Theory and Applications of Categories, Vol. 8, No. 11, 2001, pp. 313–323.

LIMITES INDUCTIVES POINT PAR POINT DANS LES CATÉGORIES ACCESSIBLES

PIERRE AGERON

ABSTRACT. We give an abstract characterization of the categories of models of sketches all of whose distinguished cones are based on connected (resp. non empty) categories.

RÉSUMÉ. Nous donnons une caractérisation abstraite des catégories de modèles des esquisses dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation connexe (resp. non vide).

1. Introduction

Ce travail a fait l'objet de conférences le 12 juin 1999 à l'Université du Littoral (Dunkerque) et le 19 juillet 1999 à l'Université de Coïmbre.

La notion de catégorie **accessible** (ou **modelable**), introduite dans [Lair81], est aujourd'hui bien connue. Il en va de même du résultat fondamental suivant, établi dans [Lair81] : *les catégories esquissables sont exactement les catégories accessibles* (quelques précisions terminologiques sont fournies à fin de cette introduction).

On peut souhaiter, une classe d'esquisses $\mathcal{E}$ étant donnée, préciser cet énoncé en caractérisant *abstraitement* les catégories esquissables par une esquisse de $\mathcal{E}$. Ce problème a été résolu dans nombre de cas particuliers[1]. Il n'a probablement pas de solution en général, et ceci même si $\mathcal{E}$ est définissable dans un langage très simple.

Ainsi, certains auteurs[2] se sont intéressés à la classe des esquisses qu'ils appellent **géométriques** et qui sont celles dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation finie — les cônes inductifs distingués étant quelconques. Ils ont présenté comme un problème ouvert la caractérisation abstraite des catégories géométriquement esquissables. Ce problème est toujours ouvert.

En fait, il n'est, à notre avis, pas certain qu'une telle caractérisation existe. De même que dans le cas — plus simple et plus naturel — de la classe des esquisses **inductives**, c'est-à-dire sans aucun cône projectif distingué (cf. [Ageron+]), demeure néanmoins possible une caractérisation qu'on pourrait qualifier de concrète, c'est-à-dire faisant intervenir à la fois la catégorie étudiée $\mathbb{A}$ et la catégorie de foncteurs $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{\mathbb{A}}$: de telles caractérisations concrètes apparaissent dans l'appendice de [Lair87].

Received by the editors 2001 January 12 and, in revised form, 2001 May 30.
Transmitted by Jiri Rosicky. Published on 2001 June 29.
2000 Mathematics Subject Classification: 18C30, 18C35.
Key words and phrases: sketches, accessible categories, connected objects, pseudofiltered colimits.

[1]Voir [Guitart-Lair80], [Lair87], [Ageron92], [Adámek-Rosický95], [Ageron95], [Lair96a], [Lair96b], [Lair96c], [Ageron96], [Lair97], [Ageron97], [Ageron+].

[2]Voir [Makkai-Paré89] et [Adámek-Rosický95].

De même, certains auteurs[3] se sont intéressés à la classe des esquisses que nous appellerons **normales** et qui sont celles dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation connexe — les cônes inductifs distingués étant quelconques. Ils ont présenté comme un problème ouvert la caractérisation abstraite des catégories normalement esquissables. Nous donnons ici une solution complète à ce problème.

Notre caractérisation s'obtient par un raisonnement parallèle à celui qui a conduit à la caractérisation des catégories esquissables générales en 1981. Il est remarquable qu'il fasse intervenir un cardinal β qui ne dépasse pas le rang d'accessibilité ordinaire calculé par Lair. Par ce parallélisme voulu avec les travaux de Lair, nous souhaitons d'abord marquer clairement notre dette à leur égard. Nous espérons aussi faire comprendre la véritable raison de la différence de comportement entre le cas des esquisses normales et celui des esquisses géométriques : la classe des objets connexes est fermée pour la construction par récurrence transfinie de diagrammes localement libres, celle des objets finiment présentables ne l'est pas.

Faisons dès maintenant quelques remarques, qui justifieront le titre de ce mémoire. Si $\mathbb{E}$ est une esquisse normale, il est facile de voir que la catégorie de ses modèles possède les sommes, celles-ci se calculant point par point. Mais une catégorie accessible $\mathbb{A}$ qui possède les sommes n'est pas nécessairement esquissable par une esquisse normale : encore faut-il que le comportement des sommes dans $\mathbb{A}$ soit suffisamment compatible avec les sommes de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, afin qu'il soit possible, une esquisse convenable ayant été trouvée, d'en effectuer le calcul point par point.

En ce sens, on remarquera que dans une catégorie accessible, et pourvu que l'on se donne la peine d'expliciter une bonne notion de « point » :

(i) les limites inductives suffisamment filtrantes sont *nécessairement* point par point : c'est tout le sens de [Lair81] ;

(ii) les limites projectives de diverses sortes sont *nécessairement* point par point : c'est tout le sens de [Ageron95], [Lair96a-b-c], [Ageron96] et [Lair97][4].

Mais on ne peut pas, en général, « forcer » les limites inductives d'une catégorie accessible à se calculer point par point. D'où l'intérêt, lorsque c'est possible, de trouver un moyen de spécifier *abstraitement* qu'un tel calcul existe. C'est d'ailleurs précisément ce que fait, dans le cas des limites inductives suffisamment filtrantes, la définition même des catégories accessibles. C'est aussi ce que fera, dans le cas (non seulement des limites inductives suffisamment filtrantes, mais aussi) des sommes, la définition des *catégories normalement accessibles* que nous proposerons plus bas. Nous serons alors en mesure d'établir que les catégories normalement esquissables sont exactement les catégories normalement accessibles.

[3]Voir [Adámek-Borceux97].

[4]Ces articles montrent comment obtenir systématiquement, par modification de diagrammes localement limite inductive, des résultats de la forme : *les catégories accessibles possédant les $\mathcal{I}$-limites projectives sont exactement les catégories $\mathcal{E}$-esquissables* (où $\mathcal{I}$ est une classe de petites catégories et $\mathcal{E}$ une classe d'esquisses).

Comme convenu, procédons maintenant à quelques rappels et précisions terminologiques. Si $\mathbb{A}$ est une catégorie, l'expression « **diagramme** dans $\mathbb{A}$ » désigne tout foncteur d'une *petite* catégorie (appelée **indexation** du diagramme) vers $\mathbb{A}$. Par abus de langage, on appellera indexation d'un cône (projectif ou inductif) l'indexation du diagramme qui lui sert de base. Une **esquisse** $\mathbb{E}$ est une *petite catégorie* (appelée son **support** et notée $\underline{\mathbb{E}}$) dans laquelle on distingue un ensemble P de cônes projectifs et un ensemble Q de cônes inductifs. (Si Q est vide, on dit qu'on a une **esquisse projective**.) Un **modèle** de $\mathbb{E}$ est un foncteur de $\mathbb{E}$ vers **Ens** qui transforme ces cônes en cônes limite. Une catégorie $\mathbb{A}$ est **esquissable** si elle est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles et transformations naturelles d'une certaine esquisse $\mathbb{E}$. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que $\mathbb{A}$ soit **β-accessible** pour au moins un cardinal régulier β, ce qui signifie que :

(a) $\mathbb{A}$ possède les limites inductives d'indexation β-filtrante ;

(b) $\mathbb{A}$ contient une petite sous-catégorie pleine $\mathbb{A}'$ formée d'objets β-présentables telle que tout objet de $\mathbb{A}$ soit limite inductive β-filtrante d'objets de $\mathbb{A}'$.

Plus précisément, si α est un cardinal régulier, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est une **α-esquisse** si tous ses cônes *projectifs* distingués sont d'indexation α-petite. Ainsi, une catégorie β-accessible est nécessairement **β-esquissable**, c'est-à-dire équivalente à $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ pour une certaine β-esquisse $\mathbb{E}$. En revanche, une catégorie α-esquissable n'est en général β-accessible que pour un cardinal $\beta \geq \alpha$.

2. Esquisses normales

2.1. Définition. *Soit* $\mathbb{E}$ *une esquisse. On dira que* $\mathbb{E}$ *est* normale *si tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation connexe (en particulier non vide).*

Exemples. *a*) *Esquisse de groupoïde.* Cette esquisse projective, telle que décrite par Ehresmann en 1966, est normale.

b) *L'esquisse de G-ensemble sans point fixe.* Un groupe G étant fixé, considérons la catégorie des ensembles munis d'une action sans point fixe de G. Elle est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse $\mathbb{E}$, visiblement normale, suivante :

— son support $\underline{\mathbb{E}}$ a un objet initial 0 et un seul autre objet E, dont le groupe des automorphismes est isomorphe (et identifié) à G,

— ses cônes distingués sont le cône inductif de sommet 0 et de base vide et, pour toute flèche $g : E \to E$ telle que $g \neq \mathrm{id}_E$, le cône projectif de sommet 0 et de base

$$E \underset{\mathrm{id}_E}{\overset{g}{\rightrightarrows}} E$$

c) *L'esquisse de famille de modèles d'une esquisse donnée.* Soit $\mathbb{E}$ une esquisse. Notons $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}))$ la catégorie des familles de modèles de $\mathbb{E}$ (indexées par un ensemble quelconque, variable). Il est remarqué en [Makkai-Paré89], 5.3.5, que $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}))$ est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse $\mathbb{E}^+$ obtenue en ajoutant librement au support de $\mathbb{E}$ un objet final E et en distinguant :

— les cônes projectifs obtenus à partir de ceux qui sont distingués dans $\mathbb{E}$ en complétant leur base par les flèches partant vers E ;

— et les cônes inductifs image de ceux qui sont distingués dans $\mathbb{E}$.

Constatons que $\mathbb{E}^+$ ainsi définie est toujours une esquisse normale. En effet, l'indexation d'un quelconque de ses cônes projectifs distingués est connexe ; en fait cette indexation est même *simplement* connexe, au sens de Paré, puisqu'elle a un objet final. (Nous dirons plus loin que $\mathbb{E}^+$ est une esquisse simple.) Il est facile de construire un morphisme d'esquisses de $\mathbb{E}^+$ dans une esquisse $\mathbb{E}'$ *syntaxiquement équivalente* à $\mathbb{E}$, c'est-à-dire engendrant la même *théorie* (ou *type*) que $\mathbb{E}$: on obtient $\mathbb{E}'$ en distinguant dans $\mathbb{E}^+$ le cône projectif de sommet E et d'indexation vide.

Nous allons maintenant définir la notion de catégorie normalement accessible. Faisons pour cela les conventions suivantes. Dans une catégorie $\mathbb{A}$ possédant les sommes, on dira qu'un objet A est **connexe** si le foncteur représentable $\mathrm{Hom}(A, -)$ commute aux sommes. Rappelons par ailleurs qu'on qualifie de β-**pseudo-filtrante** toute catégorie petite dont chaque β-composante connexe est β-filtrante. Un objet est connexe et β-présentable si et seulement si le foncteur représentable $\mathrm{Hom}(A, -)$ commute aux limites inductives β-pseudofiltrantes.

2.2. Définition. *Soient* $\mathbb{A}$ *une catégorie localement petite et* β *un cardinal régulier. On dira que* $\mathbb{A}$ *est* β-normalement accessible *si :*

(*a*) $\mathbb{A}$ *possède les limites inductives d'indexation* β*-pseudo-filtrante ;*

(*b*) $\mathbb{A}$ *contient une petite sous-catégorie pleine* $\mathbb{A}'$ *formée d'objets* β*-présentables connexes telle que tout objet de* $\mathbb{A}$ *soit limite inductive* β*-pseudo-filtrante d'objets de* $\mathbb{A}'$*.*

On dira que $\mathbb{A}$ *est* normalement accessible *si elle est* β-normalement accessible *pour au moins un cardinal régulier* β*.*

Voici une autre caractérisation des catégories normalement accessibles en termes de **diagramme localement limite inductive**. Rappelons que cette notion, introduite dans [Guitart-Lair80], est l'intermédiaire technique essentiel entre accessibilité et esquissabilité. Elle est ainsi définie : un diagramme $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ est localement limite inductive pour un diagramme $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ si on s'est donné un « tronc de cône » inductif $(j_{D,L})_{D\in\mathbb{D},\, L\in\mathbb{L}}$ tel que, naturellement en tout objet A de $\mathbb{A}$, on ait :

$$\varinjlim_{L\in\mathbb{L}^{op}} \mathrm{Hom}(\lambda(L), A) \cong \varprojlim_{D\in\mathbb{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\delta(D), A)\,).$$

2.3. Proposition. *Soient* $\mathbb{A}$ *une catégorie et* β *un cardinal régulier. Alors* $\mathbb{A}$ *est* β*-normalement accessible si et seulement si :*

(*a*) $\mathbb{A}$ *possède les limites inductives d'indexation* β*-pseudo-filtrante ;*

(*b'*) *la sous-catégorie pleine* $\mathbb{A}^+_\beta$ *de* $\mathbb{A}$ *formée des objets* β*-présentables et connexes de* $\mathbb{A}$ *est essentiellement petite et dense dans* $\mathbb{A}$ *;*

(c') *tout diagramme* $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$*, d'indexation* β*-petite et connexe, à valeurs dans* $\mathbb{A}^+_\beta$*, admet un diagramme localement limite inductive* $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$*, à valeurs dans* $\mathbb{A}^+_\beta$*.*

Démonstration. Supposons d'abord (a) et (b). Tout objet de $\mathbb{A}$ est limite inductive β-pseudo-filtrante d'objets de $\mathbb{A}'$: en appliquant ceci aux objets de $\mathbb{A}^+_\beta$, on voit qu'ils sont des rétracts d'objets de $\mathbb{A}'$, ce qui implique que $\mathbb{A}^+_\beta$ est essentiellement petite. Si $A = \varinjlim(\gamma : \mathbb{G} \to \mathbb{A}')$, où $\mathbb{G}$ est β-pseudo-filtrante, alors on a un foncteur final de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{A}^+_\beta/A$, ce qui montre que, pour tout objet A de $\mathbb{A}$, la catégorie $\mathbb{A}^+_\beta/A$ est β-pseudo-filtrante et $A = \varinjlim(\mathbb{A}^+_\beta/A \xrightarrow{\text{can}} \mathbb{A}')$; ainsi $\mathbb{A}^+_\beta$ est dense. Il reste à montrer (c'). Soit $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ un diagramme d'indexation β-petite et connexe, à valeurs dans $\mathbb{A}^+_\beta$. Notons $\mathbb{L}$ la (petite) catégorie $\underrightarrow{\mathbb{C}\text{ône}}^+_\beta(\delta)$ dont les objets sont les cônes inductifs de base δ dont le sommet est dans $\mathbb{A}^+_\beta$, et λ le foncteur de $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{A}$ qui envoie chacun de ces cônes inductifs sur son sommet. Il est facile de vérifier que λ est un diagramme localement limite inductive pour δ.

Inversement, supposons (a), (b') et (c'). En prenant pour $\mathbb{A}'$ une petite catégorie équivalente à $\mathbb{A}^+_\beta$, on voit que $\mathbb{A}'$ est dense. Pour obtenir (b), il ne reste alors qu'à vérifier que $\mathbb{A}'/A$ est β-pseudo-filtrante. Soit $(f_I : A_I \to A)_{I\in\mathbb{I}}$ un diagramme d'indexation connexe et β-petite à valeurs dans $\mathbb{A}^+_\beta/A$. Le diagramme $(A_I)_{I\in\mathbb{I}}$ admet dans $\mathbb{A}$ un diagramme localement limite inductive $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$, à valeurs dans $\mathbb{A}^+_\beta$. Le cône inductif constitué par les f_I factorise donc à travers au moins l'un des $\lambda(L)$, ce qui fournit un cône inductif de base $(f_I)_{I\in\mathbb{I}}$ dans $\mathbb{A}^+_\beta/A$, qui est donc bien β-pseudo-filtrante ; on en déduit (b). ∎

Montrons alors :

2.4. Théorème. *Les catégories normalement esquissables sont exactement (à équivalence près) les catégories normalement accessibles.*

Démonstration. Soient $\mathbb{E}$ une α-esquisse normale et $\mathbb{A} = \mathbb{M}\text{od}(\mathbb{E})$. Soient $\underline{\mathbb{E}}$ son support et $\mathbb{C} = \mathbb{E}\text{ns}^{\underline{\mathbb{E}}}$. Soient $H : \underline{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ le morphisme d'esquisses canonique et $U = \text{Mod}(H)$: $\mathbb{A} \to \mathbb{C}$ le foncteur d'oubli. La catégorie $\mathbb{C}$ possède toutes les limites inductives et celles-ci sont préservées par les foncteurs d'évaluation $ev_E : \mathbb{C} \to \mathbb{E}\text{ns}$ en chaque objet E de $\mathbb{E}$. Les limites inductives α-filtrantes et les sommes existent alors dans $\mathbb{A}$, où elles sont créées et préservées par le foncteur U. On a donc (a) pour tout cardinal régulier $\beta \geq \alpha$.

Montrons maintenant qu'on a (c') pour au moins un $\beta \geq \alpha$. Soit $\beta \geq \alpha$, quelconque pour l'instant. Soit $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ un diagramme d'indexation β-petite et connexe, à valeurs β-présentables et connexes. Il admet un diagramme localement limite inductive $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ que l'on peut obtenir comme suit. On calcule d'abord (dans $\mathbb{C}$) la limite inductive C de $U \circ \delta$. Alors $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(C, -)$ commute aux (images par U des) limites inductives β-pseudo-filtrantes de $\mathbb{A}$: nous dirons que C est relativement β-présentable et relativement connexe vis-à-vis de $\mathbb{A}$ (car bien entendu, rien n'assure que C soit β-présentable ou connexe dans $\mathbb{C}$). Dans un deuxième temps, on construit un diagramme localement libre engendré par C relativement à U. Pour cela, on commence par remarquer (cf. [Guitart-Lair80], II.2.1 ; [Lair87], II.4.5.1) que $\mathbb{A}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ dont les objets sont ceux qui y valident un certain ensemble de cônes projectifs. La construction d'un diagramme localement libre se fait alors (cf. [Guitart-Lair81], 5.1) par récurrence transfinie, en partant de C et en le « forçant » à valider ces cônes projectifs de toutes les manières qui se présentent. *La remarque essentielle est ici que cette procédure ne nécessite, à chaque étape de la récurrence, que le calcul de limites inductives dans* $\mathbb{C}$ *d'indexation connexe : une somme amalgamée petite pour un ordinal successeur, une limite inductive filtrante pour un ordinal limite.* Mais il est facile d'établir qu'une limite inductive connexe d'objets relativement connexes est un objet relativement connexe : on peut alors affirmer que les objets du diagramme localement libre ainsi construit seront des objets connexes de $\mathbb{A}$. D'autre part, on sait (cf. [Ageron92], 3.3. ; [Lair81], appendice) que si β est choisi suffisamment grand, la β-présentabilité relative de C implique la β-présentabilité dans $\mathbb{A}$ de ces mêmes objets. Pour un tel β, on a donc (c').

Pour montrer (b'), considérons le foncteur de Yoneda $Y^{op} : \underline{\mathbb{E}}^{op} \to \mathbb{C}$, tel que, pour tout objet E de $\mathbb{E}$, on ait :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y(E), -) \;\cong\; ev_E \;.$$

On sait que Y^{op} est dense et à valeurs absolument présentables. On obtient (b') en considérant la sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$ dont les objets sont ceux des diagrammes localement libres $\lambda_{Y(E)}$ pour E objet de $\mathbb{E}$. Cette catégorie est dense dans $\mathbb{A}$; or elle est contenue dans $\mathbb{A}^{+}_{\beta}$, qui est a fortiori dense dans $\mathbb{A}$.

Inversement enfin, si l'on part d'une catégorie β-normalement accessible $\mathbb{A}$, on construit suivant la méthode classique, en agrandissant $(\mathbb{A}^{+}_{\beta})^{op}$, une esquisse $\mathbb{E}$ de sorte que $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ soit équivalente à $\mathbb{A}$: dans cette construction, les indexations des cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$ sont bien connexes et β-petites ; quant aux indexations des cônes inductifs distingués, ce sont les duales de celles des diagrammes localement limite inductive de la condition (c'). Ainsi $\mathbb{E}$ est β-normale. ■

2.5. Corollaire. *Soit* $\mathbb{A}$ *la catégorie associée à un ensemble ordonné non réduit à un élément. Alors* $\mathbb{A}$ *n'est pas normalement esquissable.*

Démonstration. Une catégorie associée à un ensemble ordonné ne contient aucun objet connexe, puisqu'on a $a + a = a$ pour tout a. ■

Soit $\mathbb{E}$ une α–esquisse quelconque. On sait qu'il n'est pas possible en général d'affirmer que $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ est α-accessible, mais seulement qu'elle est β-accessible pour un cardinal régulier $\beta \geq \alpha$. La même remarque doit être faite dans le cas normal : si $\mathbb{E}$ une α–esquisse normale, alors $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ n'est en général β-normalemement accessible que pour un $\beta \geq \alpha$. Cependant, le passage au cas normal n'aggrave pas le saut nécessaire (de α à β) dans l'échelle des cardinaux. Plus précisément, on a :

2.6. Théorème. *Soient* $\mathbb{A}$ *une catégorie et* α *un cardinal régulier.*

(i) *Si* $\mathbb{A}$ *est* α*-normalement accessible, alors* $\mathbb{A}$ *est* α*-accessible.*

(ii) *Si* $\mathbb{A}$ *est* α*-accessible, alors* $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{A})$ *est* α*-normalement accessible.*

Démonstration. (i) Supposons $\mathbb{A}$ α-normalement accessible. Soit $\mathbb{A}'$ une petite sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$ formée d'objets α-présentables connexes telle que tout objet de $\mathbb{A}$ soit limite inductive α-pseudo-filtrante d'objets de $\mathbb{A}'$. Un argument standard de cofinalité (régularité de α) montre qu'une limite inductive α-pseudo-filtrante, c'est-à-dire une somme de limites inductives α-filtrantes, se réduit à une limite inductive α-filtrante de sommes α-petites. Soit alors $\mathbb{A}''$ la cocomplétion par sommes α-petites de $\mathbb{A}'$: $\mathbb{A}''$ est petite, ses objets sont encore α-présentables, et tout objet de $\mathbb{A}$ est limite inductive α-filtrante d'objets de $\mathbb{A}''$. Donc $\mathbb{A}$ est α-accessible. (ii) Supposons $\mathbb{A}$ α-accessible. Soit $\mathbb{A}'$ une petite sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$ formée d'objets α-présentables telle que tout objet de $\mathbb{A}$ soit limite inductive β-filtrante d'objets de $\mathbb{A}'$. Soit alors $\mathbb{A}''$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{A})$ dont les objets sont les familles formées d'un seul objet de $\mathbb{A}'$: les objets de $\mathbb{A}''$ sont α-présentables et connexes, et tout objet de $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{A})$ est limite inductive β-pseudo-filtrante d'objets de $\mathbb{A}''$. ∎

Remarques. (1) En 1998, S. Lack a annoncé (sans démonstration) le résultat suivant sur la Toile : *si α est un cardinal régulier et si $\mathbb{A}$ est une catégorie α-accessible, alors la catégorie* $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{A})$ *est α-accessible.* On peut l'obtenir en combinant les deux points du théorème 2.6 ci-dessus.

(2) Soit $\mathbb{E}$ une α-esquisse (purement) projective. Dans ce cas, on sait qu'il est possible d'affirmer que $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ est α-accessible : autrement dit, avec les notations utilisées ci-dessus, on peut adopter $\beta = \alpha$. Il est clair que le même résultat est valable dans le cas normal : si $\mathbb{E}$ est une α-esquisse normale projective, alors $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ est une catégorie α-normalement accessible (et complète). De cette façon, on dispose, par ordre de généralité croissant, d'une « version normale » pour chacun des quatre théorèmes de caractérisation « avec rang » suivants :

— le théorème de Gabriel-Ulmer,

(esquisses projectives),

— le théorème 1 de [Ageron95]

(esquisses à cônes inductifs distingués d'indexation vide),

— le théorème 1.1 de [Guitart-Lair80]

(esquisses à cônes inductifs distingués d'indexation discrète),

— le théorème 4.19 de [Ageron92]

(esquisses à cônes inductifs distingués indexés par des groupoïdes squelettiques, comportant des cônes projectifs assurant que ceux-ci opèrent sans point fixe).

(3) Commentant le présent article, un rapporteur demeuré anonyme relevait à juste titre : « il est facile de voir que $\mathbb{A}$ est α-normalement accessible si et seulement si elle est de la forme $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{B})$ pour une catégorie α-accessible $\mathbb{B}$ » ; il en déduisait que les catégories α-normalement accessibles sont esquissables par une α-esquisse de la forme $\mathbb{E}^+$. Or nous avons noté que tous les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}^+$ sont d'indexation *simplement connexe*, ce qui nous exprimerons en disant que $\mathbb{E}^+$ est une esquisse **simple**. On voit ainsi que les catégories simplement esquissables sont exactement les catégories normalement esquissables (ou normalement accessibles). Par exemple, bien que l'esquisse de G-ensemble sans point fixe décrite plus haut ne soit pas simple, elle est (sémantiquement) équivalente à une esquisse simple. La remarque du rapporteur est d'ailleurs à mettre en relation avec les résultats de [Carboni-Johnstone95]. La notion de « catégorie simplement accessible »,

définie dans une première version de ce mémoire pour caractériser les catégories simplement esquissables, s'avère non pertinente. Sans pourtant que tel soit le cas des concepts sur lesquels elle reposait : objet simplement connexe, limite inductive fibrante.

(4) Dans [Adámek-Borceux-Lack-Rosický+] est définie une notion générale de catégorie $\mathbb{D}$-accessible, lorsque $\mathbb{D}$ désigne une catégorie essentiellement petite de catégories finies. Le problème suivant est posé : toute catégorie $\mathbb{D}$-accessible est-elle finiment accessible ? Il résulte de notre théorème 2.6 que, dans le cas où $\mathbb{D}$ est la catégorie des catégories finies connexes, la réponse est affirmative (car les catégories $\mathbb{D}$-accessibles ne sont alors autres que les catégories finiment normalement accessibles). Mais dans l'autre cas qui intéressait ces auteurs, celui où $\mathbb{D}$ est la catégorie des catégories finies discrètes, la construction par récurrence transfinie rappelée plus haut dans la démonstration du théorème 2.4 ne convient plus, et le problème reste alors ouvert.

3. Esquisses positives

Dans cette section, nous caractérisons les catégorie de modèles correspondant à une classe d'esquisses plus vaste que celle des esquisses normales.

3.1. Définition. *Soit* $\mathbb{E}$ *une esquisse. On dira que* $\mathbb{E}$ *est* positive *si tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation non vide (ses cônes inductifs distingués étant quelconques).*

Toute esquisse normale est positive. Il y a de nombreux autres exemples intéressants ; citons-en quelques uns :

Exemples. *a*) *Esquisse de métagroupe.* On appelle **métagroupe** un ensemble muni d'une opération $(x, y) \mapsto x\backslash y$ obéissant aux équations suivantes :

$$(x\backslash y)\backslash(x\backslash z) = y\backslash z \qquad ; \qquad (x\backslash x)\backslash y = y \qquad ; \qquad x\backslash x = y\backslash y \ .$$

La catégorie des métagroupes est clairement équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse positive projective. Il est bien connu qu'elle est aussi équivalente à la catégorie des groupoïdes ayant au plus un objet.

b) *Esquisse de sous-singleton.* On appelle **sous-singleton** un ensemble dont deux éléments quelconques sont égaux. La catégorie des sous-singletons est équivalente à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$. Elle est aussi équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse positive projective $\mathbb{E}$ qui a un seul objet E, une seule flèche id_E et comme seul cône projectif distingué le cône $(\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E)$, indexé par la catégorie discrète à deux objets. L'esquisse des sous-singletons autorise une construction générale fournissant une esquisse positive $\mathbb{E}^0$ à partir d'une esquisse $\mathbb{E}$ quelconque, en ajoutant librement au support de $\mathbb{E}$ un objet final E et en distinguant :

— le cône projectif $(\mathrm{id}_E, \mathrm{id}_E)$, indexé par la catégorie discrète à deux objets ;

— les cônes projectifs obtenus à partir de ceux qui sont distingués dans $\mathbb{E}$ en complétant leur base par les flèches partant vers E ;

— et les cônes inductifs image de ceux qui sont distingués dans $\mathbb{E}$.

Il y a un morphisme évident de $\mathbb{E}^+$ dans $\mathbb{E}^0$, permettant d'identifier $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}^0)$ à la sous-catégorie pleine $\mathbb{F}\mathrm{am}_{\leq 1}(\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}))$ de $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}))$ dont les objets sont les familles de modèles de $\mathbb{E}$ indexées par un sous-singleton. La catégorie $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}^0)$ est équivalente à la catégorie obtenue en adjoignant librement à $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$ un objet initial.

c) *Esquisse de réel positif.* En considérant les réels comme coupures de Dedekind, on vérifie que la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse suivante :

support : l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q}^*_+ \cup \{+\infty\}, \geq)$;

cônes projectifs distingués :

$$q \leftarrow q \rightarrow q \qquad \text{si} \quad q \in \mathbb{Q}^*_+$$

$$(q' \leftarrow q)_{\,q'<q} \qquad \text{si} \quad q \in \mathbb{Q}^*_+$$

$$q \leftarrow +\infty \quad (q \in \mathbb{Q}).$$

cônes inductifs distingués :

$$\rightarrow +\infty \quad \text{(indexation vide).}$$

On notera que cette esquisse ne comporte que des cônes projectifs d'indexation *dénombrable non vide* et des cônes inductifs d'indexation *vide*.

d) *Esquisse d'extension galoisienne.* Fixons un corps commutatif k et une clôture séparable $\bar{k}$ de k. En appliquant les résultats de la théorie de Galois-Krull-Grothendieck, on vérifie que la catégorie des extensions algébriques galoisiennes de k est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse suivante :

objets : tous les sous-groupes distingués ouverts stricts H du groupe topologique $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ ainsi que tous les couples (H', H'') de tels sous-groupes ;

flèches :

$$H' \xrightarrow{g} H \quad \text{si} \quad H' \subset H \quad \text{et} \quad g \in G\,/\,H$$

$$H' \xleftarrow{p'} (H', H'') \xrightarrow{p''} H''$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \quad \text{si} \quad g \in G/H'$$

équations :

$$H'' \xrightarrow{g'} H' \xrightarrow{g} H \qquad = \qquad H'' \xrightarrow{gg'} H$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \xrightarrow{p'} H' \qquad = \qquad H' \cap H'' \xrightarrow{g} H'$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \xrightarrow{p''} H'' \qquad = \qquad H' \cap H'' \xrightarrow{1} H''$$

cônes projectifs distingués :

$$H' \xleftarrow{p'} (H', H'') \xrightarrow{p''} H''$$

cônes inductifs distingués :

$$(< g, 1 > : \ H' \cap H'' \to (H', H'') \ )_{g \in G/H'} \ .$$

On notera que cette esquisse ne comporte que des cônes projectifs d'indexation *finie non vide* et des cônes inductifs d'indexation *discrète*.

Les catégories positivement esquissables peuvent être caractérisées par un processus strictement parallèle à celui que nous avons utilisé pour caractériser les catégories normalement accessibles. Toutefois, la situation est ici nettement plus simple ; en particulier, la notion classique d'objet initial strict permet une formulation et une démonstration plus courte de cette caractérisation :

3.2. Théorème. *Soit α un cardinal régulier. Les catégories α-positivement esquissables sont exactement (à équivalence près) les catégories α-accessibles possédant un objet initial strict.*

Démonstration. La catégorie des modèles d'une esquisse positive possède un objet initial : le modèle vide point par point. Cet objet initial est évidemment strict. Inversement, si une catégorie α-accessible $\mathbb{A}$ possède un objet initial strict, celui-ci peut s'interpréter comme objet initial librement ajouté à une catégorie α-accessible $\mathbb{B}$. Avec les notations de l'exemple *b*), on obtient que $\mathbb{A}$ est équivalente à $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}^0)$ pour une α-esquisse $\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E}^0$ est alors une α-esquisse positive, le résultat en découle. ∎

On dispose bien sûr aussi d'une « version positive » pour chacun des quatre théorèmes de caractérisation « avec rang » rappelés plus haut ; les exemples *c*) et *d*) ci-dessus en fournissent des illustrations éclairantes.

Bibliographie

Adámek-Borceux00 J. ADÁMEK and F. BORCEUX, *Morita equivalence of sketches*, Applied Categorical Structures 8 (2000) 503-517

Adámek-Rosický95 J. ADÁMEK and J. ROSICKÝ, *Finitary sketches and finitely accessible categories*, Mathematical Structures in Computer Science 5 (1995) 315-322

Adámek-Borceux-Rosický-Lack+ J. ADÁMEK, F. BORCEUX, S. LACK and J. ROSICKÝ, *A classification of accessible categories*, à paraître dans le Journal of Pure and Applied Algebra

Ageron92 P. AGERON, *The logic of structures*, Journal of Pure and Applied Algebra 79 (1992) 15-34

Ageron95 P. AGERON, *Catégories accessibles à limites projectives non vides et catégories accessibles à limites projectives finies*, Diagrammes 34 (1995) 1-10

Ageron96 P. AGERON, *Catégories accessibles à produits fibrés*, Diagrammes 36 (1996) 1-11

Ageron97 P. AGERON, *Limites projectives conditionnelles dans les catégories accessibles*, Diagrammes 38 (1997) 3-18

Ageron+ P. AGERON, *Esquisses inductives et esquisses presque inductives*, à paraître dans les Cahiers de Topologie et de Géométrie Différentielle Catégoriques

Carboni-Johnstone95 A. CARBONI and P. JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science 5 (1995) 441-459

Guitart-Lair80 R. GUITART et C. LAIR, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4 (1980) GL1-GL106

Guitart-Lair81 R. GUITART et C. LAIR, *Existence de diagrammes localement libres*, Diagrammes 6 (1981) GL1-GL13 et 7 (1982) RGCL1-RGCL4

Lair81 C. LAIR, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 6 (1981) L1-L20

Lair87 C. LAIR, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17 (1987) 1-153

Lair96a C. LAIR, *Esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal*, Diagrammes 35 (1996) 3-23

Lair96b C. LAIR, *Esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux*, Diagrammes 35 (1996) 25-52

Lair96c C. LAIR, *Esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les les limites d'indexation finies (resp. finies et non vides, resp. finies et connexes, resp. finies et connexes et non vides)*, Diagrammes 35 (1996) 53-90

Lair97 C. LAIR, *Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux*, Diagrammes 38 (1997) 19-78

Makkai-Paré89 M. MAKKAI and R. PARÉ, *Accessible categories : the foundations of categorical model theory*, American Mathematical Society (1989)

Département de mathématiques, Université de Caen
14032 Caen cedex, France
Email: `ageron@math.unicaen.fr`

This article may be accessed via WWW at `http://www.tac.mta.ca/tac/` or by anonymous ftp at `ftp://ftp.tac.mta.ca/pub/tac/html/volumes/8/n11/n11.{dvi,ps}`