Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **532(075.8)**

ДВА МЕТОДА РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА

И. Д. Музаев, Ж. Д. Туаева

Математическая модель одномерной задачи, связанная с паводковыми потоками, на современном уровне развития математической гидравлики представляет собой следующее.

Расход воды $Q(x,t)$, площадь живого сечения $w(x,t)$ и глубина $h(x,t)$ потока должны удовлетворять дифференциальным уравнениям Сен-Венана [1]

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{w}\right)=gw\left(i-\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{Q|Q|}{K^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dt}+\frac{dQ}{dx}=q \tag{2}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$\text{при } t=0\ Q=Q_0(x),\quad h=h_0(t), \tag{3}$$

$$\text{при } x=0\ \ Q=Q_1(t),\ h=h_1(t), \tag{4}$$

$$\text{при } x=L\ \ Q=Q_2(h), \tag{5}$$

где x — продольная координата, t — время, g — ускорение силы тяжести, i — уклон дна реки, w — площадь живого сечения, K — модуль расхода, q — интенсивность боковой приточности, $Q_0(x)$, $h_0(x)$, $Q_1(t)$, $h_1(t)$, $Q_2(h)$ — заданные функции, L — расчетная длина реки. Внутренние граничные условия ставятся в местах наличия ограждающих водный поток сооружений. Модуль расхода $K(x,h)$ определяется по зависимости: $K=wC\sqrt{\mathbf{R}}$, $C=\frac{1}{n}\mathbf{R}^y$, где$C$ — коэффициент Шези, $\mathbf{R}$ — гидравлический радиус потока. Для достаточно широких рек принимается следующее приближение

$$\mathbf{R}\approx h,\quad C=\frac{1}{n}h^{\frac{1}{6}},$$

где n — коэффициент шероховатости русла реки. Каждый член динамического уравнения (1) можно рассматривать как некоторый уклон. Два первых члена это — инерционный члены или уклон линии энергии, соответствующий ускорению. Второй — уклон, соответствующий изменению скоростного напора. Третий член — уклон водной поверхности. Четвертый — уклон трения. Эти слагаемые для различных условий течения имеют различную относительную значимость. Предположим, что за 3 часа скорость течения в реке изменяется от 1,0 до 2,0 м/сек (весьма большое изменение) и на расстоянии 10 км вследствие расширения потока скорость изменяется от 1,5 до 1,0 м/сек. Тогда два первых члена уравнения (2) будут равны соответственно

$$\frac{1}{9,81}\cdot\frac{1}{3600}\approx 1,0\cdot 10^{-5}, \text{и } \frac{1}{9,81}\cdot 1,5\cdot\frac{1}{10000}\approx 1,5\cdot 10^{-5}.$$

Уклон дна реки Терек между городами Владикавказ и Беслан имеет порядок 10^{-2}q.

Этот типичный пример указывает о возможности пренебрегать параметрами ускорения при исследовании волны прорыва вдали от разрушенного ограждающего водный поток сооружения. Если в (1) опустить первые два члена, оно примет вид

$$\frac{\partial h}{\partial x} - i_0 + \frac{Q^2}{K^2} = 0. \tag{6}$$

Полагаем, что ширина русла реки $B = B(x, h)$ по длине потока изменяется незначительно. Тогда, дифференцируя уравнение (2) по переменной x, а уравнение (6) — по переменной t, можно привести систему к одному дифференциальному уравнению второго порядка. Учитывая, что

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{dK}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dK}{dh}\left(-\frac{1}{B}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{q}{B}\right), \tag{7}$$

получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K^2}{2Q\cdot B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}q(x,t) = 0. \tag{8}$$

Выражение (8) представляет классическое дифференциальное уравнение конвективно-диффузионного процесса с учетом приточности. Скорость конвекции для расхода равняется $\frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}$, а скорость диффузии $\frac{K^2}{2Q\cdot B}$. Мощность источников равна $\frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}q$. Если инерционные параметры действительно пренебрежимо малы, то уравнение (8) достаточно точно описывает процесс перемещения паводочной волны. Рассмотрим трапецеидальное русло с коэффициентами откосов m_1 и m_2

$$B = B_0 + (m1 + m2)h,\ w = \left(B_0 + \frac{m_1 + m_2}{2}h\right)h,$$

где B_0 — ширина ложа реки.

$$K(h) = \frac{w}{n}h^{2/3} = \frac{1}{n}\left(B_0 + \frac{m_1+m_2}{2}h\right)h^{5/3} = \frac{B_0}{n}h^{5/3} + \frac{m_1+m_2}{2n}h^{8/3},$$

$$\frac{dK}{dh} = \frac{5}{3n}B_0 h^{2/3} + \frac{4}{3n}(m_1+m_2)h^{5/3}.$$

Как мы видим, уравнение (8) представляется нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. В связи с этим без определенных упрощающих предположений оно не поддается аналитическому решению. В результате линеаризации системы (1)–(2) становится возможным получить аналитическое решение. При этом система (1)–(2) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q'}{\partial t} + a_1\frac{\partial h'}{\partial x} + a_2\frac{\partial Q'}{\partial x} + a_3 Q' - a_4 h' = 0, \\ \frac{\partial h'}{\partial t} + b_1\frac{\partial Q'}{\partial x} = b_1 q(x,t), \end{cases} \tag{9}$$

где

$$a_1 = gw_0 - (B_0 + (m_1+m_2)h_0)\frac{Q_0^2}{w_0^2},\ a_2 = 2\frac{Q_0^2}{w_0^2},\ a_3 = 2gw_0\frac{Q_0}{K_0^2},$$

$$a_4 = 2gw_0Q_0^2\left(\frac{5}{3n}B_0h_0^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{3n}(m_1+m_2)h_0^{\frac{5}{3}}\right)\frac{1}{K_0^3},\ b_1 = \frac{1}{B_0+(m_1+m_2)h_0},$$

а также $Q'(x,t), h'(x,t)$ — приращения расхода и глубина первоначального равномерного потока, а константы с нулевым индексами равны значениям соответствующих величин при этом потоке. Интенсивность боковой приточности задается формулой $q = 100e^{-s_1x}e^{-s_2t}$, $s_1 = 10/L$, $s_2 = 10/T$, где L — длина русла реки, T — время, за которое осуществляется приток воды в русло.

Если пренебречь возмущением сил трения (слагаемое $a_3Q' - a_4h'$), то систему (9) можно решить методами операционного исчисления [2]. В результате получается:

а) при $t \leqslant \lambda\cdot x$ расход и глубина имеют вид

$$\begin{aligned} Q^{'}(x,t) =& A\cdot e^{-(s_1x+s_2t)} + B\cdot e^{-s_1x+p_2t},\\ h'(x,t) =& -A_1\cdot(e^{-(s_1x+s_2)} - e^{-s_1x}) + B_1\cdot(e^{-s_1x+p_1t} - e^{-s_1x})\\ &+ C_1\cdot(e^{-s_1x+p_2t} - e^{-s_1x}) + D_1\cdot e^{-s_1x}\cdot(1-e^{-s_2t}),\end{aligned}$$

б) при $t > \lambda\cdot x$ имеем

$$\begin{aligned} Q^{'}(x,t) =& A\cdot(e^{-(s_1x+s_2t)} - e^{-s_2(t-\lambda x)}) + C\cdot(e^{-s_1x+p_2t} - e^{p_2(t-\lambda x)}),\\ h^{'}(x,t) =& -A_1\cdot e^{-(s_1x+s_2t)} + C_1\cdot e^{-s_1x+p_2t} - A_2e^{-s_2(t-\lambda x)}\\ &- C_2e^{p_2(t-\lambda\cdot x)} - D_1e^{-s_1x-s_2t} + \tilde{C}(x),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x) =& A_1\cdot e^{-s_1x} + B_1\cdot(1-e^{-s_1x}) - C_1\cdot e^{-s_1x} + A_2 + c_2 + D_2\cdot e^{-s_1x},\\ \lambda =& \frac{1}{a_1b_1}\left(\frac{a_2}{2} - \sqrt{\frac{a_2^2}{4}+a_1b_1}\right),\ p_{1,2} = \left(\frac{a_2}{2}\mp\sqrt{\frac{a_2^2}{4}+a_1b_1}\right)\cdot s_1,\end{aligned}$$

$A, B, C, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, C_2, D_2$ — некоторые постоянные, зависящие от коэффициентов системы (24).

Теперь приступим к решению нелинейной начально–краевой задачи конечно–разностным методом

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{K^2}{2Q\cdot B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh}q(x,t) = 0, \tag{10}$$

$$\text{при}\ \ t=0\ \ Q(x,t) = Q_0(x), \tag{11}$$

$$\text{при}\ \ x=0\ Q(x,t) = q^*(t), \tag{12}$$

$$\text{при}\ \ x=L\ \ Q(x,t) = Q_L(h),\ \ Q_L(h) = K\sqrt{i}. \tag{13}$$

Введем обозначение

$$U = \frac{Q}{K\cdot B}\frac{dK}{dh} = \frac{Q\left[\frac{5B_0}{3n}h^{0,67} + \frac{4(m_1+m_2)}{3n}h^{1,7}\right]}{K[B_0 + (m_1+m_2)h]},\ D = \frac{K^2}{2QB}. \tag{12}$$

Теперь применим к (10) следующую конечно–разностную схему

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t},\ \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \approx \frac{Q_{i+1}^{k+1} - 2Q_i^{k+1} + Q_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2}. \tag{13}$$

Начально–краевая задача (10)—(13) в конечных разностях запишется в виде

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} + U_i^k\frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i-1}k+1}{2\Delta x} - D_i^k\frac{Q_{i+1}^{k+1} - 2Q_i^{k+1} + Q_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} - U_i^k q_i^k = 0 \tag{14}$$

$$Q_1^{k+1} = q_*((k+1)\Delta t),\ Q_N^{k+1} = Q_L^k,\ Q_i^0 = Q_0(i\Delta x), \tag{15}$$

где $i = \overline{1, N-1},\ k = \overline{1, N-1}$.

Выражение (15) можно записать как

$$\begin{aligned}\left(1 + D_i^k\frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right)Q_i^{k+1} + \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} - D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)Q_{i+1}^{k+1}\\ - \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)Q_{i-1}^{k+1} = U_i^k q_i^k\Delta t + Q_i^k.\end{aligned} \tag{16}$$

Для решения разностных уравнений применим метод линейной факторизации (метод прогонки)

$$Q_i^{k+1} = A_{i+1}Q_{i+1}^{k+1} + B_{i+1}, \tag{17}$$

$$Q_{i-1}^{k+1} = A_i Q_i^{k+1} + B_i. \tag{18}$$

Подставим выражение (18) в (16)

$$\begin{aligned}\left[1 + D_i^k\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)A_i\right]Q_i^{k+1} + \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} - D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)\\ \times Q_{i+1}^{k+1} = U_i^k q_i^k\Delta t + \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)B_i + Q_i^k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_i^{k+1} = -\frac{U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} - D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}}{1 + D_i^k\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)A_i}Q_{i+1}^{k+1}\\ + \frac{U_i^k q_i^k\Delta t + \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)B_i + Q_i^k}{1 + D_i^k\frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \left(U_i^k\frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)A_i},\end{aligned}$$

$$A_{i+1} = -\frac{U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} - D_i^k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}}{1 + D_i^k \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \left(U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) A_i}, \tag{19}$$

$$B_{i+1} = \frac{U_i^k q_i^k \Delta t + \left(U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) B_i + Q_i^k}{1 + D_i^k \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \left(U_i^k \frac{\Delta t}{2\Delta x} + D_i^k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) A_i}, \tag{20}$$

Выражения (19) и (20) представляют рекуррентные соотношения для прогоночных коэффициентов. Для определения A_1 и B_1 воспользуемся граничным условием (15) : $A_1 = 0, \quad B_1 = q_*^{k+1}$. Значения расхода $Q_i^{k+1}, \ i = N-1, N-2, \dots, 1$ определяются в результате выполнения обратной прогонки: $Q_i^{k+1} = A_{i+1} Q_{i+1}^{k+1} + B_{i+1}, \ i = N-1, N-2, \dots, 1$.

Литература

1. *Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А. В.* Численные методы в задачах речной гидравлики, перевод с английского. М.: Энергоиздат, 1985. 254 с.
2. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965.