Theory and Applications of Categories, Vol. 22, No. 15, 2009, pp. 376–387.

T-CATÉGORIES REPRÉSENTABLES

Dedicated to Albert Burroni on the occasion of the conference organised in Paris VII in 2002 in honour of his retirement.

JACQUES PENON

RÉSUMÉ. With the representable **T**-categories, we form a connection between two concepts, both owed to A. Burroni : on the one hand, the one of **T**-category, and, on the other hand, the one of **T**-lax algebra. Both of them generalise the concept of algebra on a monad **T**.

1. Introduction

Le concept de **T**-catégorie (et celui, dérivé, de **T**-opérade) apparaît de plus en plus comme central en théorie des catégories aux côtés de celui de monade, algèbres sur une monade, etc. Il n'est pourtant pas nouveau ($\simeq$ 1971), mais il a été longtemps méconnu. Aussi, avec cet article, nous espérons que nous contribuerons à développer ≪l'édifice **T**-catégorique≫ et surtout à faire connaître le travail d'Albert Burroni.

Comme annoncé dans le résumé ci-dessus, ce papier s'articule entre deux concepts d'Albert Burroni : celui de **T**-catégorie, et celui de **T**-pseudo-algèbre, tous les deux introduits dans [Bur-71] [1], et c'est la notion de **T**-catégorie représentable, développée ici, qui va faire le lien entre les deux.

Le concept lui-même de **T**-catégorie représentable m'a été suggéré, dans les années 70 (à Oberwolfach) par André Joyal pour affaiblir les structures algébriques (mais il trouve aussi ses origines dans [Bur 71] avec les **T**-catégories prétensorielles — p.67). De son coté, A. Burroni avait proposé les pseudo-algèbres dans cette même optique (pour l'origine de la notion, consulter [Bur 71]). Nous allons voir qu'en réalité, à un détail près, ces deux concepts sont équivalents (montré au § 4).

Signalons que les **T**-catégories représentables généralisent les multicatégories représentables de C. Hermida [Her 99] où, pour ces dernières, la monade **T** est la monade ≪monoïde libre≫. T. Leinster a lui aussi proposé une définition de **T**-catégorie représentable [Lei 02], aussi nous en dirons quelques mots en fin d'article.

Received by the editors xxx and, in revised form, 2009-07-12.
Transmitted by R. Paré. Published on 2009-07-24.
2000 Mathematics Subject Classification: 18C15, 18C20, 18D05, 18D35.
Key words and phrases: category, internal category, monad, lax algebra, **T**-category.

1. La terminologie de ce dernier concept à varié au cours du temps : les ≪**T**-pseudo-algèbres≫ de [Bur 71] ont été rebaptisées, dans un contexte différent, ≪**T**-2-algèbres≫ dans [Bur 73], puis le nom de ≪**T**-pseudo-algèbres≫ est réapparu dans le texte de base [Bur 75]. Aujourd'hui Burroni les appelle ≪**T**-algèbres laxes≫, adoptant la terminologie donnée par M.Bunge de ≪**T**-lax algebras≫ dans [Bun 74].

2. Définition des **T**-catégories représentables

Fixons une catégorie à produits fibrés **E** que l'on munit d'une structure de monade cartésienne $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ (i.e. T commute aux produits fibrés et η, μ sont cartésiennes, c'est-à-dire, considérées comme foncteurs $\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E^2}$, elles envoient toute flèche sur un carré cartésien). Une conséquence de ces axiomes, utile ici, est le fait que pour tout objet X de **E** la flèche η_X est un monomorphisme fort [Bou] (en effet, cette propriété étant vraie pour les flèches de la forme η_{TX}, elle se transporte par changement de base à η_X).

Commençons par quelques rappels.

On appelle **T**-catégorie dans [Bu 71] (mais appelée **T**-multicatégorie dans [Lei 98]) la donnée

- d'un objet O de **E** et,
- d'un monoïde (S, ι, κ) dans $Gr_O(\mathbf{T})$, où $Gr_O(\mathbf{T})$ est la catégorie monoïdale dont :
  - les objets (appelés **T**-graphes) sont les spans de la forme $TO \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} O$,
  - les flèches sont simplement les morphismes entre ces spans,
  - l'objet unité est $TO \xleftarrow{\eta_O} O \xrightarrow{Id} O$,
  - le produit tensoriel de $TO \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} O$ et de $TO \xleftarrow{\partial'_0} S' \xrightarrow{\partial'_1} O$ est le **T**-graphe $TO \xleftarrow{\partial''_0} S \circ S' \xrightarrow{\partial''_1} O$, où $S \circ S'$ est donné par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} S \circ S' \arrow[rr, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & S \arrow[d, "\partial_0"] \\ TS' \arrow[rr, "T\partial'_1"'] & & TO \end{tikzcd}$$

et où ∂''_0 et ∂''_1 sont donnés par les composés suivant :

$$\partial''_0 = (S \circ S' \xrightarrow{\pi_0} TS' \xrightarrow{T\partial'_0} T^2O \xrightarrow{\mu_0} TO) \text{ et } \partial''_1 = (S \circ S' \xrightarrow{\pi_1} S \xrightarrow{\partial_1} O).$$

Un morphisme entre deux **T**-catégories $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ est la donnée de deux flèches : l'une $f : O \longrightarrow O'$ et l'autre $s : S \longrightarrow S'$ vérifiant les identitées suivantes :

$$Tf.\partial_0 = \partial'_0 \cdot s, \qquad f \cdot \partial_1 = \partial'_1 \cdot s, \qquad \iota' \cdot f = s \cdot \iota \qquad \text{et} \qquad s \cdot \kappa = \kappa' \cdot s \circ s$$

(où rappelons le, $\iota : C \longrightarrow S$ et $\kappa : S \circ S \longrightarrow S$)

Les **T**-catégories et leurs morphismes forment une catégorie que l'on notera $Cat(\mathbf{T})$.

Donnons-nous maintenant une **T**-catégorie $\mathcal{S} = (O, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$. À cette **T**-catégorie on peut faire correspondre deux catégories internes à **E**, notées $C(\mathcal{S})$ et $K(\mathcal{S})$ et un foncteur interne $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$.

La première catégorie interne $C(\mathcal{S}) = (C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$ s'obtient comme suit : son objet des objets C_0 est O et son objet des flèches C_1, ainsi que le morphisme «domaine» $\partial_0 : C_1 \longrightarrow C_0$ sont donnés par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & S \arrow[d, "\partial_0"] \\ O \arrow[r, "\eta_O"'] & TO \end{tikzcd}$$

Ensuite, les flèches «codomaine» $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$, «identité» $\iota : C_0 \longrightarrow C_1$ et «composition» $\kappa : C_1 \star C_1 \longrightarrow C_1$ (où $C_1 \star C_1 = C_1 \times_O C_1$) sont des restrictions des flèches correspondantes de la **T**-catégorie. De façon précise : $\partial_1 = (C_1 \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\partial_1} O)$ et ι et κ proviennent des factorisations :

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, dashed, "\iota"] \arrow[d, "Id"'] & C_1 \arrow[d, "can"] \\ O \arrow[r, "\iota"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \star C_1 \arrow[r, dashed, "\kappa"] \arrow[d, "can"'] & C_1 \arrow[d, "can"] \\ S \circ S \arrow[r, "\kappa"'] & S \end{tikzcd}$$

où $can : C_1 \star C_1 \longrightarrow S \circ S$ est l'unique flèche de $\mathbf{E}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "can"'] & C_1 \star C_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[rr, "\pi_0"] \arrow[d, "can"] & & C_1 \arrow[d, "can"] \\ S & S \circ S \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_0"'] & TS & S \arrow[l, "\eta_S"] \end{tikzcd}$$

La deuxième catégorie interne $K(\mathcal{S}) = (K_0, K_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$ (déjà décrite dans [Bur 71] et [Lei 98]), se construit comme suit : Son objet des objets K_0 est TO, son objet des flèches K_1 est TS, ses flèches «domaine» , «codomaine» et «identité» sont données par : $\partial_0 = (TS \xrightarrow{T\partial_0} T^2O \xrightarrow{\mu_O} TO)$, $\partial_1 = (TS \xrightarrow{T\partial_1} TO)$, $\iota = (TO \xrightarrow{T\iota} TS)$. Sa loi de composition $\kappa : K_1 \star K_1 \longrightarrow K_1$ est donnée par le composé : $K_1 \star K_1 \xrightarrow{\sim} T(S \circ S) \xrightarrow{T\kappa} TS$ où l'isomorphisme ci-dessus provient du fait que le carré composé suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} T(S \circ S) \arrow[r, "T\pi_0"] \arrow[d, "T\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & T^2S \arrow[r, "\mu_S"] \arrow[d, "T^2\partial_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & TS \arrow[d, "T\partial_1"] \\ T(S) \arrow[r, "T\partial_0"'] & T^2O \arrow[r, "\mu_O"'] & TO \end{tikzcd}$$

Plus qu'une catégorie interne à $\mathbf{E}$, $K(\mathcal{S})$ est surtout une catégorie interne à $\mathbf{E}^{\mathbf{T}}$ (la catégorie des **T**-algèbres). Les morphismes de structure sur K_0 et K_1 sont donnés par les flèches μ_O et μ_S.

Le foncteur interne $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$ entre ces deux catégories est donné par : $u_0 = \eta_O : O \longrightarrow TO$ et $u_1 = (C_1 \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\eta_S} TS)$. On montre que u est, internement, pleinement fidèle.

Nous pouvons maintenant définir les **T**-catégories représentables.

2.1. DÉFINITION. Appelons $\mathbf{T}$-catégorie représentable une $\mathbf{T}$-catégorie $\mathcal{S}$ pour laquelle le foncteur interne canonique $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$, précédemment décrit admet (internement) un adjoint à gauche.

2.2. EXEMPLE. Lorsque $\mathbf{E} = \mathbf{Ens}$ et $\mathbf{T}$ est la monade "monoïde libre", une $\mathbf{T}$-catégorie (ce qu'on appelle dans ce cas une multicatégorie — pour sa définition originelle, voir [Lam 69]) est représentable si et seulement si, pour tout n-uplet d'objets $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, il existe une flèche universelle $(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow \otimes\overrightarrow{x}$ dans le sens que la précomposition (c'est-à-dire la composition $S \circ S \xrightarrow{k} S$ de la multicatégorie) avec cette flèche induit la bijection naturelle en y :

$$\frac{(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow y}{(\otimes\vec{x}) \longrightarrow y}$$

$\mathcal{S}$ satisfait donc exactement le premier axiome (sur les 2) de la définition des multi-catégories représentables (voir [Her 00]).

3. Construction d'algèbres laxes

Avant d'arriver à l'équivalence annoncée dans l'introduction, arrêtons-nous un moment sur la configuration apparaissant dans la définition des $\mathbf{T}$-catégories représentables, c'est-à-dire d'une adjonction $(\alpha, \beta) : l \dashv u : C \rightleftarrows K$ dans $Cat(\mathbf{E})$, où K est sous-jacent à un objet de $Cat(\mathbf{E}^{\mathbf{T}})$. Nous allons voir qu'une telle configuration suffit à produire une algèbre laxe (pour la monade $\overline{\mathbf{T}}$, prolongement de $\mathbf{T}$ à $Cat(\mathbf{E})$). Cette procédure peut même se faire, plus généralement, dans le cadre des 2-catégories comme nous allons le voir maintenant. Mais, tout d'abord, commençons par rappeler la définition des algèbres laxes.

Soit $\mathbf{C}$ une 2-catégorie et $\mathbf{M} = (M, \eta, \mu)$ une 2-monade sur $\mathbf{C}$ (c'est-à-dire que M est un 2-endofoncteur de $\mathbf{C}$, η et μ des 2-transformations naturelles, et leur foncteur et transformation naturelle sous-jacents forment une monade sur la catégorie sous-jacente à $\mathbf{C}$) (bien sûr, toutes ces données sont strictes ; elles pourraient bien entendu être présentées dans le cadre plus général, et surtout non strict, des bicatégories, comme l'a fait A. Burroni à l'origine — voir [Bur 71]).

Une $\mathbf{M}$-algèbre laxe (voir [Bur 73], [Bur 75] où, dans ce dernier article, elles sont appelées $\mathbf{M}$-pseudo-algèbres à droite ; voir aussi [Bun 74]) est la donnée :

– d'un objet C de $\mathbf{C}$,

– d'une flèche notée $\otimes : MC \longrightarrow C$,

– de deux 2-cellules $i : \otimes \cdot \eta_C \longrightarrow Id_C$ et $a : \otimes \cdot \mu_C \longrightarrow \otimes \cdot M\otimes$ faisant commuter les diagrammes suivants dans $Hom(MC, C)$ et $Hom(M^3C, C)$:

$$\begin{tikzcd} \otimes \arrow[r, "a\cdot M\eta_C"] \arrow[d, "a\cdot\eta_{MC}"'] \arrow[dr, "Id"] & \otimes\cdot M\otimes\cdot M\eta_C \arrow[d, "\otimes\cdot Mi"] \\ \otimes\cdot M\otimes\cdot\eta_{MC} \arrow[r, "i\cdot\otimes"'] & \otimes \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\otimes \cdot \mu_C \cdot \mu_{MC} \arrow[d, "a\cdot\mu_{MC}"'] & \otimes \cdot \mu_C \cdot M\mu_C \arrow[l, "Id"'] \arrow[r, "a\cdot M\mu_C"] & \otimes \cdot M \otimes \cdot M\mu_C \arrow[d, "\otimes\cdot Ma"] \\
\otimes \cdot M \otimes \cdot \mu_{MC} \arrow[r, "Id"'] & \otimes \cdot \mu_C \cdot M^2\otimes \arrow[r, "a\cdot M^2\otimes"'] & \otimes \cdot M \otimes \cdot M^2\otimes
\end{tikzcd}$$

Un morphisme $(C, \otimes, i, a) \longrightarrow (C', \otimes', i', a')$ entre $\mathbf{M}$-algèbres laxes (appelé morphisme à gauche dans [Bur 75]) est la donnée

- d'une flèche $f : C \longrightarrow C'$,
- d'une 2-cellule $\varphi : \otimes' \cdot Mf \longrightarrow f \cdot \otimes$ faisant commuter les diagrammes suivants dans $Hom(C, C')$ et $Hom(M^2C, C')$:

$$\begin{tikzcd}
\otimes' \cdot Mf \cdot \eta_C \arrow[r, "\varphi\cdot\eta_C"] \arrow[d, "Id"'] & f \cdot \otimes \cdot \eta_C \arrow[d, "f\cdot i"] \\
\otimes' \cdot \eta_{C'} \cdot f \arrow[r, "i'\cdot f"'] & f
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\otimes' \cdot \mu_{C'} \cdot M^2 f \arrow[r, "a'\cdot M^2 f"] \arrow[d, "Id"'] & \otimes' \cdot M \otimes' \cdot M^2 f \arrow[d, "\otimes'\cdot M\varphi"] \\
\otimes' \cdot Mf \cdot \mu_C \arrow[d, "\varphi\cdot\mu_C"'] & \otimes' \cdot Mf \cdot M\otimes \arrow[d, "\varphi\cdot M\otimes"] \\
f \cdot \otimes \cdot \mu_C \arrow[r, "f\cdot a"'] & f \cdot \otimes \cdot M\otimes
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{M}$-algèbres laxes et morphismes entre $\mathbf{M}$-algèbres laxes forment une catégorie notée ici $Alx(\mathbf{M})$ (en fait, elle a une structure de 2-catégorie, voir toujours [Bur 75], mais les 2-cellules entre algèbres laxes ne seront pas abordées ici).

Reprenons maintenant les considérations du début de ce paragraphe mais dans le cadre plus général donné ici des 2-catégories. Considérons la catégorie, notée $Adal(\mathbf{M})$, qui a :

- pour objets, les adjonctions $(\alpha, \beta) : l \dashv u : C \rightleftarrows K$ dans $\mathbf{C}$, où K est en plus muni d'un morphisme de structure $m : MK \longrightarrow K$ qui fait de (K, m) une $\mathbf{M}$-algèbre.
- pour flèches, $(C, K, m, u, l, \alpha, \beta) \longrightarrow (C', K', m', u', l', \alpha', \beta')$ les couples de flèches (f, F) où $f : C \longrightarrow C'$ est une flèche de $\mathbf{C}$ et $F : (K, m) \longrightarrow (K', m')$ est une flèche de $\mathbf{C}^{\mathbf{M}}$, f et F étant liées par la commutation $F \cdot u = u' \cdot f$.

Nous allons construire un foncteur canonique $U : Adal(\mathbf{M}) \longrightarrow Alx(\mathbf{M})$. Donnons-nous tout d'abord un objet $\mathcal{A} = (C, K, m, u, l, \alpha, \beta)$ de $Adal(\mathbf{M})$. On lui fait correspondre une $\mathbf{M}$-algèbre laxe $(C, \otimes, i, a)$ où C est inchangé et où $\otimes : MC \longrightarrow C$ est donné par le composé suivant :

$$MC \xrightarrow{Mu} MK \xrightarrow{m} K \xrightarrow{l} C$$

Les 2-cellules i et a sont données par $i = \beta$ (ce qui a un sens puisque $l \cdot u = \otimes \cdot \eta_C$) et a est la flèche dans $Hom(M^2C, C)$ suivante :

$$\otimes \cdot \mu_C \xrightarrow{Id} l \cdot m \cdot Mm \cdot M^2u \xrightarrow{l \cdot m \cdot M\alpha \cdot Mm \cdot M^2u} l \cdot m \cdot Mu \cdot Ml \cdot Mm \cdot M^2u \xrightarrow{Id} \otimes \cdot M\otimes$$

Notons $U(\mathcal{A})$ cette **M**-algèbre laxe. Si, d'autre part, $(f, F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est un morphisme de $Adal(\mathbf{M})$, on construit un morphisme $(f, \varphi) : U\mathcal{A} \longrightarrow U\mathcal{A}'$ où f reste inchangé et où φ est la 2-cellule :

$$\otimes' \cdot Mf \xrightarrow{Id} l' \cdot F \cdot m \cdot Mu \xrightarrow{\gamma \cdot m \cdot Mu} f \cdot l \cdot m \cdot Mu \xrightarrow{Id} f \cdot \otimes$$

où $\gamma : l' \cdot F \longrightarrow f \cdot l$ est le composé suivant dans $Hom(K, C')$:

$$l' \cdot F \xrightarrow{l' \cdot F \cdot \alpha} l' \cdot F \cdot u \cdot l \xrightarrow{Id} l' \cdot u' \cdot f \cdot l \xrightarrow{\beta' \cdot f \cdot l} f \cdot l$$

On construit ainsi un foncteur $U : Adal(\mathbf{M}) \longrightarrow Alx(\mathbf{M})$.

4. La construction adjointe

Revenons maintenant à la catégorie **E** et à la monade **T** du paragraphe 2. On voit facilement qu'on peut prolonger à $Cat(\mathbf{E})$ la monade **T** et que cette nouvelle monade (qui est cartésienne) est en fait une 2-monade (cela provient de ce que les structures de catégorie, de foncteur et même de transformation naturelle s'expriment à l'aide de produits fibrés et donc commutent avec T). Notons-la $\overline{\mathbf{T}}$. On peut donc appliquer la construction précédente où ici $\mathbf{C} = Cat(\mathbf{E})$ et $\mathbf{M} = \overline{\mathbf{T}}$.

4.1. THÉORÈME. *Le foncteur $U : Adal(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\mathbf{T}})$ admet ici un adjoint à gauche noté Kl, pour lequel la transformation naturelle unité $Id \longrightarrow U \cdot Kl$ est une identité (la notation Kl provient du fait que dans le cas où* **T** *est la monade identité sur* **E** *on retrouve, internement parlant, la catégorie de Kleisli — avec sa paire d'adjoints — d'une comonade quelconque).*

PREUVE. Avant de commencer, remarquons que la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$ est représentable (voir [Gray 71]). On note $\delta : \partial_0 \longrightarrow \partial_1 : C^{\mathbf{2}} \longrightarrow C$ la 2-cellule universelle pour l'objet C et si $\theta : x \longrightarrow y : X \longrightarrow C$ est une autre 2-cellule, on désigne par $|\theta| : X \longrightarrow C^{\mathbf{2}}$ l'unique flèche telle que :

$$(\partial_0 \cdot |\theta| \xrightarrow{\delta . |\theta|} \partial_1 \cdot |\theta|) = (x \xrightarrow{\theta} y)$$

Remarquons aussi que $Cat(\mathbf{E})$ est à 2-produits fibrés et que l'endofoncteur $\overline{T}$ commute avec eux ainsi qu'avec les 2-cellules universelles. En conséquence, $\overline{T}$ commute aussi aux objets commas. Commençons par construire le foncteur Kl. Soit $\mathcal{C} = (C, \otimes, i, a)$ une $\overline{\mathbf{T}}$-algèbre laxe de $Cat(\mathbf{E})$. On va tout d'abord construire une $\overline{\mathbf{T}}$-catégorie dans $Cat(\mathbf{E})$, notée

$\overline{S}(\mathcal{C}) = (C, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$, où le span $\overline{T}C \xleftarrow{\partial_0} S \xrightarrow{\partial_1} C$ est obtenu en considérant l'objet comma suivant dans la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$:

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow_{\sigma}"] & \\ \bar{T}C \arrow[rr, "\otimes"'] & & C \end{tikzcd}$$

$\iota : C \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\partial_0 \cdot \iota = \eta_C$ et, dans $Hom(C, C)$:

$$(\otimes \cdot \partial_0 \cdot \iota \xrightarrow{\sigma \cdot \iota} \partial_1 \cdot \iota) = (\otimes \cdot \eta_C \xrightarrow{i} Id_C)$$

et $\kappa : S \circ S \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\mu_C \cdot \overline{T}\partial_0 \cdot \pi_0 = \partial_0 \cdot \kappa$ et, dans $Hom(S \circ S, C)$: $(\otimes \cdot \partial_0 \cdot \kappa \xrightarrow{\sigma \cdot \kappa} \partial_1 \cdot \kappa) = (\otimes \cdot \mu_C \cdot \overline{T}\partial_0 \cdot \pi_0 \xrightarrow{a \cdot \overline{T}\partial_0 \cdot \pi_0} \otimes \cdot \overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \cdot \pi_0 \xrightarrow{\otimes \cdot \overline{T}\sigma \cdot \pi_0} \otimes \cdot \overline{T}\partial_1 \cdot \pi_0 \xrightarrow{Id} \otimes \cdot \partial_0 \cdot \pi_1 \xrightarrow{\sigma \cdot \pi_1} \partial_1 \cdot \pi_1)$, où $\pi_0 : S \circ S \longrightarrow \overline{T}S$ et $\pi_1 : S \circ S \longrightarrow S$ sont les projections canoniques. A partir de cette $\overline{\mathbf{T}}$-catégorie (dans $Cat(\mathbf{E})$) on peut considérer deux catégories internes dans $Cat(\mathbf{E})$ (ce sont donc des objets de $Cat(Cat(\mathbf{E})) = Cat^2(\mathbf{E})$, c'est-à-dire des catégories doubles internes à $\mathbf{E}$). La première est $k(C)$, où $(kC)_0 = C$, $(kC)_1 = C^{\mathbf{2}}$, etc. (existant dans toute 2-catégorie représentable), la seconde est $K\overline{S}(\mathcal{C})$, où $K(\mathcal{S})$ est construite au paragraphe 2, dans $\mathbf{E}$ au lieu de $Cat(\mathbf{E})$, dans le cas d'une $\mathbf{T}$-catégorie quelconque $\mathcal{S}$. On construit ensuite un foncteur interne canonique $u : k(C) \longrightarrow K\overline{S}\mathcal{C}$, en posant : $u_0 = (C \xrightarrow{\eta_C} \overline{T}C)$ et $u_1 = (C^{\mathbf{2}} \xrightarrow{can} S \xrightarrow{\eta_S} \overline{T}S)$, où $can : C^{\mathbf{2}} \longrightarrow S$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\partial_0 \cdot can = \eta_C \cdot \partial_0$ et, dans $Hom(C^{\mathbf{2}}, C)$: $(\otimes \cdot \partial_0 \cdot can \xrightarrow{\sigma \cdot can} \partial_1 \cdot can) = (\otimes \cdot \eta_C \cdot \partial_0 \xrightarrow{i \cdot \partial_0} \partial_0 \xrightarrow{\delta} \partial_1)$

4.2. Lemme. *Le foncteur interne* $u : k(C) \longrightarrow K\overline{S}(\mathcal{C})$ *admet un adjoint à gauche noté* l *(dans* $Cat^2\mathbf{E}$*).*

Preuve du lemme. On construit $l : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow k(C)$ en posant $l_0 = \otimes : \overline{T}C \longrightarrow C$ et $l_1 = |\lambda| : \overline{T}S \longrightarrow C^{\mathbf{2}}$, où λ est la 2-cellule composée suivante dans $Hom(\overline{T}S, C)$:

$$\otimes \cdot \mu_C \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{a \cdot \overline{T}\partial_0} \otimes \cdot \overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{\otimes \cdot \overline{T}\sigma} \otimes \cdot \overline{T}\partial_1.$$

L'unité $\alpha : Id \longrightarrow u \cdot l$ et la co-unité $\beta : l \cdot u \longrightarrow Id$ de l'adjonction sont données par les flèches $\overline{T}C \longrightarrow \overline{T}S$ et $C \longrightarrow C^{\mathbf{2}}$, toujours notées α et β, sont définies par :

– pour α, comme étant l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ telle que $\overline{T}\partial_0 \cdot \alpha = \eta_{\overline{T}C}$ et, dans $Hom(\overline{T}C, \overline{T}C)$: $(\overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0.\alpha \xrightarrow{\overline{T}\sigma.\alpha} \overline{T}\partial_1 \cdot \alpha) = (\overline{T} \otimes \cdot \eta_{\overline{T}C} \xrightarrow{Id} \eta_C \cdot \otimes)$.
– pour β, par $\beta = |i|$.

∎

Fin de la preuve du théorème 4.1. Ainsi, à tout objet $\mathcal{C}$ de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$ on lui fait correspondre un objet de $Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ que nous noterons $\overline{Kl}(\mathcal{C})$. On étend ensuite la définition de $\overline{Kl}$ aux flèches de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$. En effet, si $(f,\varphi) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est une flèche de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$, on construit tout d'abord un morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$-catégorie $(f,s) : \overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow \overline{S}(\mathcal{C}')$, où f est inchangé et où $s : S \longrightarrow S'$ est l'unique flèche de $Cat(\mathbf{E})$ pour laquelle $\partial_0' \cdot s = \overline{T}f \cdot \partial_0$ et, dans $Hom(S, C')$:

$$(\otimes' \cdot \partial_0' \cdot s \xrightarrow{\sigma' \cdot s} \partial_1' \cdot s) = (\otimes' \cdot \overline{T}f \cdot \partial_0 \xrightarrow{\varphi \cdot \partial_0} f \cdot \otimes \cdot \partial_0 \xrightarrow{f \cdot \sigma} f \cdot \partial_1)$$

(au passage, on vient de construire un foncteur, noté $\overline{S}$, $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Cat(\overline{\mathbf{T}})$. Il sera repris au paragraphe suivant). Ce morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$-catégorie induit un foncteur interne $F = K\overline{S}(f,\varphi) : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow K\overline{S}(\mathcal{C}')$, où $F_0 = \overline{T}f : \overline{T}C \longrightarrow \overline{T}C'$ et $F_1 = \overline{T}s : \overline{T}S \longrightarrow \overline{T}S'$. Ce foncteur est aussi un morphisme de $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$-algèbre (ou encore un foncteur interne dans $(Cat(\mathbf{E}))^{\overline{\mathbf{T}}}$). Parallèlement, on a aussi le foncteur interne $kf : kC \longrightarrow kC'$ où $(kf)_0 = f$ et $(kf)_1 = f^{\mathbf{2}}$. Le couple (kf, F) est un morphisme $\overline{Kl}\mathcal{C} \longrightarrow \overline{Kl}\mathcal{C}'$ et $\overline{Kl}$ ainsi construit est un foncteur $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Adal(\overline{\mathbf{T}})$. Le foncteur Kl désiré est alors le composé suivant :

$$Alx(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{\overline{Kl}} Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}}) \xrightarrow{z} Adal(\overline{\mathbf{T}})$$

où z provient du 2-foncteur encore noté $z : Cat^2(\mathbf{E}) \longrightarrow Cat(\mathbf{E})$ qu'on définit par $z(C_0, C_1, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa) = (C_{00}, C_{10}, \partial_{00}, \partial_{10}, \iota_0, \kappa_0)$. Profitons-en pour signaler que le 2-foncteur $k : Cat(\mathbf{E}) \longrightarrow Cat^2(\mathbf{E})$ est une section de z (i.e. $z \cdot k = Id$). Le foncteur k se prolonge aussi en des foncteurs $Alx(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ et $Adal(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$ tous deux notés encore k (car on a la commutation $k\overline{T}C \simeq \overline{\overline{T}}kC$). L'identité $z \cdot k = Id$ reste encore satisfaite.

Dans le même ordre d'idée, l'identité $U \cdot Kl = Id$ résulte de l'identité $U \cdot \overline{Kl} = k$ (où ici $U : Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}}) \longrightarrow Alx(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$).

Il nous faut maintenant construire la co-unité $\varepsilon : Kl \cdot U \longrightarrow Id$ et, pour ce faire, puisque nous utilisons $\overline{Kl}$, on construit une transformation naturelle $\overline{\varepsilon} : \overline{Kl} \cdot U \longrightarrow k$. Définissons-la sur un objet $\mathcal{A} = (C, K, m, u, l, \alpha, \beta)$ de $Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$. Notons $\mathcal{C} = U\mathcal{A}$, $\mathcal{C} = (C, \otimes, i, a)$. On construit pour cela un foncteur interne (dans $Cat(\mathbf{E})$), $c : K\overline{S}(\mathcal{C}) \longrightarrow k(K)$ en posant : $c_0 = (\overline{T}C \xrightarrow{\overline{\mathbf{T}}u} \overline{T}K \xrightarrow{m} K)$ et $c_1 = |\theta| : \overline{T}S \longrightarrow K^{\mathbf{2}}$, où θ est la flèche composée suivante dans $Hom(\overline{T}S, K)$:

$$m \cdot \overline{T}m \cdot \overline{T}^2 u \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{m \cdot \overline{T}\alpha \cdot \overline{T}m \cdot \overline{T}^2 u \cdot \overline{T}\partial_0} m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T} \otimes \cdot \overline{T}\partial_0 \xrightarrow{m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T}\sigma} m \cdot \overline{T}u \cdot \overline{T}\partial_1$$

Le couple $(Id, c) : \overline{Kl} \cdot U(\mathcal{A}) \longrightarrow k(\mathcal{A})$ est un morphisme de $Adal(\overline{\overline{\mathbf{T}}})$. Il ne reste plus qu'à poser $\overline{\varepsilon}_{\mathcal{A}} = (Id, c)$ et $\varepsilon_{\mathcal{A}} = z(\overline{\varepsilon}_{\mathcal{A}})$ pour obtenir les transformations naturelles désirées. ∎

5. L'équivalence entre $Catr(\mathbf{T})$ et $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$

Il est temps de résoudre le problème annoncé dans l'introduction, c'est-à-dire, l'équivalence (à un détail près !) entre les $\mathbf{T}$-catégories représentables et les $\overline{\mathbf{T}}$-algèbres laxes.

Précisons pour commencer de quel détail il s'agit. Toujours dans le même contexte des § 1 et § 3, considérons la sous-catégorie pleine, notée $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$ de $Alx(\overline{\mathbf{T}})$ ayant pour objets les $\overline{\mathbf{T}}$-algèbres laxes $(C, \otimes, i, a)$, où i est un isomorphisme ; on note j l'inclusion de $Al\tilde{x}\overline{\mathbf{T}}$ dans $Alx\mathbf{T}$. Considérons aussi la catégorie $Catr(\mathbf{T})$ ayant :

– pour objets, les $\mathbf{T}$-catégories représentables munies de leurs «représentations» (c'est-à-dire du choix de l'adjoint à gauche de $u : C(\mathcal{S}) \longrightarrow K(\mathcal{S})$ ainsi que du choix de l'unité et de la co-unité de cette adjonction).
– pour flèches, les morphismes entre leurs $\mathbf{T}$-catégories sous-jacentes.

On note $j : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Cat(\mathbf{T})$ le foncteur d'oubli pleinement fidèle qui en découle. D'un autre côté, il y a aussi un foncteur canonique $V : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Adal(\overline{\mathbf{T}})$ (celui-ci étant clair sur les objets, construisons-le sur les flèches. Pour cela, il nous suffit, plus généralement, d'associer à tout morphisme de $\mathbf{T}$-catégorie (représentable ou non) $(f, s) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ un couple de foncteurs internes (g, h), où $g : C\mathcal{S} \longrightarrow C\mathcal{S}'$ et $h : K\mathcal{S} \longrightarrow K\mathcal{S}'$, h étant un morphisme de $\overline{\mathbf{T}}$-algèbre, et tel que l'on ait la commutation $h \cdot u = u' \cdot g$. En fait, $g_0 = f$ et $g_1 : C\mathcal{S}_1 \longrightarrow C\mathcal{S}'_1$ se déduit de s par factorisation. De plus, h est donné par $h_0 = Tf$ et $h_1 = Ts$. On remarque ensuite qu'on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} Catr(\mathbf{T}) \arrow[r, dashed, "U'"] \arrow[d, "V"'] & Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[d, hook, "j"] \\ Adal(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, "U"'] & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \end{tikzcd} \tag{1}$$

(cela provient du fait que, pour tout objet $\mathcal{S}$ de $Catr(\mathbf{T})$ — qui est noté de la même façon que son image par V — le foncteur canonique $u : C\mathcal{S} \longrightarrow K\mathcal{S}$ étant pleinement fidèle (voir le paragraphe 2), la co-unité $\beta : l \cdot u \longrightarrow Id$ est un isomorphisme).

5.1. Théorème. Le foncteur $U' : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$ est une équivalence.

Preuve. Le pseudo-inverse, noté S', de U' est donné par la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, dashed, "S'"] \arrow[d, hook, "j"'] & Catr(\mathbf{T}) \arrow[d, "j"] \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, "S"'] & Cat(\mathbf{T}) \end{tikzcd} \tag{2}$$

où S est le composé $(Alx(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{\bar{S}} Cat(\overline{\mathbf{T}}) \xrightarrow{z} Cat(\mathbf{T}))$ (la construction de $\overline{S}$ est donnée dans la preuve du Théorème 4.1). Pour la construire, il nous suffit de factoriser $\overline{S}$ par $Catr(\overline{\mathbf{T}})$ et donc de montrer que, pour tout objet $\mathcal{A}$ de $Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}})$, la $\overline{\mathbf{T}}$-catégorie $\overline{S}\mathcal{A}$ est représentable, ce qui revient à montrer que le foncteur interne $u : C\overline{S}\mathcal{A} \longrightarrow K\overline{S}\mathcal{A}$ admet un adjoint à gauche ; mais cela résulte immédiatement des constructions du Théorème 4.1, en remarquant que, quand $i : \otimes \cdot \eta_C \longrightarrow Id$ est un isomorphisme dans $\mathcal{A}$, le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} C^{\mathbf{2}} \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\partial_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & S \arrow[d, "\partial_0"] \\ C \arrow[r, "\eta_C"'] & \overline{\mathbf{T}}C \end{tikzcd}$$

et, en conséquence, il existe un isomorphisme canonique $C\overline{S}\mathcal{A} \simeq kC$ au-dessus de $K\overline{S}\mathcal{A}$. Cet isomorphisme est naturel en $\mathcal{A}$ et il produit, à son tour, un isomorphisme comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, dashed, "S'"] \arrow[d, hook, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & Catr(\mathbf{T}) \arrow[d, "V"] \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, "Kl"'] & Adal(\overline{\mathbf{T}}) \end{tikzcd} \tag{3}$$

L'équivalence cherchée va alors résulter du lemme suivant :

5.2. LEMME. Il existe un isomorphisme naturel comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} Catr(\mathbf{T}) \arrow[r, "V"] \arrow[dr, "j"'] & Adal(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[r, "U"] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[dl, "S"] \\ & Cat(\mathbf{T}) & \end{tikzcd} \tag{4}$$

PREUVE DU LEMME. Soit $\mathcal{S}$ un objet de $Catr(\mathbf{T})$. On note $j\mathcal{S} = (O, S, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$, $V\mathcal{S} = (C, K, u, l, \alpha, \beta)$ et $\widetilde{\mathcal{S}} = \overline{S}UV\mathcal{S} = (C, \widetilde{S}, \partial_0, \partial_1, \iota, \kappa)$. Il nous faut montrer que $\mathcal{S} \simeq z(\widetilde{\mathcal{S}})$, et ceci, naturellement en $\mathcal{S}$. Pour cela, on considère les deux objets commas suivants dans $Cat(\mathbf{E})$:

$$\begin{tikzcd} & P^0 \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Rightarrow}{h}"] & \\ K \arrow[rr, "l"'] & & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P^1 \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Rightarrow}{b}"] & \\ K & & C \arrow[ll, "u"] \end{tikzcd}$$

En fait, il existe une unique flèche $\gamma : P^1 \longrightarrow P^0$ (qui est un isomorphisme) telle que $\partial_0 \cdot \gamma = \partial_0$ et, dans $Hom(P^1, K)$:

$$(l \cdot \partial_0 \cdot \gamma \xrightarrow{h \cdot \gamma} \partial_1 \cdot \gamma) = (l \cdot \partial_0 \xrightarrow{l \cdot b} l \cdot u \cdot \partial_1 \xrightarrow{\beta \cdot \partial_1} \partial_1)$$

A partir de là, on vérifie qu'on a les isomorphismes :

$$S \simeq P_0^1 \overset{\gamma_0}{\simeq} P_0^0 \simeq \widetilde{S}_0$$

L'isomorphisme composé est un isomorphisme dans $Gr_O(\mathbf{T})$, c'est même un isomorphisme entre **T**-catégories. ■

Fin de la preuve du Théorème 5.1. Aux quatre 2-diagrammes (1), (2), (3), (4) signalés au cours de cette preuve, ajoutons la commutation du triangle suivant, montré au Théorème 4.1 :

$$\begin{tikzcd} & Adal(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[dr, "U"] & \\ Alx(\overline{\mathbf{T}}) \arrow[ur, "Kl"] \arrow[rr, "Id"'] & & Alx(\overline{\mathbf{T}}) \end{tikzcd} \tag{5}$$

Ils nous permettent d'écrire les isomorphismes suivants : $j \cdot S' \cdot U' \overset{(2)}{=} S \cdot j \cdot U' \overset{(1)}{=} S \cdot U \cdot V \overset{(4)}{\simeq} j$ et donc $S' \cdot U' \simeq Id$ (car $j : Catr(\mathbf{T}) \longrightarrow Cat(\mathbf{T})$ est pleinement fidèle). De même : $j \cdot U' \cdot S' \overset{(1)}{=} U \cdot V \cdot S' \overset{(3)}{\simeq} U \cdot Kl \cdot j \overset{(5)}{=} j$ et donc $U' \cdot S' \simeq Id$ (car $j : Al\tilde{x}(\overline{\mathbf{T}}) \longrightarrow Alx(\overline{\mathbf{T}})$ est pleinement fidèle). D'où l'équivalence cherchée. ■

Remarques et commentaires.

1) T. Leinster a, lui aussi, une définition de **T**-catégorie représentable (ou plutôt, en suivant sa terminologie, de **T**-multicatégorie représentable) dans ce même cadre général. Mais son concept est plus fort que celui présenté ici puisqu'il coïncide avec les multicatégories représentables de C. Hermida, dans le cas (ensembliste) où **T** est la monade "monoïdes libres". Sans doute correspond-il aux **T**-catégories représentables (en notre sens) pour lesquelles le morphisme a de l'algèbre laxe correspondante est un isomorphisme (comme le suggère T. Leinster [Lei 02]).
2) Pour définir les **T**-catégories représentables, on a eu recours à une adjonction dans la 2-catégorie $Cat(\mathbf{E})$. Pourtant, cette condition est probablement trop forte pour bien des catégories **E** (nous pensons au cas où **E** est un topos de faisceaux et aux commutations strictes qu'elle va nécessairement produire termes à termes). En un sens, elle paraît être en contradiction avec la volonté d'affaiblissement (ou plutôt ici de laxification) des structures, qui sous-tend cet article. Peut-être faudrait-il lui préférer une adjonction "implicite" (ou "locale") qui a tout-à-fait son sens dans le cadre des topos (et qui, on le sait, est lié à la théorie des champs). Il est probable qu'à l'époque, A. Joyal m'avait déjà fait part de telles réflexions, même s'il ne m'avait pas donné explicitement la définition de **T**-catégorie représentable formulée ici.

Remerciements. Je veux remercier Dominique Bourn pour ses remarques pertinentes (voir le § 2) et surtout pour m'avoir évité une erreur qui, bien que ne remettant pas en cause les conclusions du théorème 5.1, en aurait, faussement, alourdi les hypothèses. Je remercie aussi Pierre Ageron pour ses multiples et indispensables références bibliographiques qui m'ont permis de bien me situer dans la genèse des concepts introduits ici.

Bibliographie

[Bou] D. Bourn. Communication personnelle à l'auteur.

[Bun 74] M. Bunge. Coherent extensions and relational algebras. Transactions of the AMS. 197 (1974) 355–390.

[Bur 71] A. Burroni. **T**-catégories. Cahiers de top. et géom. diff. XII, 3 (1971) 215–321.

[Bur 73] A. Burroni. Structures 2-algébriques. Cahier de top. et géom. diff. XIV, 2 (1973) 165–166.

[Bur 75] A. Burroni. Pseudo-algèbres. Cahiers de top. et géom. diff. XVI, 4 (1975) 343–393.

[Gray 71] J. Gray. The Meeting of the Midwest Category Seminar in Zurich. August 24-30, 1970. Report of the Midwest Category Seminar V. LNM (Springer-Verlag) (1971) 248–255 (vol. 195).

[Her 00] C. Hermida. Representable multicategories. Adv. math. 151, 2, (2000) 164–225.

[Lam 69] J. Lambek. Deductive systems and categories (II). LNM (Springer-Verlag) 86 (1969) 76–122.

[Lei 98] T. Leinster. General operads and multicategories. math. CT/9810053 (8 oct 1998).

[Lei 02] T. Leinster. Communication personnelle à l'auteur (lors du colloque en l'honneur d'A. Burroni en sept. 2002).

Université Paris Diderot — Paris 7
UFR de Mathématiques, Case 7012, Bâtiment Chevaleret
175 rue du Chevaleret
75205 Paris cedex 13, France
Email: `penon@math.jussieu.fr`

This article may be accessed at `http://www.tac.mta.ca/tac/` or by anonymous ftp at `ftp://ftp.tac.mta.ca/pub/tac/html/volumes/22/15/22-15.{dvi,ps,pdf}`