Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **517.98**

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Н. Шотаев

В работе рассматриваются вопросы, связанные с регулярными билинейными операторами в векторных решетках, а именно: приводится достаточно просто проверяемое условие анормальности для таких операторов (п. 1) и дается описание осколков положительного билинейного оператора (п. 2). Основные определения и утверждения см. в [1] и [2].

1. Пусть E и F — векторные решетки, G — K-пространство.

Определение. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называется *положительным*, если $b(e, f) \geqslant 0$ при всех $e \geqslant 0$, $f \geqslant 0$ и *регулярным*, если он представим в виде $b = b_1 - b_2$, где b_1 и b_2 — положительные билинейные операторы.

Определение. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называется *раздельно o-непрерывным* (*порядково-непрерывным*), если частные отображения $b(e, \cdot) : F \to G$, и $b(\cdot, f) : E \to G$ o-непрерывны при всех $f \in F$ и $e \in E$.

Докажем, что из раздельной o-непрерывности регулярного билинейного оператора следует его o-непрерывность по совокупности переменных.

Пусть $e_\alpha \xrightarrow{(o)} e$ и $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$. Покажем, что тогда $b(e_\alpha, f_\alpha) \xrightarrow{(o)} b(e, f)$. Имеем

$$|b(e_\alpha, f_\alpha) - b(e, f)| = |b(e_\alpha, f_\alpha) - b(e_\alpha, f) + b(e_\alpha, f) - b(e, f)|$$

$$\leqslant |b(e_\alpha, f_\alpha - f) + b(e_\alpha - e, f)| = |b(e_\alpha, f_\alpha - f)| + g_\alpha \leqslant g_\alpha + |b|(|e_\alpha|, |f_\alpha - f|),$$

где $g_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$. По определению, $e_\alpha \xrightarrow{(o)} e$ означает, что существуют возрастающее направление $u_\alpha \uparrow e$ и убывающее направление $v_\alpha \downarrow e$ и выполняется $u_\alpha \leqslant e_\alpha \leqslant v_\alpha$. С другой стороны,

$$|e_\alpha| = e_\alpha \vee (-e_\alpha) \leqslant v_\alpha \vee (-u_\alpha) \leqslant v_{\alpha_o} \vee u_{\alpha_o} \quad \text{при } \alpha \geqslant \alpha_o.$$

Тогда

$$|b|(|e_\alpha|, |f_\alpha - f|) \leqslant |b|(v_{\alpha_o} \vee u_{\alpha_o}, |f_\alpha - f|) \xrightarrow{(o)} 0.$$

Тем самым

$$|b(e_\alpha f_\alpha - b(e, f)| \xrightarrow{(o)} 0$$

и $b(e_\alpha f_\alpha) \xrightarrow{(o)} b(e, f)$.

Доказательство закончено.

Замечание. В дальнейшем вместо o-непрерывности по совокупности переменных будем говорить о порядковой непрерывности билинейного оператора.

Через $\mathcal{L}_r(F,G)$ и $\mathcal{L}_n(F,G)$ соответственно обозначим K-пространства регулярных и регулярных порядково непрерывных операторов из F в G, $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $\mathcal{B}_n(E,F;G)$ соответственно обозначают K-пространства билинейных регулярных и билинейных регулярных порядково непрерывных операторов из $E\times F$ в G (см. [3]). Там же приводится следующее утверждение: K-пространства $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $\mathcal{L}_r(E,\mathcal{L}_r(F,G))$ линейно и решеточно изоморфны, из которого очевидно следует, что пространства $\mathcal{B}_n(E,F;G)$ и $\mathcal{L}_n(E,\mathcal{L}_n(F,G))$ также линейно и решеточно изоморфны.

Определение. Оператор $b\in\mathcal{B}_r(E,F;G)$ называется *анормальным* (соответственно *анормальным по одной переменной*), если он обращается в ноль на некотором фундаменте векторной решетки $E\times F$ (соответственно на фундаменте вида $E_o\times F$ или $E\times F_o$, где E_o и F_o — фундаменты в E и F). Если оператор $b\in\mathcal{B}_r(E,F;G)$ дизъюнктен всем анормальным (анормальным по одной переменной), то его будем называть *нормальным* (соответственно, *нормальным по одной переменной*).

Теорема 1. *Для оператора $b\in\mathcal{B}_r(E,F;G)$ равносильны следующие условия:* (1) *b раздельно нормален,* (2) *b нормален,* (3) *b порядково непрерывен.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(3). Допустим, что b раздельно нормален и $T=hb: E\longrightarrow\mathcal{L}(F,G)$, где h — указанный выше изоморфизм. Если оператор $S: E\longrightarrow\mathcal{L}(F,G)$ анормален, то $S\big|_{E_o}=0$ для некоторого фундамента $E_o\subset E$. Но это означает $(Se)f=0$ для всех $e\in E_o$ и $f\in F$. Отсюда для билинейного оператора $c=h^{-1}S$ получаем $c(e,f)=0$ $(e\in E_o, f\in F)$, т. е. c анормален по одной переменной. По условию bdc, что равносильно TdS. Следовательно, T нормален. Для линейного оператора понятия порядковой непрерывности и нормальности совпадают (см.например [4, теорема V111.5.1]), поэтому T порядково непрерывен. Это дает порядковую непрерывность b по первой переменной. Аналогично доказывается порядковая непрерывность по второй переменной. Тогда условие (3) становится очевидным.

(3)$\Longrightarrow$(2). Пусть b порядково непрерывен, b' — произвольный анормальный оператор из $\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $b_o=|b|\wedge|b'|$. Для любого $c\in\mathcal{B}_r(E,F;G)$ и $e\in E^+$

$$(hc^+)e=(hc)^+e=\sup\{(hc^+)e' : 0\leqslant e'\leqslant e\}.$$

Из этой формулы видно, что если c порядково непрерывен или анормален, то c^+ тоже порядково непрерывен или анормален соответственно. Значит $|b|$ порядково непрерывен, $|b'|$ анормален, а b_o и порядково непрерывен и анормален. Так как фундамент в $E\times F$ является порядково плотным подмножеством, то получается $b_o=0$, т. е. bdb' и b нормален.

(2)$\Longrightarrow$(1). Это утверждение очевидно. Теорема доказана.

Замечание. Понятие анормального билинейного оператора впервые введено в [5]. Там же установлена эквивалентность (2)$\Longleftrightarrow$(3). Доказанная эквивалентность (1)$\Longleftrightarrow$(2) дает более просто проверяемое условие анормальности. В приведенном доказательстве использовались некоторые соображения из [5].

2. Следующая задача состоит в описании осколков положительного билинейного оператора. Сначала рассмотрим случай линейных операторов. Пусть E и F — K-пространства и $T: E\to F$ — положительный оператор. Базу единичных элементов

K-пространства $\{T\}^{dd}$ — компоненты, порожденной оператором T в K-пространстве регулярных операторов, — обозначим через B_T. Следуя терминологии Р. Пахте [9], каждый элемент базы B_T вида $\rho T\sigma$ (где ρ и σ — порядковые проекторы в F и E соответственно) будем называть элементарным, а каждый элемент вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i T\sigma_i$ — простым. Множество всех простых элементов булевой алгебры B_T обозначим через A_T.

Замечание. В [6] показано, что если T является оператором Магарам или порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом, то $B_T = A_T$.

Для произвольного множества $D \subset B_T$ положим

$$D^{\uparrow} = \{e \in B_T : \text{ существует направление } (e_\alpha) \subset D \text{ такое, что } e_\alpha \uparrow e\}$$

и

$$D^{\downarrow} = \{e \in B_T : \text{ существует направление } (e_\alpha) \subset D \text{ такое, что } e_\alpha \downarrow e\}.$$

Сформулируем теперь основной результат о структуре булевой алгебры B_T.

Теорема 2 [6]. *Пусть E и F — произвольные K-пространства, а $T : E \to F$ — положительный оператор. Тогда $B_T = A_T^{\uparrow\downarrow\uparrow}$.*

Замечания. Р. Пахте [9], а затем Х. Алипрантис и О. Буркиншо [10] показали этот результат в случае существования достаточного числа порядково непрерывных функционалов на F (см. также [7]).

Используя технику булевозначного анализа, аналогичные результаты получены С. С. Кутателадзе в [8], без дополнительных предположений.

Для проекторов ρ, σ обозначим через $\rho \otimes \sigma$ проектор в $\mathcal{L}(E, F)$, действующий по правилу $T \to \rho T\sigma$ $(T \in \mathcal{L}(E, F))$. Пусть $A_{\mathcal{L}_r}$ — множество всех проекторов в $\mathcal{L}(E, F)$ вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho_i \otimes \sigma_i$, где $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathfrak{P}(F)$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathfrak{P}_r(E)$. Символ $\mathfrak{P}_r(Z)$ всегда обозначает булеву алгебру порядковых проекторов в K-пространстве Z.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\mathfrak{P}_r(\mathcal{L}(E, F)) = (A_{\mathcal{L}_r})^{\uparrow\downarrow\uparrow}.$$

Доказательство. Пусть $\pi \in \mathfrak{P}_r(\mathcal{L}(E, F))$. Зафиксируем полное семейство попарно дизъюнктных положительных операторов $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в пространстве $\mathcal{L}(E, F)$. Если π_ξ — проектор на компоненту $\{T_\xi\}^{dd}$, то $\pi = \sup\limits_{\xi\in\Xi}\pi\pi_\xi$. Для конечного множества $\theta \in \Xi$ обозначим через $\mathfrak{P}_\theta$ булеву алгебру порядковых проекторов, действующих на компоненте $\{\sum_{\xi\in\theta} T_\xi\}^{dd}$. При этом будем считать, что $\mathfrak{P}_\theta \in \mathfrak{P}_r(\mathcal{L}(E, F))$. Этого можно добиться, если доопределить проектор в $\{T_\theta\}^{dd}$ нулем на $\{T_\theta\}^{d}$. Но тогда $\sum\limits_{\xi\in\theta}\pi\pi_\xi \in \mathfrak{P}_\theta$, следовательно, $\pi \in (\cup\mathfrak{P}_\theta)^{\uparrow}$, где объединение берется по всем конечным θ. По теореме 2 $\mathfrak{P}_\theta \in (A_{\mathcal{L}_r})^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, значит

$$\pi \in ((A_{\mathcal{L}_r})^{\uparrow\downarrow\uparrow})^{\uparrow}(A_{\mathcal{L}_r})^{\uparrow\downarrow\uparrow},$$

что и требовалось показать.

Теорема 3. *Пусть E, F и G — K-пространства и $b : E\times F \to G$ — положительный билинейный оператор. Пусть B_b — булева алгебра осколков b, а A_b — множество элементов из B_b вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_k b(\rho_k \otimes \sigma_k)$, где $\sigma_k \in \mathfrak{P}_r(E)$ $\sigma_k \in \mathfrak{P}_r(F)$ и $\sigma_k\mathfrak{P}_r(G)$ (здесь $\sigma b(\rho \otimes \sigma)$ — оператор, действующий по правилу $(e,f) \to \sigma b(\sigma e, \rho f)$ $(e \in E, f \in F)$. Тогда $B_b = (A_b)^{\uparrow\downarrow\uparrow}$.*

Доказательство. Рассмотрим положительный оператор $S{:}E \to \mathcal{L}_r(F,G)$ такой, что $(Se)(f) = b(e,f)$. Так как соответствие $b \to S$ является изоморфизмом K-пространств, то нужно только показать, что $B_S = (A_S^{\circ})^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, где A_S° состоит из осколков S вида $\sigma \otimes \rho S \sigma$ и их конечных сумм, где $\sigma \in \mathfrak{P}_r(E)$, $\rho \in \mathfrak{P}_r(F)$ и $\sigma \in \mathfrak{P}_r(G)$. Для фиксированного σ, по предыдущему следствию, получим $\pi S \sigma \in (A_S^{\circ})^{\uparrow\downarrow\uparrow}$, где π — произвольный проектор в $\mathcal{R}(F,G)$. Теперь уже можно сослаться на теорему 2 и доказательство заканчивается.

Литература

1. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.
3. *Шотаев Г. Н.* О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация. Тр. Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1986. Вып. 37. С. 38–50.
4. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Кусраев А. Г.* Об одном свойстве базы K-пространства регулярных операторов и некоторых его приложениях. Новосибирск, 1977. 17 с. Препринт АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.
6. *Стрижевский В. З.* Структура пространства порядково-непрерывных операторов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. Новосибирск, 1985. 12 с.
7. *Акилов Г. П., Колесников Е. В., Кусраев А. Г.* Лебегово расширение положительного оператора // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 3. С. 521–524.
8. *Кутателадзе С. С.* Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 5. С. 111–119.
9. *Pagter R.* The components of a positive operator // Indag. math. 1983. V. 45, № 2. P. 229–241.
10. *Aliprantis Ch. D., Burkinshow O.* The components of a positive operator // Math. Z. V. 184, № 2. P. 245–257.