

Юрию Григорьевичу Решетняку  
к его семидесятилетию

УДК 517.927

## ВЗВЕШЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

М. С. Бичегкуев

В работе рассматривается взвешенная производная и связанная с ней специальная форма дифференциальных уравнений. Устанавливается связь и приводимость этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

### 1. Взвешенная производная

Пусть  $\alpha = \alpha(t)$  — положительная ограниченная однозначная функция на интервале  $(a, b)$  и пусть число  $p \in [0, 1]$ . Взвешенной производной функции  $f(t)$ ,  $t \in (a, b)$ , относительно функции  $\alpha^p(t)$  в точке  $t$  будем называть

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha^p(t + \alpha^{1-p}(t)\Delta t)f(t + \alpha^{1-p}(t)\Delta t) - \alpha^p(t)f(t)}{\Delta t} =: D_{\alpha,p}f(t). \quad (1.1)$$

Взвешенные производные фигурируют в литературе под различными названиями: обобщенная производная (при  $p = 0$ ) в [1], весовая производная в [2].

Если  $\alpha(t) \neq 0$ ,  $t \in (a, b)$ , из равенства (1.1) получаем связь между взвешенной и «обычной» производными

$$\begin{aligned} D_{\alpha,p}f(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha^{1-p}(t) \frac{\alpha^p(t + \alpha^{1-p}(t)\Delta t)f(t + \alpha^{1-p}(t)\Delta t) - \alpha^p(t)f(t)}{\alpha^{1-p}(t)\Delta t} = \\ &= \alpha^{1-p}(t) \frac{d}{dt} \alpha^p(t)f(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для  $\alpha(t_0) = 0$  при  $t_0 = (a, b)$  из (1.1) находим, что  $D_{\alpha,p}f(t_0) = 0$ , поэтому и в этом случае верна формула (1.2)

Если  $\alpha(t) \equiv c$  для всех  $t \in (a, b)$ , то взвешенная производная от функции  $f$  представляет собой операцию умножения постоянной  $c$  на производную функции  $f$ .

Будем предполагать, что функция  $\alpha$  достаточно гладкая функция. Тогда оператор взвешенной производной принимает вид

$$D_{\alpha,p} = \alpha \frac{d}{dt} + p\alpha'. \quad (1.3)$$

Из (1.3) для гладкой функции  $f$  имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha,p}f &= \alpha \frac{d}{dt}f + p\alpha'f = \alpha \frac{d}{dt}f + p[(\alpha f)' - \alpha f'] = \\ &= (1-p)\alpha \frac{d}{dt}f + p \frac{d}{dt}\alpha f = (1-p)D_{\alpha,0}f + pD_{\alpha,1}f. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор взвешенной производной  $D_{\alpha,p}$  допускает следующее представление

$$D_{\alpha,p} = (1-p)D_{\alpha,0} + pD_{\alpha,1}. \quad (1.3')$$

Приведем основные свойства взвешенной производной:

1°. Линейность

$$D_{\alpha,p}(f+g) = D_{\alpha,p}f + D_{\alpha,p}g.$$

2°. Если  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные, причем  $c_1 > 0$ , то

$$D_{c_1\alpha,p}c_2f = c_1c_2D_{\alpha,p}f.$$

3°. Если  $f, g$  имеют взвешенные производные  $D_{\alpha, \frac{p}{2}}$ , то для произведения  $f \cdot g$  существует взвешенная производная  $D_{\alpha,p}$ , причем

$$D_{\alpha,p}(f \cdot g) = fD_{\alpha, \frac{p}{2}}g + gD_{\alpha, \frac{p}{2}}f \quad (1.4)$$

Действительно, из (1.2) имеем

$$\begin{aligned} D_{\alpha,p}(f \cdot g) &= \alpha^{1-p} \frac{d}{dt}\alpha^p f \cdot g = \alpha^{1-p}(t) \frac{d}{dt} \left( \alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t) \right) \left( \alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) \right) = \\ &= \alpha^{1-p}(t) \left[ \alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t) \frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) + \alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) \frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t) \right] = \\ &= \alpha^{1-\frac{p}{2}}(t)f(t) \frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)g(t) + \alpha^{1-\frac{p}{2}}(t)g(t) \frac{d}{dt}\alpha^{\frac{p}{2}}(t)f(t) = \\ &= f(t)D_{\alpha, \frac{p}{2}}g(t) + g(t)D_{\alpha, \frac{p}{2}}f(t). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Формулу (1.4) можно определить также следующим образом: пусть  $m, n \leq 1$  и  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ . Если  $f$  имеет взвешенную производную  $D_{\alpha, \frac{p}{m}}$ , а  $g$  —  $D_{\alpha, \frac{p}{n}}$ , то взвешенную производную  $D_{\alpha,p}$  от произведения  $(f \cdot g)$  можно представить в виде

$$D_{\alpha,p}(f \cdot g) = gD_{\alpha, \frac{p}{m}}f + fD_{\alpha, \frac{p}{n}}g.$$

4°. Если  $f$  имеет взвешенные производные  $D_{\alpha, \frac{p}{2^k}}$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , то  $f^n$  имеет взвешенную производную  $D_{\alpha,p}$ , причем справедливо равенство

$$D_{\alpha,p}f^n = f^{n-1} \left[ \sum_{k=1}^{n-2} D_{\alpha, \frac{p}{2^k}}f + 2D_{\alpha, \frac{p}{2^{n-1}}}f \right].$$

В частности, при  $p = 0$ , полагая  $D_\alpha = D_{\alpha,0}$ , имеем

$$D_\alpha f^n = n f^{n-1} D_\alpha f.$$

5°. Пусть  $m \geq 0$  и  $k \geq 0$ , тогда

$$\alpha^m D_{\alpha,p} f = D_{\alpha^{m+1}, \frac{p}{m+1}} f, \quad D_{\alpha,p}(\alpha^k f) = D_{\alpha^k, \frac{k+p}{k+1}} f.$$

Взвешенные производные высшего порядка определим по формуле

$$D_{\alpha,p}^m = D_{\alpha,p}^{m-1} (D_{\alpha,p}), \quad m \geq 1.$$

Используя равенство (1.2) для них получаем следующее представление

$$D_{\alpha,p}^m = \alpha^{-p} D_{\alpha}^m \alpha^p, \tag{1.5}$$

где оператор  $D_{\alpha}^m = \underbrace{\left(\alpha \frac{d}{dt}\right) \left(\alpha \frac{d}{dt}\right) \cdots \left(\alpha \frac{d}{dt}\right)}_{m \text{ раз}} = \left(\alpha \frac{d}{dt}\right)^m$ .

**Предложение 1.1** (формула Лейбница). Пусть  $f$  и  $g$  имеют взвешенные производные  $D_{\alpha, \frac{p}{2}}$  до порядка  $n$  включительно. Тогда для  $n$ -ой производной  $D_{\alpha,p}$  справедлива формула Лейбница

$$D_{\alpha,p}^n (f \cdot g) = \sum_{k=0}^n C_n^k D_{\alpha, \frac{p}{2}}^k f \cdot D_{\alpha, \frac{p}{2}}^{n-k} g, \tag{1.6}$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $\beta$  — положительная дифференцируемая функция на интервале  $(a, b)$  и  $0 \leq q \leq 1$ . Тогда взвешенная производная  $D_{\beta,q}$  допускает представление через  $D_{\alpha,p}$ , а именно, справедливо равенство

$$D_{\beta,q} = \frac{\beta}{\alpha} D_{\alpha,p} + \beta h(\beta^q, \alpha^p), \tag{1.7}$$

где функция

$$h(\beta^q, \alpha^p) = \left( \ln \frac{\beta^q}{\alpha^p} \right)'. \tag{1.8}$$

Доказательство. Пользуясь представлением оператора  $D_{\beta,q}$

$$D_{\beta,q} = \beta \frac{d}{dt} + q\beta'$$

получаем

$$\begin{aligned} D_{\beta,q} &= \frac{\beta}{\alpha} \left( \alpha \frac{d}{dt} + p\alpha' - p\alpha' + q\beta' \right) = \frac{\beta}{\alpha} D_{\alpha,p} - \frac{q\beta'\alpha - p\alpha'\beta}{\alpha} = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} D_{\alpha,p} + \beta h(\beta^q, \alpha^p). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Следствие 1.1.** Пусть  $m, n$  — натуральные числа, тогда

$$D_{\beta,q}^m D_{\alpha,p}^n = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m D_{\alpha,p}^{n+m} + \sum_{k=1}^m a_k(t) D_{\alpha,p}^{n+m-k},$$

где  $a_k(t)$  — функции, зависящие от  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  и их производных.

**Предложение 1.3.** Пусть  $\gamma, \beta$  — положительные дифференцируемые функции на интервале  $(a, b)$  и  $r, q \in [0, 1]$ . Тогда

$$D_{\gamma,r}D_{\beta,q}D_{\alpha,p} = \frac{\gamma\beta}{\alpha^2}D_{\alpha,p}^3 + a_2(t)D_{\alpha,p}^2 + a_1(t)D_{\alpha,p}, \quad (1.9)$$

где функции  $a_1(t), a_2(t)$  определяются формулами

$$a_2(t) = \frac{\gamma\beta}{\alpha} [h(\beta, \alpha^{1-p}) + h(\gamma^r, \alpha^p) + h(\beta^q, \alpha^p)],$$

$$a_1(t) = \gamma\beta [h(\gamma^r, \alpha^p) \cdot h(\beta^q, \alpha^p) + \frac{1}{\alpha}D_{\alpha,p}h(\beta^q, \alpha^p)].$$

**Доказательство.** Из равенства (1.7), с учетом (1.8), имеем

$$\begin{aligned} D_{\gamma,r}D_{\beta,q}D_{\alpha,p} &= \left[ \frac{\gamma}{\beta}D_{\beta,q}^2 + \gamma h(\gamma^r, \beta^q)D_{\beta,q} \right] D_{\alpha,p} = \left[ \frac{\gamma}{\beta}D_{\beta,q} + \gamma h(\gamma^r, \beta^q) \right] D_{\beta,q}D_{\alpha,p} = \\ &= \left[ \frac{\gamma}{\beta}D_{\alpha,p} + \gamma h(\gamma^r, \beta^q) \right] \left[ \frac{\beta}{\alpha}D_{\alpha,p}^2 + \beta h(\beta^q, \alpha^p)D_{\alpha,p} \right] = \\ &= \frac{\gamma\beta}{\alpha}D_{\alpha,p}^3 + \left[ \frac{\gamma}{\alpha}D_{\alpha,p}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma\beta}{\alpha}h(\gamma^r, \alpha^p) + \frac{\gamma\beta}{\alpha}h(\beta^q, \alpha^p) \right] D_{\alpha,p}^2 + \\ &+ \left[ \alpha\beta h(\gamma^r, \alpha^p) + \frac{\gamma\beta}{\alpha}D_{\alpha,p}h(\beta^q, \alpha^p) \right] D_{\alpha,p}. \end{aligned}$$

Теперь используя равенство  $D_{\alpha,p}\beta/\alpha = \beta h(\beta, \alpha^{1-p})$ , получим справедливость равенства (1.9). Предложение доказано.

**Предложение 1.4.** Если функции  $\alpha$  и  $f$  имеют производные до порядка  $n$  включительно, то справедливо равенство

$$D^m(D_{\alpha,p}f) = \sum_{k=0}^m C_m^k D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-k)}. \quad (1.10)$$

**Доказательство.** Пусть  $m = 1$  и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} (D_{\alpha,p}f)' - D_{\alpha,p}f' &= \left( \alpha \frac{d}{dt}f + p\alpha'f \right) - \left( \alpha \frac{d^2}{dt^2}f + p\alpha f' \right) = \\ &= \alpha \frac{d^2}{dt^2}f + \alpha' \frac{d}{dt}f + p\alpha''f - \alpha \frac{d^2}{dt^2}f + p\alpha' \frac{d}{dt}f = \alpha' \frac{d}{dt}f + p\alpha''f = D_{\alpha',p}f. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(D_{\alpha,p}f)' = D_{\alpha,p}f' + D_{\alpha',p}f.$$

Предположим, что равенство (1.5) доказано для  $m - 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 D^m (D_{\alpha,p} f) &= \left[ (D_{\alpha,p} f)^{(m-1)} \right]' = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \left( D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-1-k)} \right)' = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \left[ D_{\alpha^{(k+1)},p} f^{(m-1-k)} + D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-k)} \right] = \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k D_{\alpha^{(k+1)},p} f^{(m-1-k)} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-k)} = \\
 &= C_{m-1}^{m-1} D_{\alpha^{(m)},p} f + \sum_{k=1}^{m-1} (C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}) D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-k)} + \\
 &+ C_{m-1}^0 D_{\alpha,p} f^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k D_{\alpha^{(k)},p} f^{(m-k)}.
 \end{aligned}$$

Мы объединили слагаемые, содержащие одинаковые производные и воспользовались равенством  $C_m^k + C_{m-1}^{k-1} = C_m^k$ .

Предложение доказано.

**Предложение 1.5.** *Справедлива следующая рекуррентная формула*

$$D_{\alpha^{(k)},p} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} D_{\alpha^{(k-1)},p} + p \alpha^{(k-1)} \left( \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \right)', \quad k \geq 1. \quad (1.11)$$

**Доказательство.** Пользуясь представлением взвешенной производной (1.3) получаем

$$\begin{aligned}
 D_{\alpha^{(k)},p} &= \alpha^{(k)} \frac{d}{dt} + p \alpha^{(k+1)} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \left[ \alpha^{(k-1)} \frac{d}{dt} + p \alpha^{(k)} \right] + \\
 &+ p \alpha^{(k+1)} - p \frac{(\alpha^{(k)})^2}{\alpha^{(k-1)}} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} D_{\alpha^{(k-1)},p} + p \alpha^{(k-1)} \left( \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \right)'.
 \end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Следствие 1.2.** *Если  $\alpha$  —  $k$ -раз дифференцируемая функция, то*

$$D_{\alpha^{(k)},p} = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha} D_{\alpha,p} + p \alpha^{(k)} \sum_{i=1}^k \left( \ln \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(i-1)}} \right)'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательно применяя предложение 1.5 получим

$$\begin{aligned}
D_{\alpha^{(k)},p} &= \\
&= \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \left[ \frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}} D_{\alpha^{(k-2)},p} + p\alpha^{(k-2)} \left( \frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}} \right)' \right] + p\alpha^{(k-1)} \left( \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \right)' = \\
&= \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-2)}} D_{\alpha^{(k-2)},p} + p\alpha^{(k-2)} \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-2)}} \left( \frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}} \right)' + p\alpha^{(k-1)} \left( \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \right)' = \\
&= \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-3)}} D_{\alpha^{(k-3)},p} + p\alpha^{(k-3)} \left( \frac{\alpha^{(k-2)}}{\alpha^{(k-3)}} \right)' + p\alpha^{(k-2)} \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k+1)}} \left( \frac{\alpha^{(k-1)}}{\alpha^{(k-2)}} \right)' + \\
&+ p\alpha^{(k)} \left( \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha^{(k-1)}} \right)' = \frac{\alpha^{(k)}}{\alpha} D_{\alpha,p} + p\alpha^{(k)} \sum_{i=1}^n \left( \ln \frac{\alpha^{(i)}}{\alpha^{(i-1)}} \right)'.
\end{aligned}$$

Следствие доказано.

**Предложение 1.6.** Пусть  $\alpha$  — дифференцируема на  $(a, b)$  и  $m$  — произвольное натуральное число. Тогда

$$D_t D_{\alpha,p}^m = \sum_{k=1}^m D_{\alpha,p}^{k-1} D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-k} + D_{\alpha,p}^m D_t. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно из предложения 1.4 имеем

$$\begin{aligned}
D_t D_{\alpha,p}^m &= D_t D_{\alpha,p} (D_{\alpha,p}^{m-1}) = D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-1} + D_{\alpha',p} D_t D_{\alpha,p}^{m-1} = \\
&= D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-1} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-2} + D_{\alpha,p}^2 D_t D_{\alpha,p}^{m-2} = \\
&= D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-1} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-2} + D_{\alpha,p}^2 (D_{\alpha',p} + D_{\alpha,p} D_t) D_{\alpha,p}^{m-3} = \\
&= D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-1} + D_{\alpha,p} D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-2} + D_{\alpha,p}^2 D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-3} + \\
&+ \dots + D_{\alpha,p}^{m-1} D_t D_{\alpha,p} = \sum_{k=1}^m D_{\alpha,p}^{k-1} D_{\alpha',p} D_{\alpha,p}^{m-k} + D_{\alpha,p}^m D_t.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Связь между обычной производной второго порядка и взвешенной производной устанавливает

**Предложение 1.7.** Если  $\alpha$  — дифференцируемая функция, то

$$\alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} = D_{\alpha,p}^2 - (1+2p)\alpha' D_{\alpha,p} - p\alpha^2 \left[ \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)' + (1-p) \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \right]. \quad (1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя вторую взвешенную производную в виде

$$D_{\alpha,p}^2 = \left( \alpha \frac{d}{dt} + p\alpha' \right) \left( \alpha \frac{d}{dt} + p\alpha' \right),$$

получим

$$\begin{aligned}
D_{\alpha,p}^2 &= \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} + \alpha \alpha' \frac{d}{dt} + p \alpha \alpha'' + p \alpha \alpha' \frac{d}{dt} + p^2 \alpha'^2 = \\
&= \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} + (1 + 2p) \alpha' \frac{d}{dt} + p \alpha \alpha'' + p^2 \alpha'^2 = \\
&= \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} + (1 + 2p) \alpha' D_{\alpha,p} + p \left[ \frac{\alpha \alpha'' - \alpha'^2}{\alpha^2} \right] \alpha^2 - p^2 \alpha'^2 + p \alpha'^2 = \\
&= \alpha^2 \frac{d^2}{dt^2} + (1 + 2p) \alpha' D_{\alpha,p} + p \alpha^2 \left[ \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)' + (1 - p) \left( \frac{\alpha'^2}{\alpha} \right)' \right].
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Следствие 1.3.** Для производной  $D_\alpha = \left( \alpha \frac{d}{dt} \right)$  имеем

$$\left( \alpha \frac{d}{dt} \right)^2 = D_\alpha^2 = D_{\alpha,p}^2 - 2p \alpha' D_{\alpha,p} - p \alpha^2 \left[ \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + (1 - p) \left( \frac{\alpha'^2}{\alpha} \right)' \right].$$

## 2. Оператор взвешенной замены переменной

Пусть  $\alpha = \alpha(t)$  — положительная функция, определенная на отрезке  $[a, b]$  и  $\alpha^{-1}$  интегрируема на  $[a, b]$ . Положим

$$x = \varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{\alpha(\xi)}. \quad (2.1)$$

Обозначим через  $t = \psi(x)$  функцию, обратную к  $x = \varphi(t)$ , а через  $G_{\alpha,p}$  и  $G_{\alpha,-p}$ , ( $0 \leq p \leq 1$ ) [2] операторы, определенные на функциях  $f(x)$  и  $g(x)$  формулами

$$G_{\alpha,p}^{t \rightarrow x} [f(t)] = G_{\alpha,p} [f](x) = \alpha^p(t) f(t)|_{t=\psi(x)}, \quad (2.2)$$

$$G_{\alpha,-p}^{x \rightarrow t} [g(t)] = G_{\alpha,-p} [g](t) = \alpha^{-p}(t) g(x)|_{x=\varphi(t)}. \quad (2.3)$$

Ясно, что

$$G_{\alpha,p} G_{\alpha,-p} = I = G_{\alpha,-p} G_{\alpha,p}, \quad (2.4)$$

где  $I$  — тождественный оператор.

**Предложение 2.1.** Для любого натурального числа  $n$  справедлива формула

$$G_{\alpha,p} [D_{\alpha,p}^n] = \frac{d^n}{dx^n} G_{\alpha,p} \quad (2.5)$$

устанавливающая связь между оператором взвешенной производной и «обычной» производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $n = 1$ . Тогда из определения функций  $x = \varphi(t)$ ,  $t = \psi(x)$  и с учетом равенства

$$\psi'(x) = \alpha(\psi(x))$$

для гладкой функции  $f$  имеем

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}f] = \alpha^p(t)\alpha^{1-p}(t)\frac{d}{dt}\alpha^p(t)f(t)|_{t=\psi(x)} = \alpha(\psi(x))\frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[f] \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[f].$$

Отсюда непосредственно получаем

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^n f] = G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}(D_{\alpha,p}^{n-1} f)] = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^{n-1} f] = \frac{d}{dx}G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^{n-2} f] = \dots = \frac{d^n}{dx^n}G_{\alpha,p}[f].$$

Предложение доказано.

**Следствие 2.1.** *Имеет место равенство*

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^n + D_{\alpha,p}^{n-1} + \dots + D_{\alpha,p}] = (D_x^n + D_x^{n-1} + \dots + D_x)G_{\alpha,p}. \quad (2.6)$$

**Следствие 2.2.** *Для любого натурального числа  $n$  и  $p, q \in [0, 1]$ , причем  $p \geq q$ , имеем*

$$G_{\alpha,p}[D_{\alpha,q}^n] = G_{\alpha,p-q}[D_x^n G_{\alpha,q}]. \quad (2.7)$$

**Предложение 2.2.** *Для оператора  $D_{\alpha,q}D_{\alpha,p}$  ( $q \neq p$ ) справедливо представление*

$$D_{\alpha,q}D_{\alpha,p} = D_{\alpha,p}^2 + (q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.1 и равенства (2.4) имеем

$$\begin{aligned} G_{\alpha,-q}G_{\alpha,q}[D_{\alpha,q}D_{\alpha,p}] &= G_{\alpha,-q}[D_x G_{\alpha,q}[D_{\alpha,p}]] = \\ &= G_{\alpha,-q}[D_x(\alpha^{q-p}(\psi(x))D_x G_{\alpha,p})] = \\ &= G_{\alpha,-q}[\alpha^{q-p}(\psi(x))D_x^2 G_{\alpha,p} + (q-p)\alpha^{q-p}(\psi(x))\alpha'(\psi(x))D_x G_{\alpha,p}] = \\ &= G_{\alpha,-q}[\alpha^{q-p}(\psi(x))G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}^2] + (q-p)\alpha^{q-p}(\psi(x)) \cdot \alpha'(\psi(x))G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p}]] = \\ &= G_{\alpha,q}[G_{\alpha,q}[D_{\alpha,p}^2]] + G_{\alpha,-q}G_{\alpha,q}[(q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}] = \\ &= D_{\alpha,p}^2 + (q-p)\alpha'(t)D_{\alpha,p}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Предложение 2.3.** *Для натурального числа  $n \geq 1$  справедлива формула*

$$G_{\alpha,p}[D_t^n] = D_{\beta,p}^n G_{\alpha,p}, \quad (2.9)$$

где функция  $\beta(x)$  определяется равенством

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(\psi(x))}.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство предложения проведем методом математической индукции. Пусть  $n = 1$ . Тогда из определения оператора  $G_{\alpha,p}$  (2.2) и равенства (1.3) имеем

$$\begin{aligned} G_{\alpha,p}[D_t y] &= G_{\alpha,p}^{t \rightarrow x} \left[ \frac{1}{\alpha(t)} D_{\alpha,p} y - p \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} y \right] = \frac{1}{\alpha(\psi(x))} G_{\alpha,p}[D_{\alpha,p} y] - p \frac{\alpha'(\psi(x))}{\alpha(\psi(x))} G_{\alpha,p}[y] = \\ &= \frac{1}{\alpha(\psi(x))} D_x G_{\alpha,p}[y] + p D_x \left( \frac{1}{\alpha(\psi(x))} \right) \cdot G_{\alpha,p}[y] = D_{\frac{1}{\alpha(\psi(x))}, p} G_{\alpha,p}[y] = D_{\beta,p} G_{\alpha,p}[y]. \end{aligned}$$

Пусть формула (2.9) справедлива для  $n - 1$ , тогда

$$G_{\alpha,p}[D_t^n y] = G_{\alpha,p}[D_t^{n-1}(D_t y)] = D_{\beta,p}^{n-1} G_{\alpha,p}[D_t y] = D_{\beta,p}^{n-1} (D_{\beta,p} G_{\alpha,p}[y]) = D_{\beta,p}^n G_{\alpha,p}[y].$$

Предложение доказано.

**Следствие 2.3.** Имеем место равенство

$$G_{\alpha,p}[D_t^n + D_t^{n-1} + \dots + D_t] = [D_{\beta,p}^n + D_{\beta,p}^{n-1} + \dots + D_{\beta,p}] G_{\alpha,p}. \quad (2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пусть  $G_{\beta,p}$  — оператор взвешенной замены переменной, тогда из (2.9) имеем

$$G_{\beta,p}^{x \rightarrow z} [G_{\alpha,p}^{t \rightarrow x} [D_t^n y]] = D_z^n G_{\beta,p}^{x \rightarrow z} [G_{\alpha,p}^{t \rightarrow x} [y]]$$

или

$$G_{\beta,p}^{x \rightarrow z} [G_{\alpha,p}^{t \rightarrow x} [D_t^n y]] = D_z^n y(\psi(\psi_1(z))), \quad (2.11)$$

где  $\psi_1$  — обратная к функции  $z = \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \alpha(\psi(\xi)) d\xi$ .

### 3. Уравнения с взвешенными производными

1°. Рассмотрим уравнения вида

$$D_{\alpha,p}^n y + a_1 D_{\alpha,p}^{n-1} y + a_2 D_{\alpha,p}^{n-2} y + \dots + a_{n-1} D_{\alpha,p} y + a_n y = 0, \quad (3.1)$$

где  $a_k (k = \overline{1, n})$  — постоянные. Уравнение такого вида (при  $p = 0$  и  $\alpha(t) = t$ ) встречаются, например, в теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды [3]. Применяя к (3.1) преобразование  $G_{\alpha,p}$  с учетом следствия 2.1, получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$D_x^n G_{\alpha,p}[y] + a_1 D_x^{n-1} G_{\alpha,p}[y] + \dots + a_{n-1} D_x G_{\alpha,p}[y] + a_n G_{\alpha,p}[y] = 0, \quad (3.2)$$

где функция  $G_{\alpha,p}[y]$  определяется формулой (2.2). Полагая  $G_{\alpha,p}[y] = e^{kx}$ , получим характеристическое уравнение (3.2)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Если  $k_1, \dots, k_n$  — корни характеристического уравнения, то уравнение (3.1) имеем частные решения

$$y = \alpha^{-p}(t) \exp \left( k_i \int_{t_0}^t \frac{ds}{\alpha(s)} \right), i = \overline{1, n}.$$

2°. Из следствия 2.3 получаем, что любое линейное дифференциальное уравнение

$$(D_t^n + a_1(t)D_t^{n-1}y + \dots + a_{n-1}(t)D_t + a_n(t))y(t) = f(t)$$

приводимо к уравнению с взвешенными производными

$$(D_{\beta,p}^n + a_1(\psi(x))D_{\beta,p}^{n-1} + \dots + a_{n-1}(\psi(x))D_{\beta,p} + a_n(\psi(x)))G_{\alpha,p}[y] = G_{\alpha,p}[f].$$

3°. Пусть  $\alpha = \alpha(t)$  и  $\beta = \beta(t)$  — непрерывные положительные функции на отрезке  $[c, d]$  и числа  $p, q \in [0, 1]$ .

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{1}{\alpha^p(t)}; \\ u_1(t) &= \frac{1}{\alpha^p(t)} \int_{a_1}^t \frac{d\xi}{\beta^q(\xi)\alpha^{1-p}(\xi)}; \\ u_k &= \frac{1}{\alpha^p(t)} \int_{a_k}^t \frac{d\xi}{\beta^q(\xi)\alpha^{1-p}(\xi)} \int_{a_k}^{\xi} \frac{u_{k-2}(\xi)}{\beta^{1-q}(\xi)} d\xi \quad (k = 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Легко видеть, что для любого  $k = 0, 1, 2, \dots$  справедливы равенства

$$D_{\beta,q}D_{\alpha,p}u_{2k} = u_{2k+2}, \quad (3.4)$$

$$D_{\beta,q}D_{\alpha,p}u_{2k+1} = u_{2k-1}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим следующие ряды

$$K_{\alpha,p}(t) = u_0(t) + u_2(t) + \dots + u_{2k}(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t), \quad (3.6)$$

$$S_{\alpha,\beta}(t) = u_1(t) + u_3(t) + \dots + u_{2k+1}(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1}(t). \quad (3.7)$$

**Теорема 3.1.** Пусть для последовательности чисел  $\{a_k\}$  найдутся числа  $c', d'$  и натуральное число  $n_0$ , что  $a_k \in (c', d')$  при  $k > n_0$ . Обозначим через  $a' = \min\{a_k : 1 \leq k \leq n_0\}$  и  $a'' = \max\{a_k : 1 \leq k \leq n_0\}$ . Если функции  $\alpha(t), \beta(t)$  положительны и непрерывны на некотором отрезке  $[c, d]$ , содержащем точки  $a', a'', c', d'$ , то ряды (3.6) и (3.7) абсолютно и равномерно сходятся, по крайней мере, на отрезке  $[c', d']$  и допускают взвешенное дифференцирование (по крайней мере для  $t \in (c', d')$ ), причем

$$D_{\beta,q}D_{\alpha,p}K_{\alpha,\beta}(t) = K_{\alpha,\beta}(t), \quad (3.8)$$

$$D_{\beta,q}D_{\alpha,p}S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(t). \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Из теоремы 3.1 получаем, что общее решение уравнения взвешенными производными  $D_{\beta,q}$  и  $D_{\alpha,p}$  вида

$$D_{\beta,q}D_{\alpha,p}y = y \quad (3.10)$$

представимо в виде

$$y = C_1 K_{\alpha,\beta}(t) + C_2 S_{\alpha,\beta}(t), \quad (3.11)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Действительно, линейная зависимость функции  $K_{\alpha,\beta}$  и  $S_{\alpha,\beta}$  очевидна в случае  $a_2 = a_k$  для  $k > 2$  на отрезке  $[a_k, d]$ . Тогда имеем

$$K_{\alpha,\beta}(a_2) = \frac{1}{\alpha^p(a_2)}, \quad D_{\alpha,p}K_{\alpha,\beta}(a_2) = 0, \quad D_{\alpha,p}S_{\alpha,\beta}(a_2) = 1.$$

Для функции (3.11) получим

$$y(a_2) = C_1 \alpha^{-p}(a_2) + C_2 \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{\beta-1}(\xi) d\xi,$$

$$y'(a_2) = C_1 \cdot \left( -\frac{p\alpha'(a_2)}{\alpha^{p+1}(a_2)} \right) + C_2 \left[ -\frac{p\alpha'(a_2)}{\alpha^p(a_2)} \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{p-1}(\xi) d\xi + \beta^{-q}(a_2) \alpha^{-1}(a_2) \right]$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^{-p}(a_2), & \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{p-1}(\xi) d\xi \\ -p\alpha'(a_2) \alpha^{-p-1}(a_2), & -p\alpha'(a_2) \alpha^{-p}(a_2) \int_{a_1}^{a_2} \beta^{-q}(\xi) \alpha^{p-1}(\xi) d\xi + \beta^{-q}(a_2) \alpha^{-1}(a_2) \end{vmatrix} \\ = \alpha^{-p-1}(a_2) \beta^{-q}(a_2) \neq 0.$$

Следовательно, формула (3.11) дает общее решение уравнения (3.10) при произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$ .

4°. Рассмотрим уравнение вида

$$D_t^2 y + a_1(t) D_t y + a_0(t) y = 0, \quad (3.12)$$

где  $a_1, a_0$  — любые непрерывные функции. Имеет место

**Теорема 3.2.** Любое уравнение (3.12) может быть представимо в виде (3.10), если функция  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + \left[ a_1(t) - \frac{1}{p} a_0(t) - \left( \exp \left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right)^{\frac{1}{(p+1)q}} \right] = 0, \quad (3.13)$$

а функция  $\beta$  — равенству

$$\beta = \alpha^{-1} \exp \left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{(p+1)q}}, \quad (3.14)$$

а числа  $p \in (0, 1], q \in [0, 1]$  — фиксированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя представление (1.3) взвешенной производной, получим

$$\begin{aligned} D_{\beta,q}D_{\alpha,p}y &= (\beta D_t + q\beta')(\alpha D_t y + p\alpha' y) = \\ &= \alpha\beta D_t^2 y + [(1+p)\beta\alpha' + q\beta'\alpha]D_t y + (pq\alpha'\beta' + p\beta\alpha'')y. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.10) принимает вид

$$D_t^2 y + \left[ (1+h)\frac{\alpha'}{\alpha} + q\frac{\beta'}{\beta} \right] D_t y + \left( pq\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} \right) y = 0. \quad (3.15)$$

Сравнивая (3.15) и (3.16), получаем

$$a_1(t) = (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + q\frac{\beta'}{\beta} = \left( \ln(\alpha^{1+p} \cdot \beta^q) \right)'; \quad (3.16)$$

$$a_0(t) = pq\frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\beta'}{\beta} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta}. \quad (3.17)$$

Из равенства (3.14) имеем

$$\alpha \cdot \beta = \left[ \exp\left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right]^{\frac{1}{(p+1)q}}.$$

Учитывая равенство

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{1}{q} \left[ a_1(t) + (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} \right],$$

вытекающее из (3.16), имеем

$$a_0(t) = pa_1(t) + p(1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + p\frac{\alpha''}{\alpha} - \left[ \exp\left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right]^{-\frac{1}{(p+1)q}}$$

или

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + \left[ a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \left( \exp\left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right)^{-\frac{1}{(p+1)q}} \right] \alpha = 0. \quad (3.18)$$

Таким образом, для нахождения функций  $\alpha$  и  $\beta$  получим систему

$$\begin{cases} \alpha'' + (1+p)\alpha' + \left[ a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \left( \exp\left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right)^{-\frac{1}{(p+1)q}} \right] \alpha = 0, \\ \alpha \cdot \beta = \left[ \exp\left( \int_{t_0}^t a_1(\xi) d\xi \right) \right]^{\frac{1}{(p+1)q}}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Теорема доказана.

Положим в (3.13)

$$h(t) = a_1(t) - \frac{1}{p}a_0(t) - \exp\left(\int_{t_0}^t a_1(\xi)d\xi\right)^{-\frac{1}{(1+p)q}}. \quad (3.18)$$

Тогда уравнение (3.13) принимает вид

$$\alpha'' + (1+p)\alpha' + h(t)\alpha = 0. \quad (3.19)$$

Разделив обе части на  $\alpha$ , получим

$$\frac{\alpha''}{\alpha} + (1+p)\frac{\alpha'}{\alpha} + h(t) = 0.$$

Введем следующие обозначения

$$z = \frac{\alpha'}{\alpha}, \quad z' = \frac{\alpha''\alpha - (\alpha')^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha''}{\alpha} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^2.$$

Тогда окончательно получим уравнение Риккати [4]

$$z' + (1+p)z + z^2 + h(t) = 0.$$

Таким образом, уравнение (3.12) приводимо к виду (3.10), если функция  $\frac{\alpha'}{\alpha}$  удовлетворяет уравнению Риккати (3.20), а функция  $\beta$  определяется равенством (3.14).

### Литература

1. Муравьев П. А. Обобщенная производная и ее применение к решению обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем.—1962.—№ 1 (26).—С. 89–101.
2. Глушко В. П., Савченко Ю. Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ.—1985.—Т. 23.—С. 125–218.
3. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды // ДАН СССР.—1956.—Т. 109, № 5.—С. 913–915.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—Минск: Высшая школа, 1974.