Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **517.98**

H-ОПЕРАТОРЫ В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ КВАЗИНОРМОЙ $E(\Omega)$

В. Г. Фетисов, Р. Р. Рандриананжа

Цель настоящей работы — с единой точки зрения рассмотреть поведение нелинейных операторов типа суперпозиции, интегральных операторов Гаммерштейна и Урысона в общих квазинормированных идеальных пространствах. Некоторые из нижеприведенных результатов анонсированы нами ранее в статье [1].

1. Базовые обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Пусть (Ω_i, μ_i) — для простоты ограниченные замкнутые множества конечномерных евклидовых пространств $\mathbb{R}_i$, $(i = \overline{1,n})$, с σ-конечными лебеговыми мерами; (Ω, μ) — их прямое произведение. Через $E_i(\Omega_i)$ $(i = \overline{1,n})$ обозначим произвольные идеальные симметричные (в смысле терминологии Заанена А. С., Люксембурга В. А., Забрейко П. П.) квазинормированные (см. работы Муселяка Ю., Трибеля Х.) функциональные пространства, элементами которых являются измеримые на Ω_i функции, через $\|\cdot\|_{E_i(\Omega_i)}$ — квазинорму в пространстве $E_i(\Omega_i)$.

Определение 1. Множество всех измеримых по Лебегу на $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ функций $u(s)$, $(s = (s_1, \ldots, s_n))$, для которых конечно выражение

$$\|\ldots\| \, \|u(s)\|_{E_1(\Omega_1)}\|_{E_2(\Omega_2)} \ldots \|_{E_n(\Omega_n)}, \tag{1}$$

называется *идеальным квазинормированным пространством со смешанной квазинормой* (1) (кратко ИКПСК) $E(\Omega)$.

Как известно, для ИКПСК $E(\Omega)$ выполняются следующие два условия:

а) если $u(s) \in E$ и $|w(s)| \leqslant |u(s)|$, где $w(s)$ — измеримая на Ω функция, то $w(s) \in E$ и $\|w; E\| \leqslant \|u; E\|$;

б) если $u(s) \in E$ и $u(s)$, $w(s)$ равноизмеримы, то $w(s) \in E$ и $\|w; E\| = \|u; E\|$.

Будем считать, что ИКПСК $E(\Omega)$ содержит константы, тогда в силу условия а) пространство $E(\Omega)$ содержит все индикаторы $\chi_e(s)$ измеримых множеств $e \subset \Omega$.

Примерами ИКПСК $E(\Omega)$ могут служить:

а) обобщенное пространство Лебега $L_{(\alpha)}(\Omega)$, состоящее из тех μ-измеримых на Ω функций $u(s)$, для которых:

$$\|u(s); (\alpha)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_n} \ldots \left[\int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} |u(s_1, s_2, \ldots, s_n)|^{\frac{1}{\alpha_1}} d\mu_1 \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} d\mu_2 \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}} \ldots d\mu_n \right\}^{\alpha_n} < \infty, \tag{2}$$

б) обобщенное пространство Лебега $L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)$, состоящее из тех μ-измеримых на Ω функций $u(s)$, для которых:

$$\|u(s);(\overline{\alpha})\| = \left\{ \int\limits_{\Omega_1} \ldots \left[\int\limits_{\Omega_{n-1}} \left(\int\limits_{\Omega_n} |u(s_1, s_2, \ldots, s_n)|^{\frac{1}{\alpha_n}} d\mu_n \right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}} d\mu_{n-1} \right]^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}} \ldots d\mu_1 \right\}^{\alpha_1} < \infty; \tag{3}$$

в) обобщенное модулярное пространство Орлича $L^*_\varphi(\Omega)$, состоящее из тех измеримых на Ω функций $u(s)$, для которых:

$$\|u(s);\varphi\| = \| \ldots \| \; \|u(s)\|_{L^*_{\varphi_1}(\Omega_1)} \|_{L^*_{\varphi_2}(\Omega_2)} \cdots \|_{L^*_{\varphi_n}(\Omega_n)} < \infty. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$ — произвольные действительные числа, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\overline{\alpha}) = (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$, $\varphi_i(u)$ — произвольные функции, принадлежащие классу $\varphi(L)$ (см. [2]).

Случай, когда ИКПСК $E(\Omega) = L_p$, где $p = (p_1, p_2)$, $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, был детально изучен в работе [3]; если $E(\Omega) = L_{(\alpha)}$, где $\alpha_i \leqslant 1$ $(i = \overline{1,n})$, был рассмотрен в работе [4] (более интересные примеры для банахова случая можно найти в статьях М.Мильмана).

Нас в основном интересует тот случай, когда хотя бы один из индексов в $L_{(\alpha)}$ и $L_{(\overline{\alpha})}$ больше единицы, или же когда одна из функций $\varphi(u)$ — вогнутая. В качестве модельного ИКПСК можно рассмотреть обобщенное пространство Лебега $L_{(\alpha)}(\Omega)$.

Лемма 1. *$L_{(\alpha)}(\Omega)$ является линейным метрическим пространством с метрикой:*

$$\rho(u,v) = \begin{cases} \|u(s) - w(s);(\alpha)\|^{\frac{1}{\alpha_n}} & \text{при } 1 < \alpha_n, \ \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}, \\ \|u(s) - w(s);(\alpha)\|^{\frac{1}{\alpha_1}} & \text{при } 1 < \alpha_1, \ \alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $i = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Выполнение первых двух условий метрики очевидно, в доказательстве нуждается проверка неравенства треугольника. Рассмотрим случай $1 < \alpha_n$, $\alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ (второй случай в (5) аналогичен).

а) Пусть $\alpha_n > 1$ и $1 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$, тогда в силу очевидного неравенства $(A^X + B^X) \geqslant (A+B)^X$ при $A, B \in \mathbb{R}^+$, и $0 < x \leqslant 1$, имеем

$$\rho(u,w) = \int\limits_{\Omega_n} \left[\ldots \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} |u(s) - w(s))|^{\frac{1}{\alpha_1}} d\mu_1 \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} d\mu_2 \ldots \right]^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}} d\mu_n \leqslant \rho(u,v) + \rho(v,w),$$

где $\rho(u,v)$ и $\rho(v,w)$ определяются по первой из формул (5).

б) Пусть $\alpha_n > 1$, $\alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ и $\alpha_1 \leqslant 1$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\rho(u,w) \leqslant& \int\limits_{\Omega_n}\Bigg[\ldots\int\limits_{\Omega_2}\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}|u(s)-w_1(s))|^{\frac{1}{\alpha_1}}d\mu_1\Bigg)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}d\mu_2 \\
&+\int\limits_{\Omega_2}\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}|w_1(s)-w(s))|^{\frac{1}{\alpha_1}}d\mu_1\Bigg)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}d\mu_2\ldots\Bigg]^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}}d\mu_n \\
&\leqslant \int\limits_{\Omega_n}\Bigg[\ldots\int\limits_{\Omega_2}\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}|u(s)-w_1(s))|^{\frac{1}{\alpha_1}}d\mu_1\Bigg)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}d\mu_2\ldots\Bigg]^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}}d\mu_n \\
&+\int\limits_{\Omega_n}\Bigg[\ldots\int\limits_{\Omega_2}\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}|w_1(s)-w(s))|^{\frac{1}{\alpha_1}}d\mu_1\Bigg)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}d\mu_2\ldots\Bigg]^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}}d\mu_n \\
&= \rho(u,w_1)+\rho(w_1,w).
\end{aligned}$$

Лемма 2. *Для любых элементов $u(s) \in L_{(\alpha)}$ и $w(s) \in L_{(\beta)}$ выполняется обобщенное неравенство Гёльдера:*

$$\|u \cdot w; (\alpha+\beta)\| \leqslant \|u; (\alpha)\| \cdot \|w; (\beta)\|, \tag{6}$$

где $(\alpha+\beta) = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \ldots, \alpha_n+\beta_n)$.

Доказательство леммы 2 вытекает из последовательного применения n раз обычного неравенства Гёльдера по каждой из переменных $s_1, s_2, \ldots, s_n$ в отдельности.

Следствие 1. *Функция $f((\alpha)) = \|u(s); (\alpha)\|$ при любом фиксированном элементе $u(s) \in L_{(\alpha)}$ непрерывна по (α) и логарифмически выпукла.*

Доказательство вытекает из неравенства (6); т. е. при любом $\tau \in]0,1[$ выполняется

$$\|u(s); \alpha(\tau)\| \leqslant \|u(s); (\alpha^0)\|^{1-\tau} \cdot \|u(s); (\alpha^1)\|^{\tau}, \tag{7}$$

где значение $\alpha(\tau) = (1-\tau)\cdot\alpha^0 + \tau\cdot\alpha^1$, (α^0) и (α^1) — произвольные наборы положительных индексов $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0)$ и $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_n^1)$

Из неравенства (7) сразу следует, что функция $f((\alpha))$ непрерывна и логарифмически выпукла по (α). Пусть, в частности, $\mu(\Omega_i) < \infty$, $i = \overline{1, n}$.

Лемма 3. *ИКПСК пространство Лебега $L_{(\alpha)}(\Omega)$ вложено в $L_{(\gamma)}(\Omega)$ при каждом $\alpha_i < \gamma_i (i = \overline{1, n})$, причем*

$$\|u(s); (\gamma)\| \leqslant K \cdot \|u(s); (\alpha)\|, \tag{8}$$

где $u(s) \in L_{(\alpha)}(\Omega)$ и $K = (\mu\Omega_1)^{\gamma_1-\alpha_1}(\mu\Omega_2)^{\gamma_2-\alpha_2}\ldots(\mu\Omega_n)^{\gamma_n-\alpha_n}$.

Доказательство леммы 3 непосредственно вытекает из неравенства (6), если положить $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$, $w(s) \in L_{(\beta)}(\Omega)$ и соответственно равна единице при $\forall s \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$.

Как известно (см. [5]), в случае идеальных F-пространств сходимость по квазинорме влечет за собой сходимость по мере.

Аналогом леммы 1 из [5] является

Лемма 4. *Если последовательность измеримых на Ω функций $(u_n(s))$ сходится по смешанной квазинорме ИКПСК $E(\Omega)$ к функции $u_0 \in E^0(\Omega)$ ($E^0(\Omega)$ — подпространство элементов из $E(\Omega)$, имеющих абсолютно непрерывную квазинорму), то она сходится к $u_0(s)$ по мере и представляет собой абсолютно ограниченное множество. Справедливо и обратное утверждение.*

Доказательство. Пусть $\|u_n(s) - u_0(s); E(\Omega)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда она сходится к функции $u_0(s)$ по мере. Действительно, предположив противное, обязательно существует $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любого N найдется такой номер $n_k > N$, что выполняется $\mu\Omega_{(n_k)} = \mu\{s : |u_{n_k}(s) - u_0(s)| > \delta_0\} > \varepsilon_0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_{n_k} - u_0; E(\Omega)\| < \infty$. Рассмотрим множества вида $B_n = \bigcup_{k \geqslant n} \Omega_{(n_k)}$ и $B^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Можно заметить, что $\mu(B^*) \geqslant \varepsilon_0 > 0$.

Но с другой стороны имеем

$$\|\delta_0 \chi_{B^*}; E(\Omega)\| \leqslant \|P_{B^*}|u_{n_k}(s) - u_0(s)|; E(\Omega)\| \leqslant \|u_{n_k}(s) - u_0(s); E(\Omega)\|,$$

откуда следует, что $\chi_{B^*} = 0$ почти всюду на множестве Ω (χ_{B^*} — индикатор множества B^*), а значит, $\mu B^* = 0$.

Полученное противоречие доказывает, что (u_n) сходится к функции $u_0(s)$ по мере. Кроме того, так как $u_0(s) \in E^0(\Omega)$ и справедливо неравенство:

$$\|u_n \chi_D; E(\Omega)\| \leqslant \|\,|u_n - u_0|\chi_D; E(\Omega)\| + \|u_0 \chi_D; E(\Omega)\|,$$

то можно заметить, что последовательность (u_n) — абсолютно ограниченное множество (т. е. $\lim\limits_{\mu D \to 0} \sup\limits_{\forall u_n} \|\chi_D u_n; E(\Omega)\| = 0$, $n = 1, 2, \dots$).

Аналогично доказывается обратное утверждение: пусть последовательность (u_n) сходится к функции u_0 по мере и множество (u_n) абсолютно ограничено. Пусть $D = \{s : |u_0(s) - u_n(s)| > \delta\}$, где δ выбрано настолько малым, что $\|\delta \chi_\Omega(s); E(\Omega)\| < \varepsilon/3$. Тогда выполняется $\|u_n - u_0; E(\Omega)\| \leqslant \varepsilon$ начиная с некоторого номера N.

2. *H*-операторы в ИКПСК $E(\Omega)$

Определение 2. Пусть функция $h \in \varphi(L)$ (см. [2]), $E_1(\Omega)$ и $E_2(\Omega)$ суть произвольные ИКПСК, оператор $T : E_1 \to M$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Будем говорить, что T есть H_λ-*оператор*, если для $v \in E_1$ выполняется условие:

$$\|T(v) - T(v + \lambda u); E_2\| \\ \leqslant h(\|T(v) - T(v + \lambda \cdot \chi_{D_1} u); E_2\|) + h(\|T(v) - T(v + \lambda \cdot \chi_{D_2} u); E_2\|)$$

для каждого элемента $u \in E_1$ и для всех измеримых подмножеств D_1 и D_2 таких, что $D_1 \cup D_2 = \Omega$ и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, χ_D — индикатор множества D.

Примерами H_λ-операторов могут служить нелинейные интегральные операторы Гаммерштейна, Вольтерра и Урысона. Отметим прежде всего, что определение 2 эквивалентно:

$$\|T_v(u); E_2\| \leqslant h(\|T_v(\chi_{D_1} u); E_2\|) + h(\|T_v(\chi_{D_2} u); E_2\|) \tag{9}$$

для каждого элемента $u \in E_1$ и для всех измеримых подмножеств D_1 и D_2 таких, что $D_1 \cup D_2 = \Omega$ и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $\lambda = 1$.

H_λ-оператор при $\lambda = 1$ называется H-*оператором.*

В качестве примера покажем, что линейный интегральный оператор Урысона является H-оператором. В самом деле, для любых Ω_1 и Ω_2 таких, что $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, справедливо:

$$\begin{aligned} T_0(v(s)) - T_0(v(s) + \lambda u(s)) &= \int\limits_{\Omega} \{K[s,t,v(t)] - K[s,t,v(t) + \lambda u(t)]\}\, d\mu \\ &= \int\limits_{\Omega_1} \{K[s,t,v(t)] - K[s,t,v(t) + \lambda \chi_{\Omega_1} u(t)]\}\, d\mu \\ &+ \int\limits_{\Omega_2} \{K[s,t,v(t)] - K[s,t,v(t) + \lambda \chi_{\Omega_2} u(t)]\}\, d\mu \\ &= T_0(v(s)) - T_0(v(s) + \lambda\chi_{\Omega_1} u(s)) + T_0(v(s)) - T_0(v(s) + \lambda\chi_{\Omega_2} u(s)), \end{aligned}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим некоторые достаточные признаки ограниченности и непрерывности H_λ-операторов в ИКПСК $E(\Omega)$. Через $E_{10}(\Omega)$ обозначим ИКПСК типа абсолютно непрерывного относительно пересечения (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть даны два ИКПСК E_1 и E_2, $T : E_1 \to M$ — некоторый H-оператор. Если существует открытое подмножество $A(\Theta)$, содержащее нуль Θ пространства E_{10}, такое, что $T(A) \subset E_2$, то справедливо включение $T(E_{10}) \subset E_2$.*

Доказательство. Докажем теорему 1 в предположении, что $T(\Theta) = \Theta$. Пусть существует открытое подмножество $A(\Theta)$, содержащее нуль Θ пространства E_{10}, такое, что $T(A) \subset E_2$ (отметим, что $\Theta \in E_{10}$). Можно заметить, что существует $r > 0$, такое, что открытый шар $B(\Theta, r)$ с центром в Θ и радиуса r принадлежит рассматриваемому подмножеству A.

а) Пусть сначала дано множество $Y \subset \Omega$ такое, что $\mu(Y) < \infty$, и рассмотрим сужение оператора $T : E_{10}(Y) \to M$, где $E_{10}(Y)$ образовано теми элементами из $E_{10}(\Omega)$, для которых $\operatorname{supp} u \subset Y$.

Напомним (см. [1]), что ИКПСК E_{10} есть пространство типа абсолютно непрерывного относительно пересечения, что означает

$$E_{10} = \Big\{x \in E_1 : \forall(\Omega_n) \subset \Omega, \Omega_n \downarrow, \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n\Big) = 0 \Rightarrow \lim \|\chi_{\Omega_n} x; E_1\| = 0\Big\}.$$

Пусть теперь элемент $u \in E_{10}$, тогда существует $\alpha > 0$ такое, что $\mu(D_0) < \alpha$ влечет условие $\|\chi_{D_0} u; E_1\| < r$. Так как мера μ по предположению неатомическая, то будет существовать последовательность $(Y_i)_{i=1}^{i=m}$ измеримых множеств, подчиняющихся условиям $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Y_i$ и $\mu(Y_i) < \alpha$. Но так как $\|\chi_{Y_i}; E_1\| < r$, тогда и $\|T(\chi_{Y_i} u); E_2\| < \infty$.

Учитывая, что T есть H-оператор, имеем:

$$\|T(\chi_Y u); E_2\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} h(\|T(\chi_{Y_i} u); E_2\|) < \infty,$$

т. е. $(\chi_Y u) \in E_2$.

б) Обратимся к произвольному случаю множества Ω. Очевидно существует последовательность (Ω_i) μ-измеримых множеств $\Omega_i \uparrow$, $\mu(\Omega_i) < \infty$ таких, что $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Обозначим через $\Omega'_i = \Omega \backslash \Omega_i$, тогда ясно, что $\Omega'_i \downarrow$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Omega'_i = \emptyset$; и обозначим через $T : E_{10} \to M$.

Пусть элемент $u \in E_{10}$, тогда существует номер $i_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\|\chi_{\Omega'_{i_0}} u; E_1\| < r$ и тогда $T(\chi_{\Omega_{i_0}} u) \in E_2$ по условию теоремы. T, будучи H-оператором, дает:

$$\|T(u); E_2\| \leqslant h(\|T(\chi_{\Omega_i} u); E_2\|) + h(\|T(\chi_{\Omega'_i} u); E_2\|) < \infty.$$

Для случая $T(\Theta) \neq \Theta$ доказательство аналогичное рассмотренному.

Примечание 1. Условие того, что пространство E_1 есть типа абсолютно непрерывного относительно пересечения, является весьма существенным. Если его отбросить, утверждение теоремы 1 перестает быть справедливым. Рассмотрим соответствующий пример.

Пусть $\Omega = [0,1]$, μ есть мера Лебега на $[0,1]$, через E_1 и E_2 обозначим обычные пространства Лебега:

$$(E_1(\Omega), \|\cdot\|_1) = (L^\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty^{1/2}) \quad \text{и} \quad (E_2(\Omega), \|\cdot\|_2) = (L^p[0,1], \|\cdot\|_p),$$

где $0 < p \leqslant 1$.

Очевидно, что пространство E_1 в силу его несепарабельности, не есть типа E_{10}.

Пусть далее нелинейный оператор $T : E_1 \to M$ определяется формулой: $T(u) = |u(s)| - 1$, если $\|u; E_1\| \leqslant 1$, и соответственно формулой: $T(u) = |u(s)| - 1/s^{1/p}$, если $\|u; E_1\| > 1$. Можно проверить, что T есть H-оператор.

Зададим открытое подмножество $A(\Theta)$, содержащее нуль Θ, пусть $A(\Theta) = B(0,1)$. Зададим элемент u из $A(\Theta)$ такой, что $\|u; E_1\| < 1$.

Здесь выполняется:

$$\|T(u); E_2\| = \|\,|u| - 1;\ L^p\| = \int\limits_0^1 |\,|u(s)| - 1|^p \, d\mu(s)$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 |u|^p \, d\mu + \int\limits_0^1 d\mu(s) \leqslant \left(\|u\|_\infty^{1/2}\right)^{2p} + 1 = \|u(s); E_1\|^{2p} + 1 < \infty.$$

Однако, если взять, например, функцию $u(s) = 3$ при каждом $s \in [0,1]$, то имеем соответственно $u(s) \in E_1$, но уже

$$\|T(u); E_2\| = \int\limits_0^1 |u(s) - 1/s^{1/p}|^p \, d\mu(s) = \int\limits_0^1 \frac{2}{s} \, d\mu$$

и ясно, что [[образ]] $T(u) \notin E_2$. Таким образом, мы видим, что условие E_{10} существенно.

Покажем теперь, что при сохранении условия того, что ИКПСК E_1 есть типа E_{10}, нельзя отбросить выполнение неравенства (9), т. е. того, что при $\lambda = 1$ T есть H-оператор.

Действительно, пусть $(E_1(\Omega), \|\cdot\|_1) = (L^{1/2}(\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2}})$, т. е. $E_1(\Omega)$ есть типа E_{10}, и $(E_2, \|\cdot\|_2) = (L^\infty, \|\cdot\|_\infty^{1/2})$.

Пусть далее нелинейный оператор T, действующий из E_1 в M, определяется формулой вида:

$$T(u(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |u(s)|^{\frac{1}{2}}\, d\mu(s) \Bigg)^n. \tag{10}$$

Можно проверить, что оператор T не подчиняется условию (9) при $\lambda = 1$, т. е. не является H-оператором.

Если $\|u; E_1\| < 1$, то $T(u) \in E_2$, но для каждого элемента $u \in E_1$ такого, что $\|u; E_1\| > 1$ получаем, что $\int\limits_{\Omega} |u(s)|^{1/2}\, d\mu \geqslant 1$ т. е. $T(u) \notin E_2$.

Пусть E_1 есть ИКПСК и C множество элементов из E_1. Множество C называется *абсолютно эквинепрерывным относительно пересечения* (кратко *а.э.о.п.*), если для каждой последовательности $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такой, что $D_n \downarrow$ и $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n) = 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{u\in C} \|\chi_{D_n} u; E_1\| = 0$.

Теорема 2. *Пусть даны 2 ИКПСК E_1 и E_2 и H-оператор $T : E_1 \to M$, непрерывный в нуле Θ_{E_1}, где $h(0) = 0$ и h-непрерывная в 0 функция.*

Тогда для всякого а.э.о.п. множества C из E_1 образ $T(C)$ ограничен по квазинорме в E_2.

Доказательство. Можно предположить без ограничения общности, что $T(\Theta_{E_1}) = \Theta_{E_2}$. Тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $\alpha > 0$ такое, что $0 \leqslant r < \alpha$ и $h(r) < \varepsilon$. По условию оператор T непрерывен в нуле, тогда для $\alpha > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|u; E_1\| < \delta$ влечет $\|T(u); E_2\| < \alpha$. Так как последовательность $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\Omega_i \uparrow$, $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ и $\mu(\Omega_i) < \infty$, то соответствующая последовательность $(\Omega_i')_{i\in\mathbb{N}}$, где $\Omega_i' = \Omega \backslash \Omega_i$, $\Omega_i' \downarrow$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Omega_i' = \emptyset$.

Из абсолютной эквинепрерывности относительно пересечения множества C следует, что для любого $\delta > 0$ существует индекс $i_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $\|\chi_{\Omega_{i_0}'} u; E_1\| < \delta$, тогда $\|T(\chi_{\Omega_{i_0}'} u); E_2\| < \alpha$ и $h(\|T(\chi_{\Omega_{i_0}'} u); E_2\|)$ меньше ε для каждого элемента u из множества C.

В то же время множество C абсолютно эквинепрерывно (см. [1]), тогда существует $\gamma > 0$ такое, что при $\mu(D) < \gamma$ будет $\|\chi_D u; E_1\| < \delta$ для каждого элемента $u \in C$. Так как $\mu(\Omega_{i_0}) < \infty$ и мера μ неатомическая, то найдется последовательность множеств $(Y_k)_{k=1}^p$ такая, что $\Omega_{i_0} = \bigcup\limits_{k=1}^{p_0} Y_k$ и $\mu(Y_k) < \gamma$. Тогда $\|\chi_{Y_k} u; E_1\| < \delta$ для всех номеров $k = \overline{1, p_0}$, и $u \in C$, и кроме того выполняется $h(\|T(\chi_{Y_k} u); E_2\|) < \varepsilon$. Из неравенства (9) вытекает, что

$$\|T(u); E_2\| \leqslant h(\|T(\chi_{\Omega_{i_0}'} u(s)); E_2\|) + h(\|T(\chi_{\Omega_{i_0}} u(s)); E_2\|)$$

для всякого элемента u из множества C. Значит, H-оператор T переводит C в ограниченное по квазинорме в E_2 множество $T(C)$.

Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть даны 2 ИКПСК E_1 и E_2 и H-оператор $T : E_1 \to M$. Пусть известно, что существует открытая окрестность нуля $A(\Theta)$ в E_1, такая, что $T(A)$ ограничен по квазинорме в E_2.*

Тогда для всякого а.э.о.п. множества C в E_1 образ $T(C)$ ограничен по квазинорме в E_2.

Определение 3. ИКПСК E называется *типа локально абсолютно непрерывного относительно пересечения* (кратко л.а.н.о.п.), если:

а) E абсолютно непрерывно относительно пересечения (см. [1]),

б) для любого $\alpha > 0$ и $r > 0$ существует функция $l : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что: l возрастает, $l(0) = 0$ и $l(n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, и наконец, если $Y \in \Omega$ с $\mu(Y) < \infty$ такая, что $\|\chi_Y u; E\| < \inf(\alpha, nr)$ для $u \in E$, тогда существует разбиение множества $Y(Y_i)_{i=1}^{l(n)}$ такое, что $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{l(n)} Y_i$ и $\|\chi_Y u; E\| < r$, $(i = \overline{1, l(n)})$.

Рассмотрим несколько примеров такого типа пространств.

1) Пусть дано ИКПСК E на μ-измеримом множестве Ω. Пусть даны μ-измеримое подмножество $Y \subset \Omega$ и элемент $u(s) \in E(\Omega)$. Определим $m_u(Y) = \|\chi_Y u; E\|$. Если m_u есть абсолютно непрерывная относительно меры μ функция, тогда ИКПСК $E(\Omega)$ является л.а.н.о.п.

2) Обобщенные пространства Лебега $L_{(\alpha)}(\Omega)$ и $L_{(\overline{\alpha})}(\Omega)$ и обобщенное пространство Орлича $L^{\varphi}(\Omega)$ (если $\varphi(u)$ подчиняется Δ_2-условию) являются типа л.а.н.о.п.

В частности, например, если $\varphi(u) = |u|^p$, $0 < p \leqslant 1$, то пространство Орлича $L^*_{M(p)} = \{u \in M : \|u; M(p)\| < \infty\}$ где

$$\|u(s); M(p)\| = \sup_{\rho(v,N)\leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega} |u|^p v(s)\, d\mu(s) \right| < \infty, \quad 0 < p \leqslant 1,$$

а $\rho(v, N) = \int\limits_{\Omega} N(|v(s)|)\, d\mu$, является л.а.н.о.п. Можно проверить выполнение условий а) и б) определения 3.

Определение 4. Пусть E_1 и E_2 два ИКПСК и $T : E_1 \to M$ — произвольный оператор. Будем говорить, что:

а) оператор T F — ограничен, если T преобразует всякую ограниченную окрестность по квазинорме в E_1 в ограниченную окрестность по квазинорме в E_2,

б) оператор T ограничен, если T преобразует всякое топологически ограниченное множество в E_1 в топологически ограниченное множество в E_2.

Теорема 4. *Пусть ИКПСК E_1 л.а.н.о.п., E_2 — произвольное ИКПСК и $T : E_1 \to M$ H-оператор. Если существует открытая окрестность $A(\Theta) \subset E_1$ такая, что $T(A)$ ограничен по квазинорме E_2, тогда оператор T действует из E_1 в E_2 и F-ограничен.*

Доказательство. Предположим, что $T(\Theta(s)) = \Theta$. Очевидно, существует $r > 0$ такое, что $B(0, r) \subset A$, и $T(E_1) \subset E_2$, (можно проверить непосредственно из определения 2).

Рассмотрим множество $Y \subset \Omega$, $\mu(Y) < \infty$ и рассмотрим сужение оператора T из $E_1(Y) = \{u \in E_1 : \operatorname{supp} u \subset Y\}$ в $M = M(\Omega)$.

По условию $T(A)$ ограничен по квазинорме в E_2, тогда ясно, что таковым же будет и образ $T[B(0,r)]$, т. е. существует константа K такая, что $\|u; E_1\| < r$ влечет $\|T(u); E_2\| \leqslant K$.

Допустим, что элемент $v \in B \cap E_1(Y)$ и N наибольшее целое, такое, что $Nr \leqslant \|v; E_1\|$. По условию ИКПСК E_1 л.а.н.о.п., тогда существуют функция l и разбиение Y на множества $(Y_i)_1^{l(N+1)}$ с $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{l(N+1)} Y_i$ и для каждого $\|\chi_{Y_i} v; E_1\| < r$.

H-оператор T для каждого элемента $v \in B(0,r)$ подчиняется условию:

$$\|T(v); E_2\| \leqslant \sum_{1}^{l(N+1)} h(\|T(\chi_{Y_i} v); E_2\|) \leqslant l(N+1)h(k) \leqslant l\big(\frac{\alpha}{r}+1\big)h(K) = K^0_,$$

т. е. множество $T(B)$ ограничено по квазинорме в E_2.

Пусть теперь Ω — произвольное множество. Существует $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\Omega_i \uparrow$, и $\Omega = \bigcup\limits_{1}^{\infty} \Omega_i$ с $\mu(\Omega_i) < \infty$. Обозначим через $\Omega_i' = \Omega \backslash \Omega_i$, тогда $\Omega_i' \downarrow$ и $\mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (\Omega_i')\right) = 0$.

Так как ИКПСК E_1 одновременно являются типа абсолютно непрерывного относительно пересечения, то существует $i_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\|\chi_{\Omega'_{i_0}} v; E_1\| < r$, тогда $\|T(\chi_{\Omega'_{i_0}} v); E_2\| \leqslant K$, для $v \in B$ по предположению одновременно с этим $\|v; E_1\| < r$ (так как $v \in B$). Вследствие конечности меры множества Ω_{i_0} имеем $\|T(\chi_{\Omega'_{i_0}} v); E_2\| \leqslant K^0$, откуда следует, что H-оператор T ограничен по смешанной квазинорме в E_2.

Примечание 2. Теорема 4 перестает быть верной, если отказаться от предположения, что E_1 л.а.н.о.п. Рассмотрим соответствующий пример. Обозначим через L пространство μ-измеримых функций на Ω.

Пусть $\Omega = [-1, 1]$, (Ω_k) такая, что $\Omega = \cup\Omega_k$ с $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, если $i \neq j$ и $\mu(\Omega_k) = \frac{1}{2^k}$. $\|\cdot\|_k$ означает квазинорму в $L^k(\Omega_k)$ с $k = 0$, $u \in L^0 = L^{p_0}$, где $0 < p_0 < 1$

$$\|u\|_0 = \|u\|_{p_0} = \int\limits_{\Omega_0} |u(s)|^{p_0}\, d\mu(s) = \int\limits_{[-1,0]} |u(s)|^{p_0}\, d\mu(s)$$

и для $k \geqslant 1$, $v \in L^k$, где

$$\|v\|_1 = \int\limits_{\Omega_1} |v(s)|\, d\mu(s) = \int\limits_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} |v(s)|\, d\mu(s),$$

и, окончательно,

$$\|v\|_k = \left(\int\limits_{\Omega_k} |v(s)|^k\, d\mu(s)\right)^{\frac{1}{k}} < \infty \quad \text{если} \quad k \geqslant 2.$$

Можно убедиться, что определенное таким образом пространство является квазинормированным, полным, удовлетворяющим условию Рисса — Фишера. В то же время оно не является л.а.н.о.п. (см. соответствующие построения в диссертации Р. Р. Рандриананжа [6] на с. 42–44).

Если задать H-оператор на рассматриваемом квазинормированном пространстве $E_1 = L(\Omega) \to M$ следующим образом: $T(u) = 0$ если $\|u; E_1\| < 1$, где $\|\cdot\|$ — квазинорма в $L(\Omega)$ и соответственно $T(u) = |u(s)|^{n_0} \cdot \chi_{\Omega_{n_0}}(s)$, если $1 < \|u; E_1\| < \infty$, то H-оператор T не будет ограниченным из квазинормированного пространства E_1 в E_2, где $E_2 = L^{n_0}$. Действительно, образ $T(B(0,1))$ открытого шара $B(0,1)$ из E_1 ограничен по квазинорме в E_2, однако, если взять например, функцию $u_n(s)8\chi_{\Omega_n}(s)$ для $n > 1$, то можно показать, что $T(u_n) \to \infty$ при $n \to \infty$ по квазинорме в E_2.

Литература

1. *Randriananga R. R.* Sur Les opérateurs dans certains F-espaces // C. R. Acad. Sci. Paris. 1988. T. 325. P. 667-669.
2. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. Вып. 2.
3. *Поволоцкий А. И., Калитвин А. С.* Интерполяция оператора с частными интегралами в пространствах со смешанными квазинормами // Операторы и их приложения. Л., 1983.
4. *Benedek A., Panzone R.* Duke Math. J. 1963. V. 28, № 3.
5. *Поволоцкий А. И., Зильберберг Н. И.* Об операторах в идеальных F-пространствах // Вопросы современного анализа и алгебры. Часть 1. Л., 1970. С. 242–257.
6. *Randriananga R. R.* Theorie des opérateurs dans certains F-espaces. Thése du doctorat du troisieme cycle // Université de Madagascar. 1988. P. 1–108.