamma \in \Gamma$ выполняется: $\gamma > 1, b_\gamma \neq 0, b_\gamma - \gamma$ — стабильный элемент. Тогда существует AJW-алгебра типа I_2 такой, что $\mathfrak{P}_c(A) \simeq \mathbb{B}$ и $\mathbb{B}$-размерность A конгруентна $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.*

(3) *Пусть A-AJW-алгебры типа I_2 и $\mathfrak{P}_c(A)$ разлагается в прямую сумму булевых алгебр счетного типа. Тогда любая s-однородная компонента A является строго s-однородной, и алгебра A допускает единственное разложение в прямую сумму s-однородных компонент.*

$\triangleleft$ Пусть $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B} := \mathfrak{P}_c(A)$ такое, что булева алгебра $\mathbb{B}_\xi = [0, b_\xi]$ счетного типа при всех $\xi \in \Xi$. Тогда $[\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!]^{\mathbb{B}_\xi}$ для каждого кардинал γ [10,3.1.13(2)]. Если $\pi_\xi(b) := b \wedge b_\xi$ $(b \in \mathbb{B})$, а π_ξ^* — продолжение π_ξ на $V^{(\mathbb{B})}$, то $\pi_\xi([\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!]^{\mathbb{B}}) = [\![\, \pi_\xi^*(\gamma^\wedge) = |\pi_\xi^*(\gamma^\wedge)| \,]\!]^{\mathbb{B}_\xi} = [\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!]^{\mathbb{B}_\xi} = 1$. Следовательно, $b_\xi \leqslant [\![\, \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge| \,]\!]^{\mathbb{B}}$ при всех ξ, т. е. $V^{(\mathbb{B})} \models \gamma^\wedge = |\gamma^\wedge|$. Это означает, что алгебра $\mathbb{B}$ γ-стабильны для каждого кардинала γ и, тем самым строгую s-однородность любой $s(\gamma)$-однородной компоненты A. $\triangleright$

4.8. В качестве еще одного следствия теоремы 4.3 укажем представления s-однородных компонент в виде алгебры измеримых вектор-функций, полученное в [14].

Пусть A — некоторая AJW-алгебра, $\mathcal{Z}(A)$ — центр A, $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра всех центральных проекторов, Q — стоуновский компакт алгебры $\mathbb{B}$. Если A — JBW-алгебра, то на A имеется достаточное число нормальных состояний. Отсюда следует, в частности, что K-пространство $\mathcal{Z}(A)$ допускает разделяющее множество регулярных порядково непрерывных функционалов, на $\mathbb{B}$ существенно положительная счетно-аддитивная мера, а компакт Q является гиперстоуновым. Тем самым, булева алгебра $\mathbb{B}$ представима в виде алгебры $B(\Omega,\mu) := B(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ измеримых множеств по модулю множеств нулевой меры относительно некоторого пространства с мерой $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$. Здесь Ω — непустое множество, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра множеств, $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — положительная счетно-аддитивная функция, причем выполнены условия:

(а) если $N \subset \Omega$ и $N \cap K \in \mathcal{B}$ для всех $K \in \mathcal{B}$ с $\mu(K) < +\infty$, то $N \in \mathcal{B}$;

(б) если $N \in \mathcal{B}$ и $\mu(N) = +\infty$, то $0 < \mu(N_0) < +\infty$ для некоторого $N_0 \in \mathcal{B}$, $N_0 \subset N$;

(в) если $N \in \mathcal{B}$ и $\mu(N) = 0$, то $\mathcal{N}_0 \in \mathcal{B}$ при $N_0 \subset N$.

По определению $B(\Omega,\mu) = \mathcal{B}/\mathcal{N}$, где $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{B} : \mu(N) = 0\}$.

4.9. Теорема. *Пусть A — некоторая JBW-алгебра типа I_2. Тогда существует семейство пространств с мерой $(\Omega_\gamma,\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, где Γ — непустое множество кардиналов, больших 1, такое что имеет место представление:*

$$A \simeq \sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{\otimes} L_\infty(\Omega_\gamma,\mu_\gamma,\mathcal{J}(l_2(\gamma))).$$

Если $(\Sigma_\delta,\lambda_\delta)_{\delta\in Delta}$ — семейство пространств с мерой, обладающее теми же свойствами, что и $(\Omega_\gamma,\mu_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, то $\Gamma = \Delta$ и для каждого $\gamma \in \Gamma$ булевы алгебры $B(\Omega_\gamma,\mu_\gamma)$ и $B(\Sigma_\gamma,\lambda_\gamma)$ изоморфны.

$\lhd$ В силу теоремы 4.2 достаточно убедится, что если (Ω,μ) — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, а Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathbb{B} := B(\Omega,\mu)$, то решеточно нормированные пространства $C_\#(Q,X)$ и $L_\infty(\Omega,\mu,X)$ изометрически изоморфны для любого банахова пространства X. Пусть $L_0(\Omega,\mu,X)$ — пространство (классов эквивалентности) измеримых по Бохнеру вектор функций $g : \Omega \to X$. Существует отображение $\tau : \Omega \to Q$ такое, что $f \circ \tau$ — измерима для любой вектор-функции $f \in C_\infty(Q,X)$, причем, если $\tilde{f}$ — класс эквивалентности функции $f\circ\tau$, то отображение $f \to \tilde{f}$ является изоморфизмом $C_\infty(Q,X)$ на $L_0(\Omega,\mu,X)$ [17, теорема 5.3.2] (см. также [15, теорема 2.9], [16, теорема 4.1.15]). Это же отображение осуществляет линейный и решеточный изоморфизм $C_\infty(Q)$ на $L_0(\Omega,\mu)$. Более того, оно является изометрией решеточно нормированных пространств, т. е. выполняется $\left|\tilde{f}\right| = \widetilde{|f|}$, $\quad (f \in C_\infty(Q,X))$, следовательно, справедливы соотношения

$$f \in C_\#(Q,X) \leftrightarrow |f| \in C(Q) \leftrightarrow \widetilde{|f|} \in L_\infty(\Omega,\mu) \leftrightarrow \tilde{f} \in L_\infty(\Omega,\mu,X).$$

Утверждение о единственности вытекает из 4.7(3). $\rhd$

Литература

1. *Кусраев А. Г.* О функциональной реализации AW^*-алгебр типа I // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 3.—С. 79–88.
2. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ и JB-алгебры // Сиб. мат. журн.—1994.—Т. 35, № 1.—С. 124–134.
3. *Topping D. M.* Jordan algebras of self-adjoint operators // Mem. Amer. Math. Soc.—1965.—V. 53.
4. *Арзикулов Ф. Н.* Об абстрактных JW-алгебрах // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 1.—С. 20–27.
5. *Арзикулов Ф. Н.* AJW-алгебры и приложения к теории измеримых операторов // Дисс. на соиск. степ. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998.
6. *Арзикулов Ф. Н.* Об одном аналоге пирсовского разложения // Сиб. мат. журн.—1999.—Т. 40, № 3.
7. *Hanshe-Olsen H., Störmer E.* Jordan operator algebras.—Boston etc.: Pitman Publ. Inc., 1984.
8. *Аюпов Ш. Ф.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.
9. *Аюпов Ш. А.* Йордановы операторные алгебры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 67–97.
10. *Alfsen E. M., Shultz F. W., Störmer E.* A Gel′fand–Neumark theorem for Jordan algebras // Adv. in Math.—1978.—V. 28, № 1.—P. 11–56.
11. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ.—Новосибирск: Наука, 1999.
12. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 212–292.
13. *Ozawa M.* A classification of type I AW^*-algebras and Boolean valued analysis // J. Math. Soc. Japan.—1984.—V. 36, № 4.—P. 589–608.
14. *Stacey P. J.* Type I_2 JBW-algebras // Quart. J. Math. Oxford.—1982.—V. 33, № 2.—P. 115–127.
15. *Sentilles F. D.* Stonian differentiation and representation of vector functions and measures // Contemp. Math.—1980.—V. 2.—P. 241–269.
16. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.
17. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.