Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **517.98**

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Кусраев

1. Введение

Нестандартные методы анализа состоят в одновременном привлечении двух различных — “стандартной” и “нестандартной” — моделей теории множеств для исследования конкретных аналитических объектов и проблем. Такие методы интенсивно развивались в последние тридцать лет и оформились в несколько направлений. Важнейшие из них — инфинитезимальный анализ и булевозначный анализ (см. [1]).

Инфинитезимальный анализ (часто называемый нестандартным анализом вслед за его основоположником А. Робинсоном) характеризуется широким использованием концепций, связанных с представлением об актуально бесконечно больших и бесконечно малых величинах. В настоящее время это направление находит широкое распространение, проникает практически во все разделы математики (см. [2–5]).

Развитие булевозначного анализа связано со знаменитыми работами П. Дж. Коэна по гипотезе континуума и с созданием булевозначных моделей теории множеств. Эти методы привели к возникновению новых идей и результатов в ряде направлений функционального анализа (см. [1, 6]).

Нестандартные методы имеют ряд глубоких применений в аналитической теории операторов и, прежде всего, в таких вопросах, как спектральные свойства, аналитическое представление, локальные аппроксимации нелинейных операторов, классификация и реализация операторных алгебр. Приблизительно говоря, характер этих приложений можно выразить так. Инфинитезимальный анализ позволяет до некоторой степени смотреть на оператор, как на матрицу, т. е. провести дискретизацию оператора. Булевозначный же анализ в некоторых ситуациях позволяет работать с оператором, как с функционалом, т. е. осуществляет скаляризацию. При этом процедура дискретизации или скаляризации отнюдь не является автоматической, алгоритмической. Она существенно зависит от рассматриваемого оператора и от сути изучаемой проблемы. Следовательно, при ее реализации могут возникать значительные трудности. Именно поэтому для некоторых важных классов линейных и нелинейных операторов все еще не разработана техника “дискретизация-скаляризация”. Цель настоящих заметок — указать некоторые возможные направления дальнейших исследований. Предложенные ниже задачи были сформулированы в 1993 году в ходе обсуждений, в которых приняли участие Е. И. Гордон, С. С. Кутателадзе, В. Т. Плиев, К. Т. Тибилов. За истекшее время достигнуты определенные продвижения, однако некоторые постановки не потеряли актуальности и сегодня.

2. Теоретическое обоснование

Опишем коротко основные технические приемы, которые используются при инфинитезимальной дискретизации и булевозначной скаляризации. Отметим также, в каком направлении желательно было бы развить эти приемы. Инфинитезимальные понятия излагаются на языке теории Э. Нельсона (см. [1]).

2.1. Нестандартные оболочки (В. Люксембург [7]). Пусть X — внутреннее нормированное пространство. Положим, $\widehat{X} := \mathrm{fin}(X)/\mu(0)$, где $\mathrm{fin}(X)$ и $\mu(0)$ — множество всех конечных и бесконечно малых элементов соответственно. На X вводят норму формулой $\|\pi x\| := {}^\circ\|x\|$, где $\pi : X \to \widehat{X}$ — фактор-отображение. Внешнее нормированное пространство X называют *нестандартной оболочкой* X. Если внутренняя размерность X конечна, то говорят, что X гиперконечномерно.

Допустим теперь, что X и Y — внутренние нормированные пространства и $T : X \to Y$ — внутренний ограниченный оператор. Тогда можно ввести оператор $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ — оболочка оператора T — по формуле $\widehat{T}\pi x = \pi T x$ $(x \in X)$. Имеет место следующее простое утверждение: если E — стандартное банахово пространство, то существует гиперконечномерное подпространство $X \subset E$ такое, что ${}^\circ E \subset \widehat{X}$ (${}^\circ E$ — стандартное ядро E, т. е. ${}^\circ E := \{x \in E : \mathrm{st}(x)\}$).

Таким образом, если P — внутренний проектор в E на подпространство X, то PTP — оператор в конечномерном пространстве. В этом и состоит одна из возможных форм дискретизации оператора. Интересные приложения этого подхода к спектральным свойствам операторов в гильбертовом пространстве см. [3,8], а также сборники [4,5].

Проектор на X, обладающий нужными свойствами, существует не всегда, поэтому необходимо искать другие формы дискретизации операторов.

2.2. Меры Лёба (П. Лёб [9]). Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — внутреннее пространство с мерой, причем μ не обязательно счетно аддитивно. Положим, ${}^\circ\nu(A) := {}^\circ(\nu(A))$ (${}^\circ t$ — стандартная часть числа t). Тогда ${}^\circ\nu$ имеет единственное счетно аддитивное продолжение λ на порожденную (внешнюю) σ-алгебру $\sigma(\mathcal{A})$, причем $\lambda(B) = \inf\{{}^\circ\nu(A) : A \in \mathcal{A}, B \subset A\}$. Пополнение меры ν называют мерой Лёба и обозначают $L(\nu)$. Это понятие играет центральную роль в приложениях нестандартной теории меры (см. [3,9]).

Вопрос о дискретизации с помощью меры Лёба решает следующий факт.

Теорема (Е. *И. Гордон [10]). Пусть $(X, \sum, \mu)$ — стандартное пространство с (σ-конечной) мерой. Существует число Δ и внутреннее конечное множество $T \subset X$ такие, что для каждой стандартной измеримой функции f на X выполняется*

$$\int\limits_X f\, d\mu = {}^\circ\Big(\Delta \sum_{t \in T} f(t)\Big).$$

Если на множестве X имеется какая-нибудь дополнительная структура, то желательно при выборе T учесть и ее. Но это в ряде случаев нетривиальная задача.

2.3. Булевозначный интеграл (А. Г. Кусраев [11]). Интерпретация интеграла Лебега в булевозначной модели приводит к новому классу операторов, который, как выяснилось, совпадает с классом операторов Магарам [11]. Этот факт позволяет работать с операторами Магарам с той же свободой, как и с интегралом Лебега (см. [12]).

Другой прием булевозначного анализа операторов — прямой подъем. Он также позволяет скаляризовать оператор, но при этом теряется свойство непрерывности. Тем не менее, имеется ряд вопросов, где такой подход весьма эффективен (см. [14, 15]).

2.4. Инфинитезимальный субдифференциал и инфинитезимальный оптимум (С. С. Кутателадзе [16]). Пусть X — стандартное векторное пространство. $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — стандартная выпуклая функция и $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. Инфинитезимальный субдифференциал f в точке x_0 — множество (обозначаемое $Df(x_0)$) всех линейных функционалов $l \in X$ таких, что для некоторого бесконечно малого числа $\varepsilon > 0$ выполнено $lx - lx_0 \leqslant f(x) - f(x_0) + \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Рассмотрим теперь экстремальную задачу $x \in C$, $f(x) \to \inf$, где $C \subset X$. Допустимая точка $x_0 \in C$ называется *инфинитезимальным оптимумом*, если для любого стандартного числа $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ верно $f(x_0) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Очевидно, что x_0 есть инфинитезимальный оптимум в том случае, если $0 \in Df(x_0)$. Дальнейшие результаты относительно задач выпуклого программирования и, в частности, обоснование принципа Лагранжа для инфинитезимальной оптимальности получены в [16]. Роль такого рода результатов состоит, в частности, в обосновании того, что если инфинитезимальное решение рассматривать, как “практический оптимум”, то правила вычисления инфинитезимальных субдифференциалов адекватно отражают применяемые на практике правила приближенного подсчета “практически точного решения”.

Желательно было бы распространить этот подход на задачи оптимального управления, а также на абстрактные экстремальные задачи с невыпуклыми функциями и операторами.

2.5. Комбинированный нестандартный анализ. Возможны различные способы комбинирования нестандартных методов: можно строить инфинитезимальные конструкции в булевозначном универсуме или же искать булевозначные интерпретации в теории внутренних и внешних множеств (см. [17]). Однако возникают серьезные сложности и не всегда ясно, как их обойти.

В то же время последовательное применение нестандартных методов часто приводит к успеху. Так, в [18] получено детальное описание алгебры осколков положительного оператора, используя сначала инфинитезимальный подход, а затем булевозначную скаляризацию, см. также [1].

3. Постановка задачи

Плодотворность нестандартных методов при исследовании конкретных типов операторов убеждает, что необходимо совершенствовать используемую технику и искать новые приложения в аналитической теории операторов. В этой связи возникает богатая проблематика, которую в общих чертах можно сформулировать так.

3.0. Общая постановка задачи. *Построить гиперконечные аппроксимации и булевозначные реализации широких классов линейных и нелинейных операторов в функциональных пространствах. Применить к изучению отдельного оператора, а также операторных колец, алгебр, групп.*

Разумеется, это целое направление исследований, на несколько лет вперед, поэтому неизбежны определенные уточнения. Ниже сформулируем несколько конкретных подзадач, решение которых будет существенным продвижением в указанном направлении и вполне осуществимо.

3.1. Задача 1. *Для произвольной (не обязательно абелевой) локально компактной группы G построить гиперконечномерные аппроксимации линейных ограниченных операторов в пространстве $L_2(G)$.*

3.2. Задача 2. *Используя булевозначный метод, распространить результаты Д. Магарам о положительных операторах на случай произвольных (порядково полных) функциональных пространств. Возникающие при этом псевдоинтегральные операторы подвергнуть дискретизации, привлекая концепцию меры Лёба.*

3.3. Задача 3. *Применить нестандартные методы дискретизации к изучению спектральных свойств положительных операторов в банаховых решетках и операторных пучков в банаховых пространствах. В частности, доказать операторный вариант теоремы Перрона-Фробениуса о спектре положительной матрицы и получить обобщения теоремы Келдыша о полноте производных цепочек операторных пучков.*

3.4. Задача 4. *Построить нестандартное расширение абстрактной нелинейной экстремальной задачи с операторными ограничениями, изучить инфинитезимальный оптимум и получить необходимые условия экстремума в таких задачах.*

3.5. Задача 5. *Применить комбинированный метод, описанный в 2.5, к нелинейным интегральным операторам Урысона, а также к их абстрактным аналогам, введенным Мазоном и Сегюра де Леоном.*

4. Предполагаемые подходы к решению

Сформулированные выше задачи 3.1–3.5 относятся к разным аналитическим объектам и этим определяется их специфика. В то же время к решению всех задач предлагается привлечь общие средства — нестандартные методы анализа, что и позволяет объединить их в одном проекте. Ниже коротко остановимся на каждой из них.

4.1. В работах [19–22] развивается подход к аппроксимациям топологических групп конечными группами на основе нестандартного анализа. Центральным объектом является гиперконечная аппроксимация G топологической группы $\mathfrak{G}$, т. е. гиперконечная подгруппа $G \subset \mathfrak{G}$, "хорошо расположенная" в $\mathfrak{G}$. Оказывается, что для локально компактной абелевой группы есть гиперконечная аппроксимация и она сохраняется при переходе к двойственным группам, а преобразования Фурье аппроксимируются дискретным преобразованием Фурье. В этой связи интересно исследовать случай некоммутативных групп.

Возникает новый класс локально компактных групп, допускающих гиперконечную аппроксимацию. По-видимому, этот класс включает аменабельные группы, однако точное его описание неизвестно.

Другая возможность связана с определением аппроксимируемости, рассмотренным в [23, 24] в сочетании с нестандартными методами. Отметим, что плодотворность нестандартных методов в исследовании близких проблем была продемонстрирована в [25].

4.2. Хорошо известны глубокие идеи Д. Магарам в теории меры. В большой серии работ она применила свой подход к изучению положительных операторов и получила очень интересные результаты (см. обзор [26]). Однако этот подход до сих пор не получил широкого распространения, возможно, из-за используемой тяжелой техники. Булевозначный анализ дает новый взгляд на исследования Д. Магарам, благодаря чему достигается идейная ясность и технические упрощения. Так, например, ясно, что условие счетности типа, от которого Д. Магарам не избавляется в указанных исследованиях, связано с тонким эффектом смещения кардинальных чисел. С другой стороны, некоторые фрагменты теории Д. Магарам представляют собой булевозначную интерпретацию соответствующих разделов из теории меры. Сочетание идей Магарам с булевозначным анализом начато в [27] для векторных мер. Для положительных операторов такой синтетический подход должен быть весьма продуктивен.

4.3. Для исследования спектральных свойств положительных операторов и операторных пучков предполагается следующий подход:

a) рассмотрение матричных пучков и положительных матриц в конечномерном пространстве;

b) формулировка аналогичных результатов на гиперконечное пространство на основе принципа переноса;

c) нахождение условий, обеспечивающих сохранение свойств для исходного пучка (операторов) при переходе к стандартным частям, оболочкам и т. п.

Существуют исследования, относящиеся к пункту a) (см., например, [28, 29]), а также к пунктам b) и c) для компактных операторов (см. [30]).

4.4. Как показано в [1], инфинитезимальный подход весьма плодотворен при анализе локальных аппроксимаций. В частности, получена полная классификация всевозможных аппроксимаций первого порядка. Аналогичные приемы следует применить к интегральным функционалам и развить соответствующее исчисление субдифференциалов. Далее, отталкиваясь от этих результатов, можно вывести необходимые условия инфинитезимального оптимума в нелинейных и невыпуклых задачах. При минимизации интегрального функционала вывод уравнений Эйлера, естественно, приведет к пространству Лёба — Соболева (см. [32]), которые нуждаются в самостоятельном изучении.

4.5. В [31] построена интересная теория абстрактных нелинейных интегральных операторов в векторных решетках. В частности, ими установлена теорема об интегральной представимости для таких операторов, т. е. теорема о том, когда абстрактный оператор является интегральным оператором Урысона. Булевозначная скаляризация дает новый подход к этой теории. Дело в том, что операторы указанного типа представляют собой суперпозицию интегрального оператора и оператора подстановки (Немыцкого). Первый из них можно заменить булевозначным интегралом, а второй допускает описание через булево расширение в смысле [33].

Другая возможность — дискретизация путем конечномерной аппроксимации оператора. При этом возникает нелинейный оператор $\varPhi$, действующий в конечномерных пространствах по правилу

$$\varPhi(x_1, \dots, x_n)_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}(x_i),$$

где $F = (f_{ij})$ — функциональная матрица. Некоторые свойства оператора описываются посредством матрицы F.

Наконец, интересно было бы применить комбинированный метод 2.5 к операторам этого класса.

5. Основные этапы и ожидаемые результаты

5.1. В задаче 3.1 первый этап — изучение в соответствии с 4.1 локально компактных групп G, допускающих гиперконечную аппроксимацию. Второй этап — построение конечномерных аппроксимаций операторов в $L_2(G)$. Для пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$

такие аппроксимации построены в [13]. Это сделано, например, для однопараметрической группы Вейля $U(u) = e^{iuP}$, $V(v) = e^{ivQ}$, где P и Q — оператор импульса и координаты.

5.2. Первый этап в задаче 3.2 состоит в усилении результатов Д. Магарам [26], используя булевозначную скаляризацию. В частности, нужно избавиться от условия счетности типа и выяснить, как влияет эффект смещения кардинальных чисел на строение алгебры осколков положительного оператора. На втором этапе из уже полученных результатов извлекаются разнообразные следствия о представлении операторов в интегральном или псевдоинтегральном виде. На третьем этапе будет получена дискретизация псевдоинтегрального оператора и конструкция меры Лёба распространится на меры со значениями в векторных решетках.

5.3. Первый этап — "нестандартное" доказательство результатов М. В. Келдыша о представлении результатов и полноте производных цепочек (см. [30]), а также теоремы о строении спектра неприводимых компактных операторов (см. [29]). Второй — получение более общих условий, обеспечивающих оценку результатов, в частности, условия регулярности для пучков дифференциальных операторов с переменными старшими коэффициентами.

5.4. В задаче 3.4 на первом этапе нужно развить исчисление локальных аппроксимаций в духе [1], построить нестандартное расширение нелинейной экстремальной задачи и получить необходимые условия инфинитезимального оптимума. На втором этапе путем дискретизации интегральных функционалов и операторов свести задачу оптимального управления к конечношаговой динамической задаче.

5.5. При изучении нелинейных интегральных операторов на первом этапе следует применить булевозначную скаляризацию. Интерпретация свойств функционалов в подходящей модели приведет к аналогичным результатам для операторов. Далее, на втором этапе будут применены дискретизация и комбинированный метод из 2.5. Предполагается, что так будут получены новые факты о непрерывности и компактности нелинейных интегральных операторов.

Литература

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.
3. *Альбеверио С. и др.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М.: Мир, 1990.
4. *Hurd A.(ed)* Nonstandart Analysis. Recent Development. Berlin: Springer, 1983.
5. *Cutland N.(ed.)* Nonstandart Analysis and its Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
6. *Takeuti G.* Two Applications of Logics to Mathematics. Tokio, Princeton: Iwanami and Princeton Univ. Press. 1978.
7. *Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.* Introduction to the Theory of Infinitesimals. N. Y. a. o.: Academic Press. 1976.
8. *Moore L. C.* Hyperfinite extensions of bounded operators on a separable Hilbert space // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 285–295.
9. *Cutland N.* Nonstandart measure theory and its applications // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, № 6. P. 105–137.

10. *Гордон Е. И.* О мерах Лёба // Известия вузов. Математика. 1991. № 2. С. 25–33.
11. *Кусраев А. Г.* Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25. № 1. С. 69–79.
12. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.
13. *Акилов Г. П., Колесников Е. Н., Кусраев А. Г.* О лебеговом расширении положительных операторов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 83–91.
14. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер // Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1988. 190 с.
15. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Об атомическом разложении векторных мер // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 5. С. 101–110.
16. *Кутателадзе С. С.* Вариант нестандартного выпуклого программирования // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27. № 4. С. 84–92.
17. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* О комбинировании нестандартных методов // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 5. С. 111–119.
18. *Кутателадзе С. С.* Об осколках положительных операторов // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30. № 5. С. 111–119.
19. *Гордон Е. И.* Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L(R)$ // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29. № 2. С. 45–59.
20. *Гордон Е. И.* О преобразовании Фурье в нестандартном анализе // Известия вузов. Математика. 1989. № 2. С. 17–25.
21. *Гордон Е. И.* Гиперконечные аппроксимации локально компактных абелевых групп // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 5. С. 1044–1047.
22. *Гордон Е. И.* Нестандартный анализ и компактные абелевы группы // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32. № 2. С. 26–40.
23. *Вершик А. М.* Счетные группы, близкие к конечным // Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973. С. 112–135.
24. *Vershik A.* Amenability and approximation of infinite groups // Sel. Math. sov. 1982. V. 2. № 4. P. 311–330.
25. *Van den Dries L., Wilkie A. J.* On Gromov's theorem concerning groups of polinomial grouth and elementary logic // J. Algebra. 1984. V. 89, № 2. P. 349–374.
26. *Maharam D.* On positive operators // Conemporary Math. 1984. V. 26. P. 263–277.
27. *Кусраев А. Г.* О строении векторных мер и полных булевых алгебр // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 6.
28. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Spectral analysis of selfajoint matrix polinomials // Ann. Math. Ser. 2. 1980. V. 112, № 1. P. 33–71.
29. *Shaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators. Berlin a.o.: Springer. 1974.
30. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // Успехи мат.наук. 1971. Т. 26, вып. 4. С. 15–41.
31. *Mazon J. M., Sequra de Leon S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1990. V. 30, № 4. P. 329–354.
32. *Arkeryd L., Bergh J.* Some properties of Loeb-Sobolev spaces // J. London Math. Soc. 1986. V. 34, № 2. P. 317–334.
33. *Любецкий В. А., Гордон Е. И.* Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983. С. 82–153.