Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **539.377**

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. Н. Каркусты

Рассмотрим бесконечно тонкую термически изотропную пластину конечной ширины $2b$. Обозначим ее верхнюю границу через α, нижнюю через α', левую половину границы обозначим α_- и α'_-, а правую α_+ и α'_+ соответственно. Найти решения уравнения $\Delta T = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} T(x,y,t) = g_2(x,t) = \cos\beta x \cdot 1, \quad x \in \alpha_+, \\ T(x,y,t) = f_2(x,t) = \sin\beta x \cdot 1, \quad x \in \alpha'_+, \\ \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} = f_1(x,t) = e^x \cdot 1, \quad x \in \alpha_-, \\ \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} = g_1(x,t) = 0, \quad x \in \alpha'_-. \end{gathered} \tag{1}$$

В начальный момент времени $t = 0$ температуру пластинки будем считать равной нулю. Кроме того, пусть функции, определяющие температурное поле в заданной области D при $t \to 0$, суть гладкие функции от x, y, t, и пусть при достаточно больших x выполняются условия

$$\begin{gathered} \lim_{x\to\pm\infty} f_j(x,y,t) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad \alpha > 1, \\ \lim_{x\to\pm\infty} g_j(x,y,t) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad \alpha > 1, \quad j = 1,2. \end{gathered} \tag{2}$$

Решим задачу определения температурного поля в любой момент времени для данного случая.

Известно, что нестационарное температурное поле при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности Фурье:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3}$$

Поэтому нам требуется найти решение уравнения (3) при граничных условиях (1) и нулевых начальных условиях.

Применяя стандартное преобразование Фурье по координате x от $-\infty$ до $+\infty$ и преобразование по времени t от 0 до $+\infty$, учитывая условия на бесконечности, а также начальное условие $T(x,y,t)\big|_{t=0} = 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2T(\alpha,y,\omega)}{dy^2} - \nu^2 T(\alpha,y,\omega), \tag{4}$$

где $\nu^2 = \frac{i\omega}{\varkappa} - \alpha^2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$.

В рассматриваемом случае

$$\begin{gathered} T(\alpha,y,\omega) = T_- + T_+, \\ T(\alpha,y,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt \\ = \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{-i\omega t}e^{-i\alpha x}\,dxdt + \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{-i\omega t}e^{-i\alpha x}\,dxdt\right\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} T_- = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{-i\omega t}e^{-i\alpha x}\,dxdt, \\ T_+ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} T(x,y,t)e^{-i\omega t}e^{-i\alpha x}\,dxdt. \end{gathered} \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} T'_- = \frac{\partial T_-(\alpha,y,\omega)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt, \\ T'_+ = \frac{\partial T_+(\alpha,y,\omega)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение уравнения (4) запишем в виде

$$T = T_- + T_+ = Ae^{-\eta y} + Be^{\eta y}. \tag{8}$$

Теперь перейдем к преобразованию граничных условий (1):

$$\begin{gathered} g_2(\alpha,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\beta x e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-i(\alpha-\beta)x} + e^{-i(\beta+\alpha)x}}{2}\,dx = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{i\omega}\left[\frac{\alpha + \cancel{\beta} + \alpha\ \cancel{\beta}}{i(\alpha^2-\beta^2)}\right] = \frac{\alpha}{\pi\omega(\alpha^2-\beta^2)}; \end{gathered} \tag{9}$$

$$f_2(\alpha,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \sin\beta x e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt$$

$$=\frac{1}{2\pi 2\omega}\int\limits_0^\infty [e^{-i(\alpha-\beta)x}-e^{-i(\beta+\alpha)x}]\,dx=\frac{1}{4\pi\omega}\left[\frac{e^{-i(\alpha-\beta)x}}{-i(\alpha-\beta)}+\frac{e^{-i(\alpha+\beta)x}}{i(\alpha+\beta)}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$=\frac{1}{4\pi\omega}\left[\frac{1}{i(\alpha-\beta)}-\frac{1}{i(\alpha+\beta)}\right]=\frac{1}{4\pi i\omega}\left[\frac{\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}+\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right]=\frac{1}{2\pi i\omega}\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2};$$

$$f_1(\alpha,\omega)=\frac{\partial T(\alpha,y,b)}{\partial y}\Bigg|_{\substack{y=b\\x<0}}=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{i\omega(1-i\alpha)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty e^x e^{-i\alpha x}e^{-i\omega t}\,dxdt,$$

$$g_1(\alpha,\omega)\big|_{\substack{y=b\\x<0}}=0.$$

Подставляя преобразованные граничные условия (9) в решение (8), получим следующую систему:

$$\begin{gathered}
T_-(b)+\frac{1}{2\pi\omega}\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}=Ae^{-\eta b}+Be^{\eta b},\\
T_-(-b)+\frac{1}{2\pi i\omega}\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}=Ae^{\eta b}+Be^{-\eta b},\\
\frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}+T'_+(b)=-\eta Ae^{-\eta b}+\eta Be^{\eta b},\\
T_+(-b)+0=-\eta Ae^{\eta b}+\eta Be^{-\eta b}.
\end{gathered}\tag{10}$$

Система (10) состоит из четырех уравнений с шестью неизвестными функциями $T_-(b)$, $T_-(-b)$, $T'_+(b)$, $T'_+(-b)$, A, B. Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
T_-(b)+T_-(-b)=S_-,\quad T'_+(b)+T'_+(-b)=S'_+,\\
T_-(b)+T_-(-b)=D_-,\quad T'_+(b)-T'_+(-b)=D'_+.
\end{gathered}\tag{11}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
S_-+\frac{1}{2\pi\omega}\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{1}{2\pi i\omega}\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}=(A+B)(e^{\eta b}+e^{-\eta b}),\\
S'_++\frac{1}{2\pi i(1-i\alpha)\omega}=\eta(B-A)(e^{\eta b}+e^{-\eta b}),\\
D_-+\frac{1}{2\pi\omega}\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{1}{2\pi i\omega}\frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}=(B-A)(e^{\eta b}-e^{-\eta b}),\\
D'_++\frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}=\eta(A+B)(e^{\eta b}-e^{-\eta b}).
\end{gathered}\tag{12}$$

Перепишем равенства (12) следующим образом:

$$\frac{S_- + \frac{1}{2\pi\omega(\alpha^2-\beta^2)}(\alpha - i\beta)}{e^{\eta b} + e^{-\eta b}} = A + B, \tag{13}$$

$$\frac{D'_+ + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{e^{\eta b} - e^{-\eta b}} = A + B, \tag{14}$$

$$\frac{S'_+ + \frac{1}{2\pi i(1-i\alpha)\omega}}{\eta(e^{\eta b} + e^{-\eta b})} = B - A, \tag{15}$$

$$\frac{D'_- + \frac{1}{2\pi\omega(\alpha^2-\beta^2)}(\alpha + i\beta)}{e^{\eta b} - e^{-\eta b}} = B - A. \tag{16}$$

Приравнивая левые части (13) и (14), (15) и (16), так как их правые части равны соответственно, получим систему уравнений Винера — Хопфа, куда, как обычно, входят неизвестные функции с отрицательными и положительными индексами:

$$\left[S_- + \frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}\right]\eta(e^{\eta b} - e^{-\eta b}) = \left[D'_+ + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}\right](e^{\eta b} + e^{-\eta b}), \tag{17}$$

$$\left[S'_+ + \frac{1}{2\pi i(1-i\alpha)\omega}\right](e^{+\eta b} - e^{-\eta b}) = \left[D_- + \frac{\alpha i - \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}\right]\eta(e^{\eta b} + e^{-\eta b}). \tag{18}$$

В системе функциональных уравнений Винера — Хопфа (17) и (18) функции S_- и D_- являются регулярными функциями в правой полуполосе, а функции S'_+ и D'_+ регулярны в левой полуполосе. Основной трудностью решения этой системы является факторизация, т. е. расщепление известной функции на две части, которые были бы регулярны в правой и левой полуполосах соответственно.

Перепишем систему функциональных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta \operatorname{th} \eta b\left[S_- + \frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}\right] &= \left[D'_+ + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}\right], \\ S'_+ + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)} &= \left[D_- + \frac{\alpha i - \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}\right]\eta \operatorname{cth} \eta b. \end{aligned} \tag{19}$$

Выразим факторизации $\operatorname{cth} \eta b$ и $\operatorname{th} \eta b$ через функции Эйлера:

$$\frac{\eta b}{b}\operatorname{cth} \eta b = K_+(\eta)K_-(\eta) = \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{20}$$

Расщепляя выражение (20) на две части таким образом, чтобы одна из них была регулярна в правой полуполосе, а вторая — в левой. Такими частями являются две функции

$$K_+(\eta) = \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}, \quad K_-(\eta) = \frac{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{21}$$

Аналогичным образом получаем расщепления

$$\frac{1}{b}(\eta b \operatorname{th} \eta b) = \alpha_-(\eta)\alpha_+(\eta),$$

где

$$\alpha_-(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}, \quad \alpha_+(\eta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{22}$$

Далее, учитывая соотношения (21) и (22), функциональные уравнения (19) можем записать в виде

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})} S_-(\eta) + \frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2 - \beta^2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}$$
$$= D'_+ \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})} + \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{2\pi i\omega(1 - i\alpha)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}, \tag{23}$$

$$S'_+ \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})} + \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{2\pi i\omega(1 - i\alpha)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}$$
$$= D_- \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})} + \frac{\alpha i - \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2 - \beta^2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{24}$$

В уравнении (23) функция $\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}$ регулярна и не имеет нулей в правой полуполосе. Легко видеть, что $(1 - i\alpha) \neq 0$ при $\Re\alpha > 0$, так как α — комплексный параметр ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$) и $\alpha = -i$ не является корнем знаменателя для соответствующего выражения. Отсюда можно заключить, что $\frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{2\pi i\omega(1 - i\alpha)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})} \to 0$ при $\alpha \to \infty$. Кроме того, $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, так как в противном случае выполнилось бы соотношение $\alpha = \pm\beta$, но β является вещественным, а α — комплексным и при $\alpha_2 \neq 0$ α не будет равняться β. Следовательно, при $\alpha \to \infty$

$$\frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2 - \beta^2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})} \to 0.$$

Перепишем функциональное уравнение (23) в виде

$$S_-(\eta) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})} - \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{2\pi i\omega(1 - i\alpha)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}$$
$$= D'_+ \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})} - \frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2 - \beta^2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{25}$$

В уравнении (25) левая часть регулярна и не имеет нулей в левой полуполосе, а в правой полуполосе она обращается в нуль при $\alpha \to \infty$. Правая же часть уравнения (25) регулярна и не имеет нулей в правой полуполосе, а в левой обращается в нуль при $\alpha \to \infty$. Введем регулярную в полосе функцию $J(\alpha)$:

$$J(\alpha) = S_-(\eta) \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})} - \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{2\pi i\omega(1 - i\alpha)\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})}$$
$$= D'_+ \frac{\Gamma(1 - \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\eta b}{\pi})} - \frac{\alpha i + \beta}{2\pi i\omega(\alpha^2 - \beta^2)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i\eta b}{\pi})}{\Gamma(1 + \frac{i\eta b}{\pi})}. \tag{26}$$

Эта функция регулярна на всей полосе, а функции S_- и D'_+ являются регулярными соответственно в правой и левой полуполосах, кроме того, $S_- = 0$ в правой полуполосе, а $D'_+ = 0$ в левой полуполосе.

Учитывая сказанное выше и используя теорему Лиувилля о том, что любая ограниченная функция, аналитическая (регулярная) при всех конечных значениях аргумента, есть постоянная будем иметь: $J(\alpha) \equiv 0$.

Таким образом из уравнения (25) получаем следующие соотношения:

$$S_- = \frac{\operatorname{cth}\eta b}{2\pi i\omega(1-i\alpha)\eta}, \tag{27}$$

$$D'_+ = \frac{(\alpha i+\beta)\eta \operatorname{th}\eta b}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}. \tag{28}$$

Вернемся теперь к решению функционального уравнения (24). Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным для уравнения (23), получим:

$$D'_+ = \frac{(\alpha i+\beta)}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}\eta \operatorname{cth}\eta b, \tag{29}$$

$$D_- = \frac{\operatorname{th}\eta b}{\eta 2\pi i\omega(1-i\alpha)}. \tag{30}$$

Используя найденные значения S_-, D'_+, S'_+ и D_- найдем произвольные постоянные A и B.

Для этого используем соотношения (13)–(16).

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\operatorname{cth}\eta b}{2\pi i\omega(1-i\alpha)\eta}+\frac{\alpha i+\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{e^{\eta b}+e^{-\eta b}} = A+B,\\
&\frac{\frac{(\alpha i-\beta)}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{1}{2\pi i(1-i\alpha)\omega}}{\eta(e^{\eta b}+e^{-\eta b})} = B-A\\
&\frac{\frac{\operatorname{th}\eta b}{\eta 2\pi i\omega(1-i\alpha)}+\frac{\alpha i-\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{e^{\eta b}-e^{-\eta b}} = B-A,\\
&\frac{\frac{(\alpha i+\beta)\eta \operatorname{th}\eta b}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{\eta(e^{\eta b}-e^{-\eta b})} = A+B,
\end{aligned} \tag{31}$$

Легко видеть,что в выражениях (31) первое и четвертое, второе и третье соотношения являются тождествами. Поэтому для определения произвольных постоянных достаточно выбрать из них.

Из первых двух уравнений (31) будем иметь

$$2B = \frac{\frac{\operatorname{cth}\eta b}{2\pi i\omega(1-i\alpha)\eta}+\frac{\alpha i+\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{e^{\eta b}+e^{-\eta b}} + \frac{\frac{(\alpha i-\beta)}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{\eta(e^{\eta b}+e^{-\eta b})},$$

$$2A = \frac{\frac{\operatorname{cth}\eta b}{2\pi i\omega(1-i\alpha)\eta}+\frac{\alpha i+\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{e^{\eta b}+e^{-\eta b}} - \frac{\frac{(\alpha i-\beta)}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}+\frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{\eta(e^{\eta b}+e^{-\eta b})},$$

а из последних двух уравнений (31) получим

$$2B = \frac{\frac{\operatorname{th}\eta b}{\eta 2\pi i\omega(1-i\alpha)} + \frac{\alpha i-\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{(e^{\eta b} - e^{-\eta b})} + \frac{\frac{\eta \operatorname{th}\eta b(\alpha i+\beta)}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{\eta(e^{\eta b} - e^{-\eta b})},$$

$$2A = \frac{\frac{(\alpha i+\beta)\eta \operatorname{th}\eta b}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)} + \frac{1}{2\pi i\omega(1-i\alpha)}}{\eta(e^{\eta b} - e^{-\eta b})} - \frac{\frac{\operatorname{th}\eta b}{\eta 2\pi i\omega(1-i\alpha)} + \frac{\alpha i-\beta}{2\pi i\omega(\alpha^2-\beta^2)}}{e^{\eta b} - e^{-\eta b}}.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{\eta 2\pi i\omega(e^{2\eta b} - e^{-2\eta b})}\left\{\frac{e^{-\eta b}}{1-i\alpha} - \frac{\eta(\alpha i e^{-\eta b} - \beta e^{\eta b})}{\alpha^2-\beta^2}\right\},$$

$$B = \frac{1}{2\pi i\eta\omega(e^{2\eta b} - e^{-2\eta b})}\left\{\frac{e^{\eta b}}{1-i\alpha} + \frac{\eta(\alpha i e^{\eta b} - \beta e^{-\eta b})}{\alpha^2-\beta^2}\right\}.$$

Подставляя найденные значения A и B в решения уравнения (4), получим

$$T(\alpha,y,\omega) = \frac{1}{2\eta\pi i\omega \operatorname{sh} 2\eta b}\left\{\frac{\operatorname{ch}\eta(b-y)}{1-i\alpha} + \frac{i\alpha \operatorname{sh}\eta(b+y)}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{\beta \operatorname{sh}\eta(b-y)}{\alpha^2-\beta^2}\right\}. \tag{32}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье для выражения (32), получим искомое решение уравнения (3):

$$T(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} T(\alpha,y,\omega)e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\,d\alpha dt,$$

$$T(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2\eta\pi i\omega \operatorname{sh} 2\eta b}\left\{\frac{\operatorname{ch}\eta(b-y)}{1-i\alpha}\right. \tag{33}$$

$$\left. + \frac{\eta\alpha \operatorname{sh}\eta(b+y)}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{\beta \operatorname{sh}\eta(b-y)}{\alpha^2-\beta^2}\right\}e^{i\alpha x}e^{i\omega t}\,d\alpha d\omega.$$

Литература

1. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.—М.: Изд-во ИЛ, 1962.
2. *Мусхелишвили Н. Н.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.
3. *Каркузашвили Н. Н.* Задача о неустановленном температурном поле в неограниченной пластинке со смешанными граничными условиями // Некоторые вопросы прикладной математики.—Киев: Наукова думка, 1971.—Вып. 1.—С. 52–57.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.—М.: Наука, 1964.