Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 1999, Том 1, Выпуск 2

УДК **539.377**

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

Н. Н. Каркусты

Пусть задана бесконечная термически изотропная однородная полоса конечной ширины $2b$. Требуется определить температурное поле и напряженные состояния в заданной полосе по заданным на границе смещениям и температуре в случае, когда уравнение теплопроводности задано в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}+\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{1}$$

При исследовании динамических задач в упругой среде температурное поле зависит как от координат, так и от времени t. Температура меняется от точки к точке, это изменение обусловлено в общем случае как действием источников, так и воздействием самого процесса деформации. Работа деформирующих сил превращается в тепло, которое вызывает изменения температуры, вследствие чего и возникает температурное напряжение.

Таким образом, в случае связанной термоупругой задачи необходимо к уравнению (1) прибавить уравнения движения при отсутствии объемных сил, которые можно написать так:

$$\frac{\partial x_x}{\partial x}+\frac{\partial x_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial y_x}{\partial x}+\frac{\partial y_y}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2}$$

и связь между компонентами деформации u и v с компонентами напряжения — так:

$$x_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\varkappa\beta T,\quad y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\varkappa\beta T, \tag{3}$$

Ввиду того, что в однородном изотропном теле отсутствуют искажения углов, компонент касательных напряжений остается без изменений:

$$x_y=y_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Итак, задача состоит в решении системы дифференциальных уравнений (1)–(4) при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{gathered}
T(x,y,t)\big|_{t=0}=0,\quad T(x,y,t)\big|_{y=b}=f_1(X,t),\quad \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=-b}=f_2(X,t),\\
u(x,y,t)\big|_{\substack{|x|\to\infty\\ y=\pm b}}=0,\ v(x,y,t)\big|_{y=b}=g_1(X,\omega),\ v(x,y,t)\big|_{y=-b}=g_2(X,\omega),\\
\lim_{x\to\infty}T(x,y,t)=0,\quad \lim_{x\to|\infty|}\frac{\partial T}{\partial x}=0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Ввиду того, что решается вторая основная задача, в уравнении движения удобнее пользоваться компонентами смещения. Тем самым равенства (3) и (4) примут вид

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u-\varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v-\varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\end{gathered}\tag{6}$$

а уравнение теплопроводности (1) перепишется так:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}+\eta\frac{\partial\theta}{\partial t}.\tag{6$'$}$$

Введем термоупругие потенциалы перемещения

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}.\tag{7}$$

Внося выражение (7) в системы (6) и (6$'$), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi+\mu\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi-\varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right),\\(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi-\mu\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-\varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),\\\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}+\eta\frac{\partial\theta}{\partial t}\Delta\varphi.\end{gathered}\tag{8}$$

Будем считать, что функции $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в рассматриваемой области.

По указанному выше условию, компоненты смещения $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ связаны с термоупругими переменными: $u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}$. Функции $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ должны иметь частные производные вплоть до четвертого порядка, и будем предполагать, что к этим функциям $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ применима теорема Фурье, т. е. будем считать, что существуют интегралы

$$\begin{gathered}\varphi(\alpha,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y,t)e^{i\alpha x}\,dx,\\\psi(\alpha,y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y,t)e^{i\alpha x}\,dx,\end{gathered}\tag{9}$$

где $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$. Следуя идее Титчмарша [2], в качестве переменной в интеграле Фурье возьмем t и предположим, что функции $\varphi(x,y,t)$ и $\psi(x,y,t)$ ограничены для всех (x,y) в заданной области и что существуют интегралы

$$\varphi(\alpha,y,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\alpha,y,t)e^{\omega t}\,dt,\ \psi(\alpha,y,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\alpha,y,t)e^{\omega t}\,dt.\tag{10}$$

Из теорем об обратных преобразованиях Лапласа — Фурье обратное преобразование можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
\varphi(\alpha, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \varphi(\alpha, y, \omega) e^{-\omega t}\, d\omega, \\
\psi(\alpha, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \psi(\alpha, y, \omega) e^{-\omega t}\, d\omega.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Умножим систему уравнений (8) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\omega t}$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞. В результате получим

$$
\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi + \mu\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi - \varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial x} &= -\rho\omega^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \\
(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \mu\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi - \varkappa\beta\frac{\partial T}{\partial y} &= -\rho\omega^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \omega\left(\frac{T}{\varkappa} + \eta\Delta\varphi\right). \tag{13}
$$

Умножим систему (12) и (13) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi i}} e^{i\alpha x}$ и проинтегрируем по переменной x с учетом (5) и того факта, что компоненты смещения $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ вместе со своими производными обращаются в нуль при $|x| \to \infty$. Будем иметь

$$
-i\alpha[-\alpha^2(\lambda + 2\mu) + \rho\omega^2]\varphi - i\alpha(\lambda + 2\mu)\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \mu\frac{d^3\psi}{dy^3} - (\alpha^2\mu - \rho\omega^2)\frac{d\psi}{dy} - i\alpha\varkappa\beta T = 0,
$$

$$
[-\alpha^2(\lambda + 2\mu)]\frac{d\varphi}{dy} + (\lambda + 2\mu)\frac{d^3\varphi}{dy^3} - i\alpha(\alpha^2\mu - \rho\omega^2) + i\alpha\mu\frac{d^2\psi}{dy^2} - \varkappa\beta\frac{dT}{dy} = 0, \tag{14}
$$

$$
\frac{d^2 T}{dy^2} - \left(\alpha^2 + \frac{\omega}{\varkappa}\right) = \omega\eta\alpha^2\varphi - \omega\eta\frac{d^2\varphi}{dy^2}. \tag{15}
$$

Система (14)–(15) является системой линейных дифференциальных уравнений. Как известно из курса дифференциальных уравнений, систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению более высокого порядка. Поэтому естественно искать решения систем (14) и (15) в виде показательных функций вида

$$
\varphi(\alpha, y, \omega) = \gamma_1 e^{ky}, \quad \psi(\alpha, y, \omega) = \gamma_2 e^{ky}, \quad T = \gamma_3 e^{ky}, \tag{16}
$$

где γ_1, γ_2, γ_3 и k — неизвестные постоянные, которые нужно определить так, чтобы функции (16) удовлетворяли системе (14), (15). Так как решения ищутся в виде (16), то при подстановке (16) в системе (14), (15) получим

$$
\begin{gathered}
-i\alpha[(\lambda + 2\mu)(k^2 - \alpha^2) + \rho\omega^2]\gamma_1 + [(k^2 - \alpha^2)\mu + \rho\omega^2]\gamma_2 + i\alpha\beta\varkappa\gamma_3 = 0, \\
[(\lambda + 2\mu)(k^2 - \alpha^2) + \rho\omega^2]\gamma_1 + i\alpha[(k^2 - \alpha^2)\mu + \rho\omega^2]\gamma_2 - \varkappa\beta\gamma_3 = 0, \\
\omega\eta(k^2 - \alpha^2)\gamma_1 + 0 + \left(k^2 - \alpha^2 - \frac{\omega}{\varkappa}\right)\gamma_3 = 0.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Рассматривая (17) как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно γ_1, γ_2, γ_3, замечаем, что для получения нетривиальных решений систем (14) и (15) надо потребовать равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов линейных однородных алгебраических уравнений (17). Одновременно этот определитель является характеристическим уравнением систем (14), (15):

$$\begin{vmatrix} -i\alpha[(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2] & [(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]k & i\alpha\varkappa\beta \\ [(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2]k & i\alpha[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2] & -\varkappa\beta k \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & 0 & k^2-\alpha^2+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Раскроем определитель по минорам:

$$k[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]\begin{vmatrix} [(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2]k & -\varkappa\beta k \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & (k^2-\alpha^2)+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix}$$
$$+ i\alpha[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]\begin{vmatrix} -i\alpha[(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2] & i\alpha\varkappa\beta \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & k^2-\alpha^2+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k^2[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]\begin{vmatrix} (\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2 & -\varkappa\beta \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & k^2-\alpha^2+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix}$$
$$- \alpha^2[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]\begin{vmatrix} -[(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2] & \varkappa\beta \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & k^2-\alpha^2+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Из (19) получаем следующее:

$$(k^2-\alpha^2)[(k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega^2]\begin{vmatrix} (\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2 & -\varkappa\beta \\ \omega\eta(k^2-\alpha^2) & k^2-\alpha^2+\frac{\omega}{\varkappa} \end{vmatrix} = 0, \tag{20}$$

откуда имеем

$$k^2-\alpha^2=0, \quad (k^2-\alpha^2)\mu+\rho\omega=0,$$
$$[(\lambda+2\mu)(k^2-\alpha^2)+\rho\omega^2](k^2-\alpha^2+\omega/\varkappa)-\eta\omega(k^2-\alpha^2)\varkappa\beta=0.$$

Итак, $k_{1;2}=\pm\alpha$, $k_{3;4}=\pm\sqrt{\alpha^2-\rho\omega^2/\mu}$

$$k^2-\alpha^2=-\frac{1}{2(\lambda+2\mu)}[\rho\omega^2+\eta\omega\varkappa\beta+(\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}]$$
$$\pm\sqrt{\left(\rho\omega^2+\eta\omega\varkappa\beta+(\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}\right)^2+2\omega\eta\varkappa\beta\Big[\rho\omega^2+(\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}\Big]}. \tag{21}$$

Корни характеристического уравнения различны, поэтому система дифференциальных уравнений имеет линейно зависимые решения, т. е. γ_1, γ_2, γ_3 будут линейно зависимыми. Подставляя значение $\alpha=k_1$, будем иметь

$$\begin{cases} i\alpha\rho\omega^2\gamma_1+\rho\omega^2\alpha\gamma_2+i\alpha\varkappa\beta\gamma_3=0, & \gamma_3=0, \\ \rho\omega^2\alpha\gamma_1+i\alpha\rho\omega\gamma_2-\varkappa\beta\alpha\gamma_3=0, & \gamma_1=c_1, \\ \omega\eta\cdot 0+0+\frac{\omega}{\varkappa}\gamma_3=0, & \gamma_2=-ic_1. \end{cases} \tag{22}$$

Аналогично, подставляя $k_2 = -\alpha$, имеем $\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 = ic_2$, $\gamma_1 = c_2$.

Подставим корень $k_{34} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu}}$:

$$\begin{cases} i\alpha \frac{L+\mu}{\mu}\rho\omega^2\gamma_1 + i\alpha\varkappa\beta\gamma_3 = 0, \\ -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\rho\omega^2\gamma_1 - \varkappa\beta\gamma_3 = 0, \\ -\omega\eta\rho\omega^2\gamma_1 - \big(\rho\omega^2 + \frac{\omega}{\varkappa}\big)\gamma_3 = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_3 = c_3, \quad \gamma_1 = c_3\frac{\varkappa\beta\mu}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)}, \quad \gamma_2 = 0,$$

$$\gamma_3 = c_4, \quad \gamma_1 = c_4\frac{\varkappa\beta\mu}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)}, \quad \gamma_2 = 0.$$

Введем обозначение:

$$m^2 = \frac{1}{2(\lambda+2\mu)}[\rho\omega^2 + \eta\omega\varkappa\beta + (\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}] \\ \pm\sqrt{(\rho\omega\varkappa\beta)^2 + \big[\rho\omega^2 - (\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}\big]^2 + 2\omega\eta\varkappa\beta\big(\rho\omega^2 + (\lambda+2\mu)\frac{\omega}{\varkappa}\big)}.$$

Тогда

$$\begin{gathered} k^2 - \alpha^2 = m^2, \quad k_{5,6} = \pm\sqrt{\alpha^2+m^2}, \\ -i\alpha[(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2]\gamma_1 + (m^2\mu + \rho\omega^2)\sqrt{\alpha^2+m^2}\gamma_2 + i\alpha\varkappa\beta\gamma_3 = 0, \\ [(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2]\gamma_1\sqrt{\alpha^2+m^2} + i\alpha(m^2\mu + \rho\omega^2)\gamma_2 - \varkappa\beta\sqrt{\alpha^2+m^2} = 0, \\ \omega\eta m^2\gamma_1 + \left(m^2 - \frac{\omega}{\varkappa}\right)\gamma_3 = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Согласно определению комплексного числа, два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части. Учитывая это, получаем, что $\gamma_2 = 0$, и это приводит систему (24) к виду

$$-[(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2]\gamma_1 + \varkappa\beta\gamma_3 = 0, \quad [(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2]\gamma_1 - \varkappa\beta\gamma_3 = 0.$$

Отсюда определим неизвестные γ_1, γ_2, γ_3:

$$\gamma_1 = c_5, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2}{\varkappa\beta}.$$

Аналогично, подставляя значение $k_6 = -\sqrt{\alpha^2+m^2}$, получаем

$$\gamma_1 = c_6, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = c_6\frac{(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2}{\varkappa\beta}.$$

Теперь можно записать общие выражения искомых функций

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha,y,\omega) &= c_1e^{\alpha y} + c_2e^{-\alpha y} - c_3\frac{\varkappa\beta\mu e^{k_3y}}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)} + c_4\frac{\varkappa\beta\mu e^{-k_3y}}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)} + c_5e^{k_5y} + c_6e^{-k_5y}, \\ \psi &= -ic_1e^{\alpha y} + ic_2e^{-\alpha y}, \\ T &= c_3e^{k_3y}c_4e^{-k_4y} + \frac{(\lambda+2\mu)m^2 + \rho\omega^2}{\varkappa\beta}(c_5e^{k_5y} - c_6e^{-k_5y}). \end{aligned}$$

Вернемся к компонентам смещения $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ и, учитывая термоупругий потенциал перемещения, можем их записать так:

$$u(\alpha,y,\omega)=-i\alpha\varphi+\frac{d\psi}{dy},\quad v(\alpha,y,\omega)=\frac{d\varphi}{dy}+i\alpha\psi,$$
$$u(\alpha,y,\omega)\big|_{y=\pm b}=0,\ v(\alpha,y,\omega)\big|_{y=b}=g_1(\alpha,\omega),\ v(\alpha,y,\omega)\big|_{y=-b}=g_2(\alpha,\omega).$$

Преобразовывая начальные и граничные условия, можем представить их в виде

$$-2i\alpha[c_1e^{\alpha y}+c_2e^{-\alpha y}]+\frac{i\alpha\varkappa\beta\mu}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)}[c_3e^{k_3y}-c_4e^{-k_3y}]+i\alpha[c_5e^{k_5y}-c_6e^{-k_5y}]=u(\alpha,y,\omega),$$
$$2\alpha[c_1e^{\alpha y}-c_2e^{-\alpha y}]-\frac{k_3\beta\varkappa\mu}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)}[c_3e^{k_3y}+c_4e^{-k_3y}]+k_5[c_5e^{k_5y}-c_6e^{-k_5y}]=v(\alpha,y,\omega),$$
$$T(\alpha,y,\omega)=c_3e^{k_3y}+c_4e^{-k_3y}+d[c_5e^{k_5y}-c_6e^{-k_5y}],$$
$$d=\frac{(\lambda+2\mu)m^2+\rho\omega^2}{\varkappa\beta}.$$

Подставляя значения граничных условий в преобразованном виде, получаем систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 :

$$2c_1e^{\alpha b}+2c_2e^{-\alpha b}+mc_3e^{k_3b}-mc_4e^{-k_3b}-c_5e^{k_5b}-c_6e^{-k_5b}=0,$$
$$2c_1e^{-\alpha b}+2c_2e^{\alpha b}+mc_3e^{-k_3b}-mc_4e^{k_3b}-c_5e^{-k_5b}-c_6e^{k_5b}=0,$$
$$2\alpha e^{\alpha b}c_1-2\alpha c_2e^{-\alpha b}-mk_3c_3e^{k_3b}-mk_3c_4e^{-k_3b}+k_5c_5e^{k_5b}+k_5c_6e^{-k_5b}=g_1(\alpha,\omega),$$
$$2\alpha c_1e^{-\alpha b}-2\alpha e^{\alpha b}-mk_3c_3e^{-k_3b}-mk_3c_4e^{k_3b}+k_5c_5e^{-k_5b}+k_5c_6e^{k_5b}=g_2(\alpha,\omega),$$
$$c_3e^{k_3b}+c_4e^{-k_3b}+dc_5e^{k_5b}-c_6e^{-k_5b}=f_1(\alpha,\omega),$$
$$k_3c_3e^{-k_3b}-k_3c_4e^{k_3b}+dc_5k_5e^{-k_5b}+dk_5c_6e^{k_5b}=f_2(\alpha,\omega),$$
$$d=\frac{(\lambda+2\mu)m^2+\rho\omega^2}{\varkappa\beta},\quad m_1=\frac{\varkappa\beta\mu}{\rho\omega^2(\lambda+\mu)}.$$

Решая эту систему алгебраических уравнений относительно c_j $(j=1,2,3,4,5,6)$, получим, что Δ_0 равно определителю

$$\begin{vmatrix}
2e^{\alpha b} & 2e^{-\alpha b} & m_1e^{k_3b} & -m_1e^{-k_3b} & -e^{k_5b} & -e^{-k_5b}\\
2e^{-\alpha b} & 2e^{\alpha b} & m_1e^{-k_3b} & -m_1e^{k_3b} & -e^{-k_5b} & e^{k_5b}\\
2\alpha e^{\alpha b} & -2e^{-\alpha b}\alpha & -m_1k_3e^{k_3b} & -m_1k_3e^{-k_3b} & k_5e^{k_5b} & k_5e^{-k_5b}\\
2\alpha e^{-\alpha b} & -2\alpha e^{\alpha b} & -m_1k_3e^{k_3b} & m_1k_3e^{k_3b} & k_5e^{-k_5b} & k_5e^{k_5b}\\
0 & 0 & e^{k_3b} & e^{-k_3b} & de^{k_5b} & -de^{-k_5b}\\
0 & 0 & k_3e^{-k_3b} & -k_3e^{k_3b} & dk_5e^{-k_5b} & dk_5e^{k_5b}
\end{vmatrix},$$

а константы

$$c_1=\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\quad c_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_0},\quad c_3=\frac{\Delta_3}{\Delta_0},\quad c_4=\frac{\Delta_4}{\Delta_0},\quad c_5=\frac{\Delta_5}{\Delta_0},\quad c_6=\frac{\Delta_6}{\Delta_0}.$$

Подставляя найденные значения произвольных постоянных $(c_1, c_2,\ c_3, c_4, c_5, c_6)$ в искомые функции, получим

$$\varphi(\alpha, y, \omega) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} e^{\alpha y} + \frac{\Delta_2}{\Delta_0} e^{-\alpha y} - \frac{\Delta_3}{\Delta_0} e^{k_3 y} + \frac{\Delta_4}{\Delta_0} e^{-k_3 y} + \frac{\Delta_5}{\Delta_0} e^{k_5 y} + \frac{\Delta_6}{\Delta_0} e^{-k_5 y},$$

$$\psi = -i\frac{\Delta_1}{\Delta_0} e^{\alpha y} + i\frac{\Delta_2}{\Delta_0} e^{-\alpha y},$$

$$T(\alpha, y, \omega) = \frac{\Delta_3}{\Delta_0} e^{k_3 y} + \frac{\Delta_4}{\Delta_0} e^{-k_3 y} + d\frac{\Delta_5}{\Delta_0} e^{k_5 y} - d\frac{\Delta_6}{\Delta_0} e^{-k_5 y}.$$

Так как функции $\varphi(\alpha, y, \omega)$ и $\psi(\alpha, y, \omega)$ найдены, то компоненты смещения будут определяться по формуле (7), а компоненты напряжения — по формуле (3).

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
3. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
4. *Каркузашвили Н. Н., Козубовская И. Г.* Определение температурных напряжений бесконечной пластинки при заданной температуре на одной из кромок // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18. № 3.
5. *Каркузашвили Н. Н., Киселев П. Я.* Определение температурного поля в тонкой бесконечной пластинке с конечной шириной // Некоторые вопросы прикладной математики. Вып. IV. Киев: АН УССР, 1969.