Владикавказский математический журнал
Январь–март, 1999, Том 1, Выпуск 1

УДК **517.5+517.956.224**

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ В L_p-ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Н. О. Белова

Развитая в работах [1-10] L_p-теория потенциала — это естественное распространение идей и методов линейной теории потенциала [11, 12], возникшее в связи с решением ряда принципиальных задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. В перечисленных работах приведена подробная библиография, отражающая эволюцию теории.

Здесь мы используем подход работы [9], систематически обобщающей основные факты теории как для ядер с нестепенными особенностями, так и для достаточно широкого класса пространств, встречающихся в анализе. Основные объекты, исследуемые в настоящей статье, — это разреженные множества, квазинепрерывные функции и множества единственности для потенциалов.

Понятие разреженного множества возникло в [13], где был получен критерий иррегулярности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в граничной точке, и является фундаментальным для теории потенциала, см., например [11, 12, 14], и приведенную там библиографию. Отметим работы [15–21], в которых получены аналоги критерия Винера для различных дифференциальных уравнений. Теорема Шоке о разреженных множествах в нелинейной теории потенциала [4] — это ключевой результат в решении задачи о спектральном синтезе [22, 23].

Здесь (§ 2) получен весовой вариант теоремы Шоке и свойства Келлога на пространствах однородного типа, содержащий в качестве частного случая результаты работы [9].

В § 3 доказано, что свойство тонкой непрерывности функции эквивалентно ее квазинепрерывности. Это результат обобщает соответствующие утверждения работ [14, 24].

Множество единственности для риссовых потенциалов на евклидовом пространстве R^n, исследовано в работе [25]. В § 4 получен аналог этого результата в пространствах весовых потенциалов.

Остановимся на основных понятиях из [9], используемых в работе.

Пространством однородного типа (G, r, ω) называется множество G, на котором заданы нетривиальная мера ω и псевдометрика $r : G \times G \to [0, \infty]$ со свойствами:

1) $r(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $r(x, y) = r(y, x)$;
3) $r(x, y) \leqslant c(r(x, z) + r(z, y))$,

где постоянная c не зависит от выбора точек $x, y, z \in G$. Предполагается, что все шары $B(x, \rho) = \{y \in G : r(x, y) < \rho\}$ измеримы, что равномерно непрерывные в метрике r функции плотны в $L_1(w)$, и что мера ω удовлетворяет условия удвоения:

$$0 < \omega(B(x, 2\rho)) < C\omega(B(x, \rho)), \quad \rho > 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

для некоторой постоянной C, не зависящей от x и ρ.

Примеры пространств однородного типа см., например, [26–28].

Определяя, если необходимо, на пространстве G эквивалентную метрику [27, 29], предполагаем в дальнейшем выполнение следующего свойства: если $y \in B(x, P)$ и $0 < \rho < 2cP$, то для некоторой постоянной C_1

$$\omega(B(y,\rho) \cap B(x,P)) > C_1 \omega(B(y,\rho)). \tag{2}$$

Весовые функции. Будем говорить, что неотрицательная, почти всюду конечная функция w, определенная на пространстве G, *удовлетворяет A_p-условию Макенхаупта* [24, 30] (или просто $w \in A_p$), $1 < p < \infty$, если

$$\sup \left(\frac{1}{\omega(B)} \int\limits_B w \, d\omega \right) \left(\frac{1}{\omega(B)} \int\limits_B w^{1/(1-p)} \, d\omega \right)^{p-1} < \infty, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всем шарам $B \subset G$. При $p = 1$ определение класса A_1 принимает вид $Mw(x) \leqslant cw(x)$, где

$$Mf(x) = \sup \left\{ \omega(B(x,\rho))^{-1} \int\limits_{B(x,\rho)} |f| \, d\omega : \rho > 0 \right\}$$

— максимальная функция.

Говорят, что вес w *удовлетворяет условию удвоения*, если существует такая постоянная c_0, что для любого шара $B \subset G$ выполнено $w(B^*) < c_0 w(B)$, где B^* — шар с тем же центром, что и B, и радиусом, большим исходного, в два раза. Вес $w \in (\mathrm{w}A_\infty)$, если существуют постоянные β и δ такие, что для любых шара $B \subset G$ и измеримого множества $E \subset B$ верно

$$w(E)/w(B^*) < \beta(\omega(E)/\omega(B))^\delta. \tag{4}$$

Другие характеристики класса $(\mathrm{w}A_\infty)$ в R^n см. в [31].

Ядра и их свойства. Пусть полунепрерывная снизу функция $k : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ обладает свойствами:

k1. Функция $k : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ не возрастает.

k2. Для любого $\tau > 0$ $\quad ak(\tau)\tau < \int\limits_0^\tau k(t)\, dt \leqslant bk(\tau)\tau$, где числа $1 < a \leqslant b < \infty$ не зависят от τ.

k3. Если w — весовая функция, то для любого числа $\tau > 0$ и любой точки $x \in G$ выполняется соотношение

$$\int\limits_\tau^\infty k(t)^q w^{1-q}(B(x,t)) \, \frac{dt}{t} < \infty.$$

Функция k определяет полунепрерывное снизу ядро $K : G \times (0,\infty) \to (0,\infty)$ по правилу

$$K(x,\rho) = k(\omega(B(x,\rho))). \tag{5}$$

Будем предполагать для ядра K выполнение следующих свойств:

$K1$. При каждом фиксированном $x \in G$ функция $K(x, \rho_x(\omega)) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ не возрастает и абсолютно непрерывна по ω (здесь $\rho_x(\omega)$ однозначно определяется из условия $\omega(B(x,\rho_x(\omega))) = \omega$).

$K2$. $aK(x,\tau)\omega(B(x,\tau)) \leqslant \int\limits_0^\tau K(x,t)d\omega(B(x,t)) \leqslant bK(x,\tau)\omega(B(x,\tau))$, где $1 < a \leqslant b < \infty$ не зависят от $x \in G$ и $\tau > 0$.

$K3$. Для любого $\rho > 0$ верно $K(x,\rho/2) \leqslant CK(x,\rho)$, где C — постоянная из условия удвоения (1).

$K4$. При каждом $x \in G$ верно $\lim\limits_{\rho\to 0} K(x,\rho)\omega(B(x,\rho)) = 0$.

$K5$. При каждом $x \in G$ произведение $K(x,\rho)\omega(B(x,\rho))$ не убывает на $(0,\infty)$.

$K6$. Для всех $\rho > 0$ $(1-1/a)K(x,\rho) \leqslant -K'_\omega(x,\rho)\omega(B(x,\rho)) \leqslant (1-1/b)K(x,\rho)$, где $K'_\omega(x,\rho) = [K'_\omega(\cdot,\rho_x(\omega))](x,\omega(B(x,\rho)))$.

$K7$. Для всех $\tau > 0$ верно —

$$\int\limits_0^\tau K'_\omega(x,t)\omega(B(x,t))d\omega(B(x,t)) \leqslant (b-1)K(x,\tau)\omega(B(x,\tau)).$$

$K8$. Существуют положительные числа A_1 и A_2 такие, что для всех $x \in G$, $\rho \in (0,\infty)$ и $y \in B(x,\rho)$ выполняется

$$0 < A_1 \leqslant K(x,\rho)/K(y,\rho) \leqslant A_2 < \infty.$$

Можно положить $A_1 = C_1$, $A_2 = 1/C_1$, где C_1 — постоянная из (2).

Пусть еще $K(x,y) = K(x,r(x,y))$. Для ядра $K(x,y)$ имеем свойство

$K9$. Для всех $x,y \in G$, $x \neq y$, верно $A_1 \leqslant K(x,y)/K(y,x) \leqslant A_2$, где A_1 и A_2 из $K8$.

В дальнейшем термин «ядро», отнесенный к пространству однородного типа, означает полунепрерывную снизу функцию $K : G \times (0,\infty) \to (0,\infty)$, обладающую, кроме $K1$–$K9$, свойством:

$K10$. Для любого $x \in G$ и $\tau > 0$ интеграл $\int\limits_\tau^\infty K(x,t)^q\, dt$ конечен.

Для ядер, зависящих от точки x, будем предполагать в специально оговоренных случаях выполнение следующих свойств:

$K12$. Для произвольного ограниченного измеримого множества $B \subset G$

$$\lim_{x\to y} \int\limits_B |K(x,z) - K(y,z)|\, d\omega(z) = 0,$$

где точка $y \in G$ произвольна.

$K12'$. Для произвольных чисел α, β таких, что $0 < \alpha < \beta < \infty$,

$$\lim_{x\to y} \int\limits_\alpha^\beta |K(x,\rho) - K(y,\rho)|\, d\rho(z) = 0,$$

где точка $y \in G$ произвольна.

Нелинейные потенциалы, энергия и емкость.

Фиксируем ядро K, удовлетворяющее условиям $K1$–$K10$. Пусть еще $p \in (1, \infty)$ — произвольное число. *Потенциалом борелевской меры μ в G относительно ядра K* называется функция

$$K(\mu, y) = \int_G K(x, y)\, d\mu(x),$$

а ее *весовой (K, p)-энергией* — величина

$$\mathcal{E}^w_{K,p}(\mu) = \int_G K(\mu, y)^q w^{1-q}(y)\, d\omega(y),$$

где $pq = p + q$ и функция $w : G \to [0, \infty]$ почти всюду конечна и положительна. Выражение

$$U^w_{K,p}\mu(x) = \int_G K(x, y) \left\{ w^{-1}(y) \int_G K(z, y)\, d\mu(z) \right\}^{q-1} d\omega(y) \tag{6}$$

называется *весовым U-потенциалом меры μ* (относительно ядра K).

Для борелевской меры μ в пространстве G определим функцию

$$W^w_{K,p}\mu(x) = \int_0^\infty K(x, \rho)^q \mu(B(x, \rho))^{q-1} \left(\int_G w^{1-q}\, d\omega \right) \frac{d\rho}{\rho}, \tag{7}$$

называемую *весовым W-потенциалом.*

Обозначим символом $M^+(e)$ множество борелевских мер сосредоточенных на e, а $\|\mu\|$ — полную вариацию меры μ.

Рассмотрим топологические локально-компактные пространства X и Y. Пусть ν — неотрицательная мера, определенная на σ-алгебре всех борелевских множеств пространства Y. Пусть еще $k : X \times Y \to R$ — неотрицательная борелевская функция такая, что для всякой неотрицательной функции $f \in L_p(Y, \nu)$ функция

$$k(x, f) = \int_Y k(x, y) f(y)\, d\nu(y)$$

полунепрерывна снизу на X. Для $p \in (1, \infty)$ определим функциональное пространство $k(L_p(Y, \nu)) = \{g = k(x, f) : f \in L_p(Y, \nu)\}$

Емкость компакта $e \in X$ в пространстве $k(L_p(Y, \nu))$ равна

$$\cap(e; k(L_p(Y, \nu)) = \inf\left\{ \int f(y)^p\, d\nu(y) : f \geqslant 0 \text{ и } kf(x) \geqslant 1 \text{ на } e \right\} \tag{8}$$

Емкость может быть найдена также и другим способом:

$$\cap(e; k(L_p(Y, \nu)))^{1/p} = \sup\{\|\mu\|_1 / \|k(\mu, \cdot) \mid L_q(\nu)\| : \mu \in M^+(e)\} \tag{9}$$

где $pq = p + q$. Более того, для компакта e существует борелевская мера μ_e, сосредоточенная на e, такая что

$$\|\mu_e\|_1 = \cap(e; k(L_p(Y,\nu))) = \int k(\mu_e, y)^q \, d\nu(y), \text{‘} \tag{10}$$

$$U_k\mu_e(x) = k(x, k(\mu_e, \cdot)^{q-1}\nu) \geqslant 1 \text{ для квазивсех } x \in e, \tag{11}$$

$$U_k\mu_e(x) \leqslant 1 \text{ для всех } x \in \sup \mu_e. \tag{12}$$

Экстремальная мера μ_e называется *емкостной мерой* множества e. Из (10)–(12) легко получить, что для любого компакта e верно

$$\cap(e; k(L_p(Y,\nu))) = \sup\{\|\mu\|_1 : \mu \in M^+(e) \text{ и } U_k\mu(x) < 1 \text{ на } \sup \mu\}. \tag{13}$$

Рассмотрим пространство весовых потенциалов $K(L_p(w))$, соответствующих мере $d\nu_1(y) = w(y) d\omega$ на G и ядру $k_1(x,y) = K(x,y) * w(y)^{-1}$, определенному на декартовом произведении $G \times G$, где пространство G и ядро K описаны выше. Пространство $k_1(L_p(G,\nu_1))$ состоит в этом случае из функций $g = \int K(x,y) f(y) \, d\omega(y)$, где $f \in L_p(\omega) = L_p(G,\nu_1)$, и обозначается в дальнейшем символом $K(L_p(w))$. Емкость $\cap(e; K(L_p(w)))$ определяется из (8).

Пусть $X = G$, $Y = G \times (0,\infty)$. Введем еще одно пространство потенциалов, задаваемое ядром $k_2 : X \times Y \to (0,\infty)$, где

$$k_2(x,(y,t)) = \chi_{B(x,t)}(y) K(y,t),$$

и мерой $d\nu_2 = w^{1-q}(y) \, d\omega(y) \frac{dt}{t}$. (Для быстроубывающих ядер см. [9, § 4]). Пространство потенциалов обозначим через $k_2(L_p(\nu_2)) = \{g = k_2 f : f \in (L_p(Y,\nu_2))$. В работе [9, §§ 2–4] получены следующие соотношения, которые нам потребуются ниже:

(i) Для веса $w^{1-g} \in (\mathrm{w}A_\infty)$.

$$\mathcal{E}^w_{K,p}(\mu) \equiv \int\limits_G W^w_{K,p}\mu(x) \, d\mu(x),$$

$$\cap(e; K(L_p(w))) \equiv \cap(e; k_2(L_p(Y,\nu_2))), \tag{14}$$

$$W^w_{K,p}\mu_e(x) \geqslant 1/c_2 > 0 \tag{15}$$

квазивсюду на e, где μ_e — экстремальная мера из (10), найденная по ядру k_2.

(ii) Для любой меры $\mu \in M^+(e)$ и $w^{1-g} \in (\mathrm{w}A_\infty)$ справедлива оценка

$$\cap(\{x \in G : \; W^w_{K,p}\mu(x) > \lambda\}; K(L_p(w))) \leqslant c\lambda^{-p} \mathcal{E}^w_{K,p}(\mu),$$

где $\lambda > 0$, а постоянная c не зависит от выбора меры μ.

1. Разреженные множества в весовой теории потенциала для произвольных ядер на пространствах однородного типа

Рассмотрим пространство G однородного типа и полунепрерывное снизу ядро $K(x,\rho)$ со свойствами $K1$–$K10$, $K12$. Символом w обозначим весовую функцию на G.

Множество $E \subset G$ называется (K,ρ,w)-*разреженным в точке* $x \in G$, если

$$\int_0^1 K(x,\rho)^q \Biggl(\int_{B(x,\rho)} w^{1-q} \Biggr) \frac{d\rho}{\rho} = \infty, \tag{16}$$

$$\int_0^1 \cap(B(x,\rho)\cap E;\ (L_p(w)))^{q-1} K(x,\rho)^q \Biggl(\int_{B(x,\rho)} w^{1-q} \Biggr) \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{17}$$

В случае $G = R^n$, $r = \|\cdot\|$, $K(x,\rho) = \rho^{1-n}$, $p = 2$, $w \in A_2$ приведенное определение разреженности согласуется с определением, данным в работе [19]. Положим $e^w_{K,p}(E) = \{x \in G : E$ — разреженное в точке $x\}$. Будем говорить, что свойство выполнено *квазивсюду*, если оно выполнено всюду за исключением множества нулевой емкости.

Предложение 1. *Пусть вес $w^{1-q} \in (\mathrm{w}A_\infty)$ удовлетворяет условию удвоения, для ядра K выполнено $K12'$, и в некоторой точке $x_0 \in G$ выполняется соотношение (16). Пусть множество $E \subset G$. Если существует мера $\mu \in M^+$ такая, что*

$$W^w_{K,p}\mu(x_0) < \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} W^w_{K,p}\mu(x), \tag{18}$$

то множество E (K,p,w)-разреженно в точке x_0.

Доказательство. Пусть $x \in G$, $E \subset G$, и предположим, что существует мера $\mu \in M^+$ такая, что

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_{K,p}\mu(x_0) = \eta \geqslant 0.$$

Покажем, что из этого утверждения вытекает (K,p,w)-разреженность E в точке x_0, т. е. выполнено условие (17). Для этого мы докажем существование меры $\gamma \in M^+(\overline{B(x_0,\rho)})$ такой, что $W^w_{K,p}\gamma(x_0) < \varepsilon$ и $\varliminf\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} W^w_{K,p}\gamma(x) \geqslant 1$. В самом деле, для $\rho > 0$ определим меру μ_ρ как сужение меры μ на замкнутый шар $\overline{B(x_0,\rho)}$. Для любой точки $x \in B(x_0,\rho/2c)$ и числа $\delta \leqslant \rho/2c$ имеем $\mu_\rho(B(x,\delta)) = \mu(B(x,\rho))$. Поэтому в силу конечности W-потенциала в точке x_0, свойств ядра $K8$ и $K12'$, а также условия удвоения для w^{1-q} разность

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} W^w_{K,p}\mu_\rho(x) - W^w_{K,p}\mu_\rho(x_0) = \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} \int_0^{\rho/2c} K(x,\tau)^q \mu(B(x,\tau))^{q-1} \Biggl(\int_{B(x,\tau)} w^{q-1} \Biggr) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$- \int_0^{\rho/2c} K(x_0,\tau)^q \mu(B(x_0,\tau))^{q-1} \Biggl(\int_{B(x_0,\tau)} w^{1-q} \Biggr) \frac{d\tau}{\tau} = \varliminf_{\substack{x\to x_0\\ x\in E\setminus\{x_0\}}} W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_{K,p}\mu(x_0) = \eta.$$

С другой стороны, по [9, лемма 2] $W^w_{K,p}\mu_\rho(x_0)\to 0$ при $\rho\to 0$. Следовательно, ρ можно выбрать таким, чтобы $W^w_{K,p}\mu_\rho(x_0)<\eta\varepsilon$. В качестве меры γ возьмем $\eta^{1-p}\mu_\rho$.

Для $\tau<\rho$ положим $\gamma_\tau=\gamma\mid_{B(x_0,\tau)}$, $\gamma=\gamma_\tau+\gamma'_\tau$. В этих обозначениях для любой точки $x\in B(x_0,\tau/2c)$ имеем оценки

$$W^w_{K,p}\gamma'_\tau(x)\leqslant\int\limits_{\tau/2c}^{\infty}K(x,\delta)^q\gamma'_\tau(B(x,\delta))^{q-1}\biggl(\int\limits_{B(x,\delta)}w^{1-q}\biggr)\frac{d\delta}{\delta}$$
$$\leqslant\int\limits_{\tau/2c}^{\infty}K(x,\delta)^q\gamma(B(x,\delta))^{q-1}\biggl(\int\limits_{B(x,\delta)}w^{1-q}\biggr)\frac{d\delta}{\delta}+AW^w_{K,p}\gamma(x_0),$$

где постоянная A зависит только от константы из условия удвоения для веса w^{1-q} и свойства ядра $K8$. Учитывая включение $B(x,\delta)\subset B(x_0,2c\delta)$ при $\delta>\tau/2c$, получаем оценку $W^w_{K,p}\gamma'_\tau(x)\leqslant AW^w_{K,p}\gamma(x_0)\leqslant A_1\varepsilon$ для всех точек $x\in B(x_0,\tau/2c)$, где постоянная A_1 зависит еще от свойства $K3$. Так как $W^w_{K,p}\gamma(x)\leqslant A_2\bigl(W^w_{K,p}\gamma_\tau(x)+W^w_{K,p}\gamma'_\tau(x)\bigr)$, то на пересечении $B(x_0,\tau/2c)\cap E$ имеют место соотношения

$$W^w_{K,p}\gamma_\tau(x)\geqslant A_2^{-1}W^w_{K,p}\gamma(x)-W^w_{K,p}\gamma'_\tau(x)\geqslant\frac{1}{2}A_2-A_1\varepsilon>\frac{1}{4}A_2,$$

если τ и ε достаточно малы. В силу [9, предложение 4] верна оценка $\cap(B(x_0,\tau/2c)\cap E;K(L_p(w)))\leqslant\widetilde{A}(4A_2)^{p-1}\gamma(B(x_0,\tau))$, откуда получаем неравенства

$$\int\limits_0^1K(x_0,\tau)^q\cap(B(x_0,\tau/2c)\cap E;K(L_p(w)))^{q-1}\left(\int\limits_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\right)\frac{d\tau}{\tau}$$
$$\leqslant A\int\limits_0^1K(x_0,\tau)^q\gamma(B(x_0,\tau))^{q-1}\left(\int\limits_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\right)\frac{d\tau}{\tau}\leqslant A\varepsilon.$$

Следствие 1. *Пусть вес $w\in A_p$, множество U открыто, μ — борелевская мера на G и ядро K удовлетворяет условию $K12'$. Если для некоторой положительной постоянной α неравенство $W^w_{K,p}\mu(x)\geqslant\alpha$ выполняется для квазивсех $x\in U$, то оно верно для всех $x\in U$.*

Доказательство. Пусть при некотором $\varepsilon>0$ замкнутое множество $A_\varepsilon=\{x\in U: W^w_{K,p}\mu(x)\leqslant\alpha-\varepsilon\}$ непусто. Фиксируем точку $x_0\in A_\varepsilon$. Так как при любом $\varepsilon>0$ имеем $\cap(A_\varepsilon;K(L_p(w)))=0$, то в силу [9, замечание 3] в точке x_0 выполняется условие (16). Таким образом, открытое множество $U_\varepsilon=U\backslash A_\varepsilon$ по предложению 1 (K,p,w)-разреженно в точке x_0. С другой стороны, множество U_ε отличается от множества U на множество нулевой емкости, поэтому для всех шаров $B(x_0,\delta)$, где δ не превосходит некоторого положительного τ, верно $\cap(B(x_0,\delta)\cap U_\varepsilon;K(L_p(w)))=\cap(B(x_0,\delta);K(L_p(w)))$. Имея в виду [9, предложение 5], получаем, что для множества $E=U_\varepsilon$ и точки x_0 интеграл в (17) по промежутку $(0,\tau)$ оценивается снизу

$$\int\limits_0^\tau\frac{dc(x_0,\delta)}{c(x_0,\delta)}=\lim_{\delta\to 0}\ln\frac{c(x_0,\tau)}{c(x_0,\delta)}=\infty,$$

что противоречит (K,p,w)-разреженности множества U_ε в точке x_0.

Теорема 1. *Пусть вес $w^{1-q}\in A_p$, ядро K обладает свойством $K12'$, и в некоторой точке $x_0\in G$ выполняется условие* (16). *Множество $E\subset G$ (K,p,w)-разреженно в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует мера $\mu\in M^+$ такая, что выполняется условие* (18).

Доказательство. Достаточность условия (18) для (K,p,w)-разреженности множества E в точке x_0 вытекает из предложения 1. Докажем теперь необходимость условия (18) в теореме 1. Пусть E — произвольное множество на пространстве G однородного типа, и в точке x_0 выполнены соотношения (16) и (17). Нетрудно заметить, что существует открытая окрестность U множества E такая, что

$$\cap(B(x_0,2^{-n})\cap U;K(L_p(w)))\leqslant 2\cap(B(x_0,2^{-n})\cap E;K(L_p(w))),\ \ n\in N.$$

Таким образом, множество U (K,p,w)-разреженно в точке x_0. В силу (16) для любого $\varepsilon>0$ найдется окрестность V точки x_0 такая, что $\cap(V;K(L_p(w)))<\varepsilon$. Рассмотрим W-потенциал емкостной меры $\mu_{U\cap V}$ множества $U\cap V$ относительно ядра k_2. Тогда согласно (15) и [9, следствие 8] неравенство $W^w_{K,p}\mu_{U\cap V}\leqslant c_2$ верно всюду на $U\cap V$ (переход от компактных множеств к борелевским осуществляется так же, как и в [32]). Имея в виду соотношения $W^w_{K,p}\mu_{U\cap V}(x)\leqslant c_2$ для всех точек $x\in\sup\mu_{U\cap V}$, из неравенств (12), (13), (14) получаем

$$\begin{aligned}\mu_{U\cap V}(B(x_0,\tau))&=\mu_{U\cap V}(U\cap V\cap B(x_0,\tau))\\&\leqslant c_2\cap(U\cap V\cap B(x_0,\tau)\cap E;K(L_p(w))).\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}W^w_{K,p}\mu_{U\cap V}(x_0)&=\int_0^\delta K(x_0,\tau)^q\mu_{U\cap V}(B(x_0,\tau))^{q-1}\Big(\int_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\\&\quad+\int_\delta^\infty K(x_0,\tau)^q\mu_{U\cap V}(B(x_0,\tau))^{q-1}\Big(\int_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\\&\leqslant c_2\Bigg(\int_0^\delta K(x_0,\tau)^q\cap(U\cap V\cap B(x_0,\tau);K(L_p(w)))^{q-1}\times\Big(\int_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\\&\quad+\int_\delta^\infty K(x_0,\tau)^q\cap(B(x_0,\tau/2c)\cap E;K(L_p(w)))^{q-1}\times\Big(\int_{B(x_0,\tau)}w^{1-q}\Big)\frac{d\tau}{\tau}\Bigg)=I_1+I_2.\end{aligned}$$

Из разреженности множеств в точке x_0 вытекает, что $I_1\to 0$ при $\delta\to 0$ независимо от окрестности V. Если второе слагаемое отлично от нуля, то

$$I_2\leqslant c_2\cap(V;K(L_p(w)))^{q-1}\int_\delta^\infty K(x_0,\tau)^q\Big(\int_{B(x,\tau)}w^{1-q}\Big)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Так как последний интеграл конечен, то подбирая окрестность V, можно сделать величину I_2 сколь угодно малой. Таким образом,

$$W^w_{K,p}\mu_{U\cap V}(x_0) \to 0, \text{ если } \cap(V; K(L_p(w))) \to 0. \tag{19}$$

Поскольку $W^w_{K,p}\mu_{U\cap V} \leqslant c_1$ всюду на множестве $U \cap V$, то неравенство (18) для множества $U \cap V$ и, следовательно, для $(E \cap V) \subset (U \cap V)$ доказано.

2. Весовые варианты теоремы Шоке и свойства Келлога

Для доказательства теоремы Шоке потребуется свойство квазинепрерывности W-потенциала.

Функция называется *квазинепрерывной относительно емкости* $\cap(\cdot; K(L_p(w)))$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U такое, что $\cap(U; K(L_p(w))) < \varepsilon$ и сужение функции на $G\backslash U$ непрерывно.

Предложение 2. *Пусть $w^{1-q} \in (\mathrm{w}A_\infty)$, $\mu \in M^+$, $\mathcal{E}^w_{K,p}(\mu) < \infty$ и ядро K удовлетворяет свойству $K12'$. Тогда W-потенциал $W^w_{K,p}\mu(x)$ — квазинепрерывная функция.*

Доказательство. Функция

$$W^w_n\mu(x) = \int\limits_{1/2^n}^{\infty} K(x,\rho)^q \mu(B(x,\rho))^{q-1}\biggl(\int\limits_{B(x,\rho)} w^{1-q}\biggr)\frac{d\rho}{\rho},$$

непрерывна. $e \subset E^n_\lambda$, $\cap(e; K(L_p(w))) = \gamma(e)$. Так как

$$W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_n\mu(x) \to 0$$

μ-почти всюду, то

$$\int (W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_n\mu(x))\, d\mu(x) = c_n \to 0$$

при $n \to \infty$. Оценим емкость открытого множества $E^n_\lambda = \{x \in G : (W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_n\mu(x)) > \lambda > 0\}$. Заметим , что функция $(W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_n\mu(x))$ является W-потенциалом меры μ, соответствующим ядру $\Delta(x,\rho) = K(x,\rho)$ при $\rho \in (0,\ 1/2^n)$ и $\Delta(x,\rho) = 0$ при $\rho \in [2^n,\ \infty)$, см. [33, § 3]. Поэтому для ядра Δ выполнено свойство (ii)

$$\cap(E^n_\lambda;\ \Delta(L_p(w))) \leqslant c_2\lambda^{-p}\mathcal{E}^w_{\Delta,p}(\mu) = \lambda^{-p}c_2c_n.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем последовательности $n_j \to \infty$. и $\lambda_j \to 0$ так, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\lambda_j^{-p}c_{n_j}) < \varepsilon$. Положим $U = \sum\limits_{j=1}^{\infty} E_{n_j}$, так что U открыто, и по свойству квазиаддитивности емкости $\cap(U;\ K(L_p(w))) \leqslant \cap(U;\ \Delta K(L_p(w))) < \varepsilon$. Таким образом, для всех x вне открытого множества U мы имеем

$$0 \leqslant W^w_{K,p}\mu(x) - W^w_n\mu(x) \leqslant \lambda_j$$

для всех $j \in N$. Поэтому вне U непрерывные функции $W^w_n\mu(x)$ сходятся равномерно к $W^w_{K,p}\mu(x)$, что и заканчивает доказательство предложения 3.

Следующее утверждение представляет весовой вариант теоремы Шоке.

Теорема 2. *Пусть вес $w \in A_p$, ядро K удовлетворяет свойству $K12'$, E — произвольное множество на G. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U такое, что*

$$e^w_{K,p}(E) \subset U \quad \text{и} \quad \cap(U \cap E; K(L_p(w))) < \varepsilon.$$

Доказательство. Фиксируем счетную базу $\{B_\nu\}$, $\nu \in N$, топологии на G, состоящую из шаров $B_\nu = \{x : r(x, x_\nu) < \rho_\nu\}$. Будем рассматривать лишь элементы базы, не пересекающиеся с E. Обозначим их тем же символом $\{B_\nu\}$, $\nu \in N$. Пусть $W^w_{K,p}\mu(x)$ — весовой W-потенциал для $E \cap B_\nu$, такой что $W^w_{K,p}\mu_\nu(x) \geqslant 1$ квазивсюду на $E \cap B_\nu$, а множество $A_\nu = \big\{x \in E \cap B_\nu : W^w_{K,p}\mu_\nu(x) < 1\big\}$. Тогда по теореме 1 и определению разреженности

$$e^w_{K_p} \subset (G \backslash \overline{E}) \cup \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как по предложению 2 потенциал $W^w_{K,p}\mu(x)$ квазинепрерывен, то существует такое открытое множество V_ν, что

$$\cap(V_\nu; K(L_p(w))) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^\nu}$$

и ограничение весового W-потенциала $W^w_{K,p}\mu_\nu$ на $G \backslash V_\nu$ — непрерывная функция. Кроме того, $W^w_{K,p}\mu(x) \geqslant 1$ всюду на $E \cap B_\nu \cap (G \backslash V_\nu)$.

Положим $F = E \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} (G \backslash V_\nu) \right)$, $\overline{F} = \overline{E} \cap \left(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} (G \backslash V_\nu) \right)$. Тогда открытое множество $U = G \backslash \overline{F}$ имеет требуемое свойство.

В самом деле, для каждого $\nu \in N$ потенциал $W^w_{K,p}\mu_\nu$ непрерывен на $\overline{F}$ и $W^w_{K,p}\mu_\nu \geqslant 1$ на $\overline{F} \cap B_\nu$. Следовательно, $\overline{F} \cap A_\nu = \emptyset$. для всех $\nu \in N$. Это означает, что $e^w_{K,p}(E) \subset G \backslash \overline{F}$ и $(G \backslash \overline{F}) \cap E \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} V_\nu$. Чтобы закончить доказательство, оценим емкость множества $U \cap E = (G \backslash \overline{F}) \cap E \subset (G \backslash F) \cap E$:

$$\cap(U \cap E; K(L_p(w))) \leqslant \cap\Big(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_\nu; K(L_p(w)) \Big) \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \cap(V_\nu; K(L_p(w))) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 в качестве следствия получаем весовой вариант свойства Келлога.

Теорема 3. *Пусть вес $w \in A_p$, ядро K со свойством $K12'$, а E — произвольное множество на пространстве G однородного типа. Тогда*

$$\cap\big(e^w_{K,p}(E) \cap E; K(L_p(w))\big) = 0.$$

3. Квазинепрерывные функции и тонкая топология

Теорема Шоке позволяет доказать эквивалентность понятий тонкой непрерывности и квазинепрерывности функций [14, 24, 26].

Функция g, определенная квазивсюду на G, называется (w)-*тонко непрерывной в точке* x_0, если для любого $\lambda > 0$ множество $E_\lambda = \{x : |g(x) - g(x_0)| \geqslant \lambda\}$ (K, p, w)-разреженно в точке x_0.

Теорема 4. *Пусть вес $w \in A_p$, ядро K со свойством $K12'$. Функция является квазинепрерывной тогда и только тогда, когда она (w)-тонко непрерывна квазивсюду.*

Доказательство. По схеме из [24] устанавливается, что если функция квазинепрерывна, то она (w)-тонко непрерывна квазивсюду. Заметим, что для произвольного множества E, множество $e^w_{K,p}(E)$ включает внешность и часть границы E. Обозначим $E \cup \big(G\backslash e^w_{K,p}(E)\big)$ через $\widetilde{E}$. Очевидно, что $\cap(E; K(L_p(w))) = \cap(\widetilde{E}; K(L_p(w)))$, так как $\widetilde{E} \supset E$ и допустимые функции для E не меньше единицы квазивсюду на $\widetilde{E}$.

Рассмотрим счетную базу $\{\Omega_n\}$, $n \in N$, состоящую из открытых множеств Ω_n. Пусть $\{A_n\}$, $n \in N$, их дополнения. Предположим, что g — квазинепрерывная функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и каждого A_n существует открытое множество U с $\cap(U; K(L_p(w))) < \varepsilon$ такое, что $g^{-1}(A_n)\backslash U$ замкнуто. Обозначим $g^{-1}(A_n)$ через B_n. Тогда

$$\widetilde{B}_n \subset ((B_n\backslash U) \cup U)^{\sim} \subset (B_n\backslash U)^{\sim} \cup \widetilde{U} = (B_n\backslash U) \cup \widetilde{U} \subset B_n \cup \widetilde{U}.$$

Таким образом, $\widetilde{B}_n\backslash B_n \subset \widetilde{U}$ и

$$\cap(\widetilde{B}_n\backslash B_n; K(L_p(w))) \leqslant \cap(\widetilde{U}; K(L_p(w))) = \cap(U; K(L_p(w))) < \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, то

$$\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\widetilde{B}_n\backslash B_n); K(L_p(w))) = 0.$$

Для любого x_0, не принадлежащего $\bigcup\limits_{n\in N}(\widetilde{B}_n\backslash B_n)$, каждое множество B_n такое, что $x_0 \notin B_n$, является (K,p,w)-разреженным в точке x_0, что и доказывает первую часть утверждения.

Для доказательства обратного факта воспользуемся следующими построениями.

Пусть g — (w)-тонко непрерывная квазивсюду функция. Покажем, что она является квазинепрерывной. Рассмотрим счетную базу $\{\Omega_n\}$, $n \in N$, состоящую из открытых множеств, и множество $\{A_n\}$, $n \in N$, их дополнений. Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U с $\cap(U; K(L_p(w))) < \varepsilon$ такое, что $g\,|_{G\backslash U}$ — (w)-тонко непрерывная функция. Пусть $G' = G\backslash U$. Тогда для каждого A_n найдутся λ_n и x_n такие, что

$$B_n = g^{-1}\{A_n\} = \{x : |g(x) - g(x_n)| \geqslant \lambda_n\}.$$

Покажем, что множество $G'\backslash B_n$ принадлежит множеству $e^w_{K,p}(B_n)$. Действительно, для любой точки x, принадлежащей множеству $G'\backslash B_n$, верно $|g(x) - g(x_n)| < \lambda_n$ и, следовательно, для этой точки найдется непустое множество $B_{n,x} = \{y : |g(y) - g(x)| \geqslant \lambda_x\}$ (например, $\lambda_x = \lambda_n - |g(x_n) - g(x)|$), причем $B_{n,x} \supset B_n$.

По определению $B_{n,x}$ (K,p,w)-разреженно в точке x, а так как $B_n \subset B_{n,x}$, то множество B_n также (K,x,w)-разреженно в точке x. Таким образом, получаем, что множество $G'\backslash B_n$ содержится в $e^w_{K,p}(B_n)$. Тогда по теореме Шоке, для любого $\delta > 0$, существует открытое множество U_n такое, что $U_n \supset (G'\backslash B_n)$, $\cap(U_n \cap B_n; K(L_p(w))) < \delta/2^n$ и $B_n\backslash(U_n \cup U)$ замкнуто. Это доказывает квазинепрерывность функции g.

4. Множество единственности для потенциалов

Пусть $f \in K(L_p(w))$. Множество E называется *множеством единственности* для $K(L_p(w))$, если из предположения, что f равно нулю квазивсюду на $G\backslash E$ вытекает равенство функции f нулю всюду на G.

Следующее утверждение обобщает теорему Хедберга [25], установленную для изотропных бесселевых потенциалов в R^n. Первый подобный результат для пространства $H_2^{1/2}$ на окружности был получен Альфорсом и Бёрлингом, см. [34].

Теорема 5. *Пусть $G\backslash E$ — борелевское подмножество пространства G однородного типа и ядро K со свойством $K12'$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *для любого открытого множества U*

$$\cap(U \cap (G\backslash E); K(L_p(w))) = \cap(U; K(L_p(w))); \tag{20}$$

2) *для почти всех x*

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} \frac{\cap(B(x,\rho) \cap (G\backslash E); K(L_p(w)))}{\omega(B(x,\rho))} > 0. \tag{21}$$

Доказательство. Поскольку импликация (20)⇒(21) очевидна, будем доказывать, что из (21) следует (20). Для доказательства теоремы потребуется следующее

Предложение 3. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in G$ и $f \in L_p(w)$, а $g(x) = \int K(x,y)f(y)\,d\omega(y)$ — потенциал ядра K, удовлетворяющего свойству $K12$. Тогда для любой точки $x \in G$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} g(y)\,d\omega(y) = g(x).$$

Доказательство. В случае $g(x) = \infty$, утверждение вытекает из полунепрерывности функции g. Предположим теперь, что значение $g(x)$ конечно. Рассмотрим функцию

$$K_\varepsilon(x,z) = \frac{1}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_G \chi_{B(x,\varepsilon)}(y) K(y,z)\,d\omega(y).$$

Покажем, что $K_\varepsilon(x,z)f(z)$ сходится к $K(x,z)f(z)$ для почти всех точек $z \in G$. Если выполняется оценка $K_\varepsilon(x,z) \leqslant QK(x,z)$, для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $x \in B(z,r_0)$ с константой Q, не зависящей от ε и x, то результат легко следует из теоремы Лебега.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} &\int\limits_G |(K_\varepsilon(x,z) - K(x,z))f(z)|\,d\omega(z) \\ &= \int\limits_G \frac{1}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} |(K(y,z) - K(x,z))|f(z)\,d\omega(y)\,d\omega(z) \\ &= \frac{1}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \int\limits_G |(K(y,z) - K(x,z))|f(z)\,d\omega(z)\,d\omega(y). \end{aligned}$$

Последний интеграл в силу конечности потенциала в точке x и свойства ядра $K12$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Теперь покажем, что $Q\ K(x,z)$ является мажорантой для $K_\varepsilon(x,z)$, с константой Q, не зависящей от x и ε. Пусть $\varepsilon \in (0, r_0/2)$, и если $x \in B(z,\varepsilon)$, то по свойствам $K2$, $K7$ и $K9$ получаем оценку

$$K_\varepsilon(x,z) \leqslant \frac{A}{\omega(B(z,\varepsilon))} \int\limits_{B(z,\varepsilon)} K(z,y)\, d\omega(y)$$

$$= \frac{A}{\omega(B(z,\varepsilon))} \left(\int\limits_0^\varepsilon K'_\rho(z,\rho)\omega(B(y,\rho))\, d\omega(B(y,\rho)) + K(z,\varepsilon)\omega(B(z,\varepsilon)) \right)$$

$$\leqslant AbK(z,\varepsilon) \leqslant QK(y,x) \leqslant \widetilde{Q}K(x,z),$$

где $K'(z,\rho)$ определено в [9], постоянная $\widetilde{Q}$ зависит от констант из условий (1) и (2), а также от A_2 из свойства $K9$.

Если $x \in B(z,2\varepsilon)\backslash B(z,\varepsilon)$, то из аналогичной оценки $K_\varepsilon(x,z) \leqslant QK(z,\varepsilon)$ по свойству $K3$ имеем

$$K_\varepsilon(x,z) \leqslant QCK(z,2\varepsilon) \leqslant Q_1K(z,x) \leqslant \widetilde{Q}K(x,z),$$

с постоянной $\widetilde{Q}$ не зависящей от ε и x.

Наконец, если $x \in B(z,r_0)\backslash B(z,2\varepsilon)$, то

$$K_\varepsilon(x,z) \leqslant \frac{A_2}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} K(z, r(z,x) - \varepsilon)\, d\omega(y)$$

$$\leqslant A_2CK(z, 2r(z,x) - 2\varepsilon) \leqslant A_2CK(z, r(z,x)) \leqslant QK(x,z).$$

По теореме Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_G \frac{1}{\omega(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} K(y,z)f(z)\, d\omega(y)\, d\omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} g(y)\, d\omega(y)$$

$$= \int\limits_G \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} K(y,z)\, d\omega(y) f(z)\, d\omega(z) = \int\limits_G K(x_0,z)f(z)\, d\omega(z) = g(x_0).$$

Предложение доказано.

Как следствие из предложения 3 вытекает

Лемма 1. *В условиях предложения 3 на функцию f, ядро K и потенциал g допустим, что $g(x)$ не меньше единицы для почти всех точек x, принадлежащих открытому множеству $U \subset G$. Тогда $g(x)$ не меньше единицы всюду на U.*

Замечание. Кроме того, при тех же предположениях на ядро K, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\mu \in M^+(G)$, $g(x) = \int\limits_G K(x,y)\, d\mu(y)$ — потенциал меры μ. Тогда для любой точки $x \in G$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\omega(B(x,\varepsilon))} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} g(z)\, d\omega(z) = g(x).$$

Вернемся к доказательству теоремы 5.

Пусть U — открытое множество и (21) выполнено почти всюду в U. Рассмотрим потенциал $g(x) = \int\limits_G K(x,y)f(y)\,d\omega(y)$ принадлежащий пространству $K(L_p(w))$, $f \in L_p(w)$. Предположим, что $g(x) \geqslant 1$ квазивсюду на $(G\backslash E) \cap U$. Тогда из наших предположений последует, что $g(x) \geqslant 1$ почти всюду и, следовательно, всюду в U. Это и будет доказывать утверждение.

Основная идея доказательства состоит в аппроксимации g в точке подходящей последовательностью средних значений от g.

Для потенциала $g(y)$ имеем следующие условия

$$\int\limits_G K(y,x)|f(x)|\,d\omega(x) < \infty \tag{22}$$

и

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\omega(B(y,\delta))} \int\limits_{Bx,\delta} |f(x) - f(y)|^p w(x)\,d\omega(x) = 0. \tag{23}$$

В силу определения пространства $K(L_p(w))$ (22) выполнено для почти всех точек $y \in G$, условие (23) также верно для почти всех $y \in G$ по теореме Лебега о дифференцировании интеграла.

Рассмотрим точку $x_0 \in G$, в которой выполнены (21), (22) и (23). Для любого $\delta > 0$ найдется вероятностная мера γ с носителем на множестве $\{x : g(x) = 1\} \cap \{(G\backslash E) \cap B(x_0,\delta)\}$ такая, что выполняется неравенство

$$\left\| w^{-1}K(\gamma,y) \mid L_q(w) \right\| \leqslant 2 \cap \left((G\backslash E) \cap B(x_0,\delta); K(L_p(w))\right)^{-1/p}. \tag{24}$$

Тогда, если δ — такое число, что $B(x_0,\delta) \subset U$, то

$$1 \leqslant \int\limits_G g(y)\,d\gamma(y) = \int\limits_G K(\gamma,x)f(x)\,d\omega(x).$$

Остается показать, что для подходящей последовательности $\{\delta_i\}$, $i \in N$, будет

$$\lim_{\delta_i\to 0} \int\limits_G K(\gamma,x)f(x)\,d\omega(x) = g(x_0).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ такие, что

$$\int\limits_{B(x_0,\rho)} K(x_0,x)|f(x)|\,d\omega(x) < \varepsilon. \tag{25}$$

Пусть δ — произвольное число между нулем и $\rho/2c$. Тогда

$$\left|\int\limits_G K(\gamma,x)f(x)\,d\omega(x)-g(x_0)\right|$$

$$=\left|\int\limits_G f(x)(K(\gamma,x)-K(x_0,x))\,d\omega(x)\right|\leqslant\int\limits_{B(x_0,\rho)}K(x_0,x)|f(x)|\,d\omega(x)$$

$$+\left|\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(\gamma,x)f(x)\,d\omega(x)\right|+\left|\int\limits_{B(x_0,\rho)\setminus B(x_0,2c\delta)}f(x)K(\gamma,x)\,d\omega(x)\right|$$

$$+\left|\int\limits_{G\setminus B(x_0,\rho)}f(x)(K(\gamma,x)-K(x_0,x))\,d\omega(x)\right|=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Из (25) следует, что $I_1\to0$ при $\rho\to0$, так как в точке x_0 справедливо условие (22), а также по свойствам ядра $K8$ и $K12$.

$$I_2=\left|\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(\gamma,x)f(x)\,d\omega(x)\right|=\left|\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(\gamma,x)(f(x)-f(x_0))\,d\omega(x)\right|$$

$$+\left|\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(\gamma,x)f(x_0)\,d\omega(x)\right|=I_2'+I_2''.$$

Далее,

$$I_2'<\left\{\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}|(f(x)-f(x_0)|^p w\,d\omega\right\}^{1/p}||w^{-1}K(\gamma,x)\mid L_q(w)||$$

$$\leqslant2\left\{\omega(B(x_0,\delta))^{-1}\int\limits_{B(x,2c\delta)}|f(x)-f(x_0)|^p w\,d\omega\right\}^{1/p}$$

$$\times\{\omega(B(x_0,\delta))^{-1}\cap((G\setminus E)\cap B(x_0,\delta);K(L_p(w)))\}^{-1/p}$$

при $\delta\to0$ по (21), (23) и свойству удвоения меры ω. Для I_2'' имеем оценку сверху

$$f(x_0)\int\limits_{B(x_0,\delta)}d\gamma(y)\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(y,x)\,d\omega(x)$$

$$\leqslant f(x_0)\Bigg(\int\limits_{B(x_0,\delta)}d\gamma(y)\int\limits_{B(x_0,2c\delta)}K(x_0,x)\,d\omega(x)+\varepsilon_1(\delta)\Bigg),$$

где первое слагаемое стремится к нулю при $\delta\to0$ в силу свойств $K2$ и $K5$, а $\varepsilon_1(\delta)\to0$ по свойству $K12$. Наконец,

$$I_3\leqslant\int\limits_{B(x_0,\delta)}d\gamma(y)\int\limits_{B(x_0,\rho)\setminus B(x_0,2c\delta)}f(x)K(y,x)\,d\omega(x).$$

Так как $x_0 \in B(y, r(x,y))$, то из свойств $K8$ вытекает, что

$$I_3 \leqslant A_2 \int\limits_{B(x_0,\delta)} d\gamma(y) \int\limits_{B(x_0,\rho)\setminus B(x_0,2c\delta)} f(x) K(x_0, r(x,y))\, d\omega(x).$$

Учитывая $K1$ и условие (25) получаем, что I_3 стремится к нулю в силу произвольности ε.

Итак, для подходящей последовательности $\{\delta_i\} \to 0$ предел

$$\lim_{\delta_i \to 0} \int\limits_G K(\gamma, x) f(x)\, d\omega(x) = g(x_0)$$

не меньше единицы почти всюду в U и, следовательно, по лемме 1 всюду в U. Поэтому любая допустимая функция для множества $(G\setminus E) \cap U$ является допустимой и для U, т. е.

$$\cap((G\setminus E) \cap U; K(L_p(w))) = \cap(U; K(L_p(w))).$$

Из этой теоремы получаем

Следствие 2. *Пусть $G\setminus E$ — борелевское подмножество пространства G однородного типа, и выполнены условия теоремы 5. Тогда утверждается, что E — множество единственности для пространства $K(L_p(w))$.*

Доказательство. Покажем, что из (21) следует, что E — множество единственности. Рассмотрим функцию $f(x) = \int\limits_G K(x,y) g(y)\, d\omega(y)$, равную нулю квазивсюду на множестве $G\setminus E$. Предположим, что в точке x_0 выполнены условия (21), (22) и (23). Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такая вероятностная мера τ с носителем на множестве $\{x : f(x) = 0\} \cap \{(G\setminus E) \cap B(x_0, \delta)\}$, что выполнено неравенство, аналогичное (24). Повторяя для функции $f(x)$ рассуждения предыдущей теоремы, получаем, что $f(x)$ равняется нулю для почти всех точек $x \in B(x_0, \delta)$, и, следовательно, по лемме 1 имеем $f(x) = 0$. Из произвольности выбора функции f вытекает, что E — множество единственности для $K(L_p(w))$.

Литература

1. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, № 6.—С. 67–138.
2. *Adams D. R., Meyers N. G.* Thiness and Wiener Criteria for Non-linear Potentials // Indiana Univ. Math. J.—1972.—V. 22, No. 2.—P. 169–197.
3. *Adams D. R., Meyers N. G.* Bessel potentials. Inclusion relations among classes of exceptional sets // Indiana Univ. Math. J.—1973.—V. 22, No. 9.—P. 873–905.
4. *Hedberg L. I., Wolff T. H.* Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1983.—V. 33, No. 4.—P. 161–187.
5. *Adams D. R.* Weighted nonlinear potential theory // Trans. Amer. Math. Soc.—1986.—V. 297, No. 1.—P. 73–94.
6. *Водопьянов С. К.* Принцип максимума в теории потенциала и теоремы вложения для анизотропных пространств дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—1988.—Т. 29, № 2.—С. 17–33.

7. *Водопьянов С. К.* Теория потенциала на однородных группах // Мат. сб.—1989.—Т. 180, № 1.—С. 57–77.
8. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа / Тр. Ин-та математики СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1989.—Т. 14.—С. 45–89.
9. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала для обобщенных ядер и ее приложения. Новосибирск, 1990.—С. 48. (Препринт /АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики, № 6).
10. *Sjodin T.* Non-linear potential theory in Lebesgue spaces with mixed norm and extension of continuous functions on compact sets. Umea, 1987.—P. 32. (Preprint /Un-t of Umea. № 5).
11. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.—М.: Наука, 1966.
12. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.—М.: Мир, 1971.
13. *Wiener N.* The Dirichlet problem // J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.—1924.—V. 3.—P. 127–146.
14. *Brelot M.* On topologies and Boundaries in Potential Theory. Berlin a.o. Springer, 1971. (Lecture notes in mathematics; 175).
15. *Мазья В. Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.—1970.—Т. 27, № 13.—С. 42–55; поправки, там же.—1972.—Т. 27, № 1.—С. 160.
16. *Gariepy R., Ziemer W. P.* A reqularity condition at the boundary for solutions of quasilinear elliptic // Arch. Rat. Mech. Anal.—1977.—V. 67, No. 1.—P. 25–39.
17. *Скрыпник И. В.* Критерий регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 274, № 6.—С. 1040–1043.
18. *Lindqvist P., Martio O.* Two theorems of N. Wiener for solutions of quasilinear elliptic equations // Acta Math.—1988.—V. 155.—P. 153–171.
19. *Fabes E., Jerison D., Kenig C.* The Wiener test for degenerate elliptic equations // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1982.—T. 32, No. 3.—P. 151–182.
20. *Mosco U.* Wiener criteria and variational convergences // Lecture Notes Math.—1988. 1340.—P. 208–238.
21. *Mosco U.* Wiener Criterion and Potential Estimates for the Obstacle Problem // Ind. Univ. Math. J.—1987.—V. 36, No. 3.—P. 455–494.
22. *Hedberg L. I.* Approximation in Sobolev Spaces and Nonlinear Potential Theory // Proc. Symp. Pure Math.—1986.—V. 45.—P. 473–480.
23. *Hedberg L. I.* Spectral Sinthesis in Sobolev Spaces and Uniqueness of Solutions of the Dirichlet problem // Acta Math.—1981.—V. 147.—P. 237–264.
24. *Fuglede B.* Quasi topology and fine topology // Seminaire Brelot-Shoquet-Deny, 10^e annee. 1965–1966.
25. *Hedberg L. I.* Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions // Math. Z.—1972.—V. 129.—P. 299–319.
26. *Coifman R. R., Weiss G.* Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certains spaces Homogeneous. Berlin a.o. Springer, 1971. (Lecture notes in mathematics; 242).
27. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ / Мат. анализ.—1983.—Т. 21.—С. 42–129.
28. *Вольберг А. Л., Конягин С. В.* О мерах с условием удвоения // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 3.—С. 666–675.
29. *Maciac R. A., Segovia C.* A well behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type // Trab. mat. Inst. argent. mat.—1981.—V. ???, No. 32.—P. 18.
30. *Muckenhoupt B.* The equivalence of two conditions for weight functions // Studia Math.—1974.—T. 49.—P. 101–106.

31. *Sawyer E. T.* Two weght norm inegualities for certain maximal and integral operators // Lect. Notes Math. Berlin a.o.: Springer.—1982.—V. 908.—P. 102–127.
32. *Meyers N. G.* A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes // Math. Scand.—1970.—V. 26, No. 2.—P. 255–292.
33. *Водопьянов С. К.* Весовая L_p-теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн.—1992.—Т. 33, № 2.—С. 27–48.
34. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math.—1950.—V. 83.—P. 101–129.