Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **532 (075.8)**

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

И. Д. Музаев

Широкий круг задач из теории гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению следующей граничной задачи. Функция $\varphi(x,z,t)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению эллиптического типа с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=f(x,z,t,) \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям,

$$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \quad \text{при } t=0,\ z=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=L}=0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H}=0, \quad \left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right|_{z=0}=0, \tag{4}$$

$$g=\mathrm{const},$$

где x и z пространственные координаты, t — время, $B(x,z)$ и $f(z,x,t)$ — произвольные дифференцируемые функции в промежутках $0\leqslant x\leqslant L$, $-H\leqslant z\leqslant 0$, $t\geqslant 0$.

В частном случае, при задании функции $B(x,z)$ в виде экспоненциальной зависимости

$$B(x,z)=B_0\exp(sx), \tag{5}$$

коэффициенты уравнения (1) становятся постоянными, а само уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+s\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f(x,z,t)e^{-sx}. \tag{6}$$

Введем вместо функции $\varphi(x,z,t)$ функцию $\varphi_1(x,z,t)$, определяемую следующим образом:

$$\varphi=\varphi_1\exp\left(-\frac{s}{2}x\right). \tag{7}$$

Подставим выражение (7) в соотношениях (2)–(6), получим

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}-\frac{s^2}{4}\varphi_1=f\exp\left(-\frac{s}{2}x\right), \tag{8}$$

$$\varphi_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0 \quad \text{при } t=0,\ z=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\varphi_1\bigg|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\varphi_1\bigg|_{x=L}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\bigg|_{z=-H}=0, \quad \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0. \tag{11}$$

Применим в выражениях (8)–(11) интегральное преобразование Лапласа относительно переменной t

$$\widetilde{\varphi}_1=\int\limits_0^\infty \varphi_1 e^{-pt}\,dt. \tag{12}$$

Тогда выражения (8)–(11) в изображениях запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_1}{\partial z^2}-\frac{s^2}{4}\widetilde{\varphi}_1=\widetilde{f}_1, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\widetilde{\varphi}_1\bigg|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\widetilde{\varphi}_1\bigg|_{x=L}=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial z}\bigg|_{z=-H}=0, \quad \left(p^2\widetilde{\varphi}_1+g\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0, \tag{15}$$

$$\widetilde{f}_1=\widetilde{f}\exp\left(-\frac{s}{2}x\right).$$

Введем функцию $\widetilde{\psi}$, равную

$$\widetilde{\psi}=\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\widetilde{\varphi}_1. \tag{16}$$

Краевая задача (13)–(15) относительно введенной функции запишется так:

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial z^2}-\frac{s^2}{4}\widetilde{\psi}=\frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\widetilde{f}_1, \tag{17}$$

$$\widetilde{\psi}\bigg|_{x=0}=0, \quad \widetilde{\psi}\bigg|_{x=L}=0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z}\bigg|_{z=-H}=0, \quad \left(p^2\widetilde{\psi}+g\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}=0. \tag{19}$$

Приступим теперь к решению граничной задачи (17)–(19). Разложим правую часть уравнения (17) в ряд Фурье относительно переменной x по синусам в интервале $(0,L)$

$$\frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial x}-\frac{s}{2}\widetilde{f}_1=\sum_{n=i}^{\infty}\widetilde{\alpha}_n(z)\sin\frac{n\pi}{L}x, \tag{20}$$

где $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots$ — коэффициенты Фурье разложения (20).

Далее, представим функцию $\widetilde{\psi}$ в виде ряда

$$\widetilde{\psi}(x,z,p) = \sum_{n=i}^{\infty} \widetilde{\psi}_n(z,p) \sin \frac{n\pi}{L} x. \tag{21}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что граничные условия (18) автоматически удовлетворяются.

Подставив выражения (21) и (20) в (17), получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнения для функции $\widetilde{\psi}(z,p)$

$$\frac{d^2\widetilde{\psi}_n}{dz^2} - \left(a_n^2 + \frac{s^2}{4}\right)\widetilde{\psi}_n = \widetilde{\alpha}_n(z), \quad a_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0,1,2,\ldots . \tag{22}$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (19) имеет следующий вид:

$$\widetilde{\psi}_n(z) = -\frac{p^2}{p^2+\gamma_n^2} T_n \operatorname{sh} \lambda_n z \frac{g\lambda_n}{p^2+\gamma_n^2} T_n \operatorname{ch} \lambda_n z + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^z \widetilde{\alpha}_n(\xi) \operatorname{ch} \lambda_n (z-\xi)\, d\xi, \tag{23}$$

где

$$T_n = +\frac{1}{\lambda_n^2 \operatorname{ch} \lambda_n H} \int_0^{-H} \widetilde{\alpha}_n(\xi) \operatorname{ch} \lambda_n (H+\xi)\, d\xi,$$
$$\lambda_n = \sqrt{a_n^2 + s^2/4}, \quad \gamma_n = \sqrt{g\lambda_n \operatorname{th} \lambda_n H}.$$

В выражении (16) функцию $\widetilde{\psi}$ будем считать заданной, определяемой по выражению (23). Тогда его можно рассмотреть как линейное дифференциальное уравнение, решение которого имеет следующий вид:

$$\widetilde{\Phi}(x,z,p) = e^{\frac{s}{2}x} \int \widetilde{\psi}(x,z,p) e^{-\frac{s}{2}x}\, dx.$$

Таким образом, определено изображение функции относительно преобразования Лапласа. Для нахождения оригинала достаточно использовать таблицы операционного исчисления и теорему о свертке.

Окончательно решение поставленной граничной задачи получается в явном виде.

Литература

1. *Кошляков Н. С. и др.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
2. *Музаев И. Д.* Некоторые новые задачи, связанные с волновым движением воды в водохранилищах // Тезисы докладов второй Всесоюзной конференции «Динамика и термика рек, водохранилищ и эстуариев». 1984. Т. 1. С. 9–11.
3. *Музаев И. Д.* Задачи о волновом движении воды в водохранилищах // Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах. М.: Наука, 1985. С. 22–26.