Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2017. Том 58, № 2

УДК 517.53/55

СВЯЗЬ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ И КОГОМОЛОГИЙ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Е. В. Семенко

Аннотация. Устанавливается связь между голоморфными векторными расслоениями на компактной римановой поверхности и решением однородной краевой задачи сопряжения аналитических функций, с одной стороны, и между когомологиями и решением неоднородной задачи, с другой стороны. Установлено, что проблема построения общего решения однородной задачи для произвольного коэффициента краевого условия равнозначна задаче классификации голоморфных векторных расслоений. Решение неоднородной задачи эквивалентно анализу разрешимости 1-коциклов с коэффициентами в пучке сечений расслоения, в частности, условия разрешимости неоднородной задачи задают препятствия к разрешимости 1-коциклов, т. е. первую группу когомологий. Эта связь дает возможность использовать в теории векторных расслоений методы и результаты теории краевых задач. Полученные утверждения позволяют уточнить место теории краевых задач в общей теории римановых поверхностей.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.214

Ключевые слова: риманова поверхность, голоморфное векторное расслоение, первая группа когомологий, краевая задача на римановой поверхности.

§ 1. Введение, основные обозначения

Теория голоморфных векторных расслоений, в частности когомологий с коэффициентами в пучке сечений расслоения (см., например, [1–5]), является довольно важной частью общей теории римановых поверхностей, до сих пор привлекающей большое внимание. С другой стороны, уже довольно долгое время успешно развивается теория краевых задач сопряжения аналитических функций на римановых поверхностях (например, [6–8]). Эти два раздела теории римановых поверхностей долгое время развивались независимо друг от друга, в частности пользовались совершенно различным математическим аппаратом. Однако периодически в теории краевых задач обращалось внимание на связь между ними (см. по этому поводу, например, [9]).

Примем следующие обозначения: D — компактная риманова поверхность рода ρ; L — гладкая (не обязательно замкнутая и не обязательно связная) кривая на D; $\mathscr{U} = \{U\}$ — атлас на D. Для локальных окрестностей $U \in \mathscr{U}$, пересекающихся с L, обозначим $L_U = L \cap U$. Измельчив при необходимости атлас $\mathscr{U}$, будем без ограничения общности считать, что в плоскости локального параметра кривые L_U есть связные гладкие незамкнутые дуги.

§ 2. Векторные расслоения и однородная краевая задача

Рассмотрим на L однородную векторную краевую задачу сопряжения

$$f^+(t) = G(t)f^-(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

где $f(z)$ — искомая аналитическая в $D \setminus L$ n-мерная вектор-функция; $f^\pm(t)$, $t \in L$, — граничные значения на L функции $f(z)$ соответственно слева (f^+) и справа (f^-) по направлению обхода L; $G(t)$ — заданная на L невырожденная гёльдерова ($n \times n$)-матрица.

Лемма 1. *Для всех $U \in \mathscr{U}$ существуют невырожденные голоморфные в $U \setminus L$ матрицы $\Phi_U(z)$ такие, что $\Phi_U^+(t) = G(t)\Phi_U^-(t)$, $t \in L \cap U$.*

Замечание. Если U не пересекается с L, то матрицы $\Phi_U(z)$ можно брать любыми аналитическими и невырожденными.

Доказательство. Зафиксируем окрестность $U \in \mathscr{U}$ и перейдем в плоскость локального параметра. Чтобы при построениях не возникало проблем в концах дуги $L_U = L \cap U$, дополним ее до гладкой дуги $L_U^0 \subset \mathbb{C}$, а матрицу $G_U(t) = G(t)$, $t \in L_U$, продолжим на L_U^0 как гёльдерову, невырожденную и единичную вне окрестности L_U. Тогда [10] имеем представление

$$G_U(t) = \Phi_U^+(t)(\Phi_U^-(t))^{-1}, \quad t \in L_U^0,$$

где $\Phi_U^\pm(t)$ — граничные значения матрицы $\Phi_U(z)$, невырожденной и аналитической в $\mathbb{C} \setminus L_U^0$ (в бесконечности столбцы Φ_U имеют полюсы или нули, порядки которых равны частным индексам матрицы $G_U(t)$ на L_U^0). Значит, в исходной переменной (на римановой поверхности) $z \in U \subset D$ матрица $\Phi_U(z)$ аналитична и невырожденна в $U \setminus L$ и $\Phi_U^+(t) = G(t)\Phi_U^-(t)$, $t \in L \cap U$. Лемма доказана.

Далее Φ_U будем называть *локальными решениями краевой задачи.*

Введем матрицы перехода $G_{UV} = \Phi_U^{-1}\Phi_V$, $z \in U \cap V$, $U, V \in \mathscr{U}$. При $t \in L \cap U \cap V$ имеем

$$G_{UV}^+(t) = (\Phi_U^+(t))^{-1}\Phi_V^+(t) = (\Phi_U^-(t))^{-1}(G(t))^{-1}G(t)\Phi_V^-(t) = G_{UV}^-(t),$$

т. е. матрицы G_{UV} аналитичны и невырожденны в $U \cap V$. Очевидно, $G_{UU} = E$, $G_{UV} \cdot G_{VW} = G_{UW}$, $z \in U \cap V \cap W$, $U, V, W \in \mathscr{U}$, т. е. матрицы перехода задают векторное голоморфное n-мерное расслоение над D [1, 2]. Это расслоение будем называть *расслоением решений краевой задачи* и обозначать через $E(G)$.

Отметим, что расслоение $E(G)$ зависит, вообще говоря, от выбора локальных решений Φ_U. Однако если выбрать другие локальные решения H_U, т. е. $G(t) = \Phi_U^+(\Phi_U^-)^{-1} = H_U^+(H_U^-)^{-1}$, то для $\Psi_U = \Phi_U^{-1}H_U$ имеем

$$\Psi_U^+ = (\Phi_U^+)^{-1}H_U^+ = (\Phi_U^-)^{-1}H_U^- = \Psi_U^-,$$

т. е. Ψ_U голоморфны (и невырожденны) в U. При этом

$$H_U^{-1}H_V = \Psi_U\Phi_U^{-1}\Phi_V\Psi_V^{-1} = \Psi_U G_{UV}\Psi_V^{-1},$$

т. е. расслоения с матрицами перехода G_{UV} и $H_U^{-1}H_V$ эквивалентны [1, 2]. Таким образом, различный выбор локальных решений приводит к эквивалентным расслоениям.

Граничные коэффициенты $G_1(t)$ и $G_2(t)$ будем называть *эквивалентными*, если существует голоморфная в $D \setminus L$ невырожденная матрица-функция $H(z)$ такая, что

$$G_1(t) = (H^+(t))^{-1}G_2(t)H^-(t), \quad t \in L. \tag{2}$$

Лемма 2. *Расслоения $E(G_1)$ и $E(G_2)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквиваленты граничные коэффициенты G_1 и G_2.*

Доказательство. Если расслоения $E(G_1)$ и $E(G_2)$ эквивалентны, т. е. для их матриц перехода G^j_{UV}, $j=1,2$, имеем $G^1_{UV}=\Psi_U G^2_{UV}\Psi_V^{-1}$, где матрицы Ψ_U голоморфны и невырожденны в U, то в силу $G^j_{UV}=\big(\Phi^j_U\big)^{-1}\Phi^j_V$, $j=1,2$, для локальных решений задачи Φ^j_U, $j=1,2$ получим

$$\big(\Phi^1_U\big)^{-1}\Phi^1_V=\Psi_U\big(\Phi^2_U\big)^{-1}\Phi^2_V\Psi_V^{-1},$$

откуда

$$\Phi^2_U\Psi_U^{-1}\big(\Phi^1_U\big)^{-1}=\Phi^2_V\Psi_V^{-1}\big(\Phi^1_V\big)^{-1}.$$

Последнее равенство означает, что если ввести матрицы $H_U=\Phi^2_U\Psi_U^{-1}\big(\Phi^1_U\big)^{-1}$, $z\in U$, то $H_U(z)=H_V(z)$, $z\in U\cap V$, т. е. матрица $H(z)=H_U(z)$, $z\in U$, однозначна в $D\setminus L$. Очевидны аналитичность и невырожденность $H(z)$. Наконец, при $t\in L\cap U$

$$H^+(t)=\Phi^{2+}_U(t)\Psi_U^{-1}(t)\big(\Phi^{1+}_U(t)\big)^{-1}=G_2(t)\Phi^{2-}_U(t)\Psi_U^{-1}(t)\big(\Phi^{1-}_U(t)\big)^{-1}(G_1(t))^{-1}$$
$$=G_2(t)H^-(t)(G_1(t))^{-1},$$

т. е. выполнено условие (2) $H^+(t)G_1(t)=G_2(t)H^-(t)$.

Обратно, пусть выполнено (2). Для матриц перехода $G^j_{UV}=\big(\Phi^j_U\big)^{-1}\Phi^j_V$, $j=1,2$, очевидно, имеем

$$G^1_{UV}=\Psi_U G^2_{UV}(\Psi_V)^{-1},\quad \Psi_U=\big(\Phi^1_U\big)^{-1}H^{-1}\Phi^2_U. \tag{3}$$

Матрицы $\Psi_U(z)$ аналитичны и невырожденны в $U\setminus L$. При этом если $t\in L\cap U$, то с учетом условия (2), т. е. $H^+(t)=G_2(t)H^-(t)(G_1(t))^{-1}$, получим

$$\Psi^+_U(t)=\big(\Phi^{1+}_U\big)^{-1}(t)(H^+(t))^{-1}\Phi^{2+}_U(t)$$
$$=\big(\Phi^{1-}_U\big)^{-1}(t)(G_1(t))^{-1}G_1(t)(H^-(t))^{-1}(G_2(t))^{-1}G_2(t)\Phi^{2-}_U(t)=\Psi^-_U(t),$$

т. е. матрицы $\Psi_U(z)$ аналитичны в U, а тогда равенство (3) означает, что расслоения $E(G_1)$ и $E(G_2)$ эквивалентны. Лемма доказана.

Итак, по краевому коэффициенту $G(t)$ можно всегда однозначно с точностью до эквивалентности построить векторное расслоение $E(G)$. Покажем, что и, обратно, любое векторное расслоение можно считать расслоением решений краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть E — голоморфное векторное расслоение. Тогда существует граничный коэффициент $G(t)$ такой, что $E=E(G)$.*

Доказательство. Пусть G_{UV} — матрицы перехода расслоения E. Фактически необходимо построить голоморфное в $D\setminus L$, непрерывное (класса Гёльдера) вплоть до границы L и невырожденное матричное сечение расслоения E, т. е. такие невырожденные, голоморфные в $U\setminus L$ и непрерывные вплоть до L матрицы $\Psi_U(z)$, что $\Psi_U=G_{UV}\Psi_V$, $z\in U\cap V$. Действительно, взяв в качестве краевого коэффициента $G(t)=(\Psi^+_U(t))^{-1}\Psi^-_U(t)$, $t\in L$, а в качестве локальных решений $\Phi_U=\Psi_U^{-1}$, получим, что $G_{UV}=\Phi_U^{-1}\Phi_V$, т. е. $E=E(G)$. Здесь однозначность $G(t)$ на L обеспечивается условиями перехода:

$$(\Psi^+_U(t))^{-1}\Psi^-_U(t)=(\Psi^+_V(t))^{-1}G_{UV}^{-1}G_{UV}\Psi^-_V(t)=(\Psi^+_V(t))^{-1}\Psi^-_V(t).$$

Лемма 3. *Существует голоморфное в $D \setminus L$, непрерывное по Гёльдеру вплоть до L и невырожденное матричное сечение расслоения E.*

Доказательство. Отметим, что $D \setminus L$ есть поверхность с краем, причем край $\partial(D \setminus L) = L^+ \cup L^-$ состоит из двух экземпляров L, так что от L^+ область расположена слева (граничные значения $f^+(t)$), а от L^- — справа (граничные значения $f^-(t)$). Утверждение леммы есть, в сущности, частный случай хорошо известной идеи, что на поверхности с краем все неприятности можно «загнать за край» (см. для сравнения лемму 6).

Область $D \setminus L$ не обязательно связная, скажем, в классическом случае задачи сопряжения она состоит из двух связных компонент D^+ и D^-. Таким образом, утверждение леммы следует доказать для любой компоненты связности $D \setminus L$. Пусть D_1^+ — произвольная компонента связности $D \setminus L$ с краем $L_1 = \partial D_1^+$. Слегка расширив множество $D_1^+ \cup L_1$, например, симметрично приклеив к L_1 малые окрестности точек края по другую сторону от D_1^+, получим, что $D_1^+ \cup L_1$ лежит внутри некомпактной римановой поверхности $\widetilde{D}_1$. Поскольку матрицы перехода G_{UV} голоморфны в $U \cap V$, в том числе в окрестности L_1, их тоже можно считать заданными на $\widetilde{D}_1$, т. е. на $\widetilde{D}_1$ задано голоморфное векторное расслоение E_1, матрицы перехода которого совпадают с G_{UV} в $D_1^+ \cup L_1$. Но [1, § 30, предложение 30.4], всякое голоморфное векторное расслоение над некомпактной римановой поверхностью голоморфно тривиально, т. е. существует матричное невырожденное голоморфное сечение $\Psi_U(z)$ расслоения E_1 в $\widetilde{D}_1$. По построению матрицы $\Psi_U(z)$ бесконечно дифференцируемы в $(D_1^+ \cup L_1) \cap U$, т. е. заведомо удовлетворяют условиям леммы.

Лемма 3, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Итак, при заданной кривой L имеем соответствие между голоморфными векторными расслоениями E и коэффициентами краевого условия $G(t)$: $E \leftrightarrow G$.

Теорема 2. 1. *С точностью до эквивалентности соответствие $E \leftrightarrow G$ взаимно однозначно.*

2. *Для $E = E(G)$ имеется каноническое соответствие между решениями однородной краевой задачи и сечениями расслоения E. При этом голоморфным/мероморфным сечениям канонически соответствуют голоморфные/мероморфные решения однородной задачи.*

Доказательство. Утверждение 1 теоремы есть, по сути, лемма 2. Рассмотрим утверждение 2. Будем обозначать сечения E через $\varphi = \{\varphi_U\}$, а решения задачи (1) — через $f(z)$. Упомянутое в теореме соответствие имеет вид $\varphi_U = \Phi_U^{-1} f$, где Φ_U — локальные решения краевой задачи. Действительно, очевидно, что если $f(z)$ есть решение однородной задачи, то $\varphi_U = \Phi_U^{-1} f$ будет сечением расслоения $E(G)$, и обратно, если φ_U — сечение расслоения $E(G)$, то $f = \Phi_U \varphi_U$ — однозначное вне L решение однородной задачи. Теорема доказана.

Теорема 2 фактически означает, что метод решения однородной задачи (1) автоматически задает классификацию векторных расслоений с точностью до эквивалентности, равно как и классификация расслоений дает возможность строить решения однородной краевой задачи.

Для одномерной краевой задачи, как известно [8, 9], классы эквивалентности функций $G(t)$ задаются ее индексом, т. е. целым числом $\kappa \in \mathbb{Z}$, и элементом группы Якоби $a \in \mathrm{Jac}(D)$. При этом дивизоры всех мероморфных решений задачи (1) эквивалентны и имеют те же координаты (κ, a) (см., например, [8, 9]).

Отсюда, в частности, следует известное утверждение, что любое линейное расслоение эквивалентно расслоению дивизора. Конечно, для заданного расслоения отдельной проблемой является вычисление координат расслоения или, что практически то же самое, вычисление краевого коэффициента $G(t)$, соответствующего данному расслоению. Однако если этот коэффициент известен, то указанное соответствие решений однородной задачи и сечений расслоения дает удобные для изучения представления сечений расслоения, что, в частности, было продемонстрировано на примере мультипликативных функций и дифференциалов Прима в [9].

С другой стороны, для векторной краевой задачи на плоскости (т. е. на римановой сфере) известно, что если L разделяет плоскость на две части $\mathbb{C}^{\pm}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}^{+} \cup \mathbb{C}^{-} \cup L$, $\infty \in \mathbb{C}^{-}$, $0 \in \mathbb{C}^{+}$, то любую матрицу $G(t)$ можно представить в виде [10]

$$G(t) = \Psi^{+}(t) \cdot \operatorname{diag}(t^{\kappa_1}, \dots , t^{\kappa_n}) \cdot (\Psi^{-}(t))^{-1}, \quad t \in L,$$

где $\Psi^{\pm}(t)$ — граничные значения невырожденных голоморфных в $\mathbb{C}^{\pm}$ матриц $\Psi^{\pm}(z)$, $\kappa_1, \dots , \kappa_n$ — частные индексы матрицы $G(t)$. Это означает, что любой коэффициент краевой задачи эквивалентен диагональной матрице $\operatorname{diag}(t^{\kappa_1}, \dots , t^{\kappa_n})$. С точки зрения расслоений это дает теорему Гротендика [11]: *любое векторное расслоение над римановой сферой эквивалентно прямой сумме линейных расслоений*. Здесь частные индексы выступают как единственные инвариантные (с точностью до эквивалентности) характеристики линейных расслоений, поскольку род поверхности равен нулю, т. е. группа Якоби тривиальна.

Отметим, что в общем случае задача построения решений векторной краевой задачи сопряжения и соответственно задача классификации векторных расслоений до сих пор не решены.

§ 3. Группы когомологий и неоднородная краевая задача

Пусть E — векторное голоморфное расслоение с матрицами перехода $G_{UV}(z)$, $z \in U \cap V$, $U, V \in \mathscr{U}$. Рассмотрим группы (по сложению) локальных голоморфных вектор-функций

$$X_0 = \{f = \{f_U(z), z \in U, U \in \mathscr{U}\}\};$$

$$X_1 = \{g = \{g_{UV}(z), z \in U \cap V, U, V \in \mathscr{U}\}\};$$

$$X_2 = \{h = \{h_{UVW}(z), z \in U \cap V \cap W, U, V, W \in \mathscr{U}\}\}$$

(X_j — группы j-коцепей, $j = 0, 1, 2$ [1, 2]) и кограничные гомоморфизмы $\delta_j : X_j \to X_{j+1}$, $j = 0, 1$, заданные следующим образом:

$$\delta_0(f) = \{G_{UV} f_V - f_U\} = \{g_{UV}\} = g;$$

$$\delta_1(g) = \{G_{UV} g_{VW} - g_{UW} + g_{UV}\} = \{h_{UVW}\} = h.$$

Группы $\ker \delta_j$ называются *группами j-коциклов*, а группы $\operatorname{Im} \delta_j$ — *группами $(j+1)$-кограниц* (или *группами разрешимых $(j+1)$-коциклов*) с коэффициентами в пучке сечений расслоения E, $j = 0, 1$ [2]. Очевидно, что группу 0-коциклов образуют сечения расслоения E, а $\operatorname{Im} \delta_0 \subset \ker \delta_1$. Фактор-группа $\ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0 = H^1(E)$ есть первая группа когомологий с коэффициентами в пучке сечений расслоении E [1, 2]. Точнее говоря, группа $H^1(E)$ есть индуктивный предел указанных фактор-групп при неограниченном измельчении атласа, при этом $H^1(E)$ можно вычислять при заданном достаточно мелком атласе [1]. Далее группу $H^1(E)$ для краткости будем просто называть *группой когомологий.*

Теперь обратимся к неоднородной векторной краевой задаче

$$f^+(t) = G(t)f^-(t) + g(t), \quad t \in L,\ g(t) \in C^\alpha(L). \tag{4}$$

Введем пространство правых частей $g(t)$, для которых задача (4) имеет решение $Y_0 = \{g(t) = f^+(t) - G(t)f^-(t)\}$, где $f^\pm(t)$ — граничные значения голоморфной в $D \setminus L$ вектор-функции $f(z)$. Рассмотрим фактор-пространство $H^1(G) = C^\alpha(L)/Y_0$. Пространство $H^1(G)$ так или иначе всегда возникает при исследовании неоднородной задачи, в частности, его размерность есть число условий разрешимости задачи.

Теорема 3. *Пусть коэффициент $G(t)$ соответствует расслоению E, т. е. $E = E(G)$. Тогда группа $H^1(G)$ (по сложению) и группа $H^1(E)$ изоморфны.*

Доказательство. В ходе доказательства построим каноническое соответствие между правыми частями $g(t)$ и 1-коциклами $\{g_{UV}\}$.

Лемма 4. *Любой набор локальных решений $g_U^\pm(z)$, $z \in U$, $U \in \mathscr{U}$, задачи* (4)*: $g_U^+(t) = G(t)g_U^-(t) + g(t)$, $t \in L_U = U \cap L$, имеет вид*

$$g_U(z) = \Phi_U(z)S_U((\Phi_U^+(t))^{-1}g(t) \mid z) + \Phi_U(z)f_U(z), \quad f = \{f_U\} \in X_0,$$

где $\Phi_U(z)$, $z \in U$, — локальные матричные решения однородной задачи, построенные в лемме 1, *$S_U(h(t) \mid z)$ — сингулярный интеграл типа Коши в плоскости локального параметра:*

$$S_U(h(t) \mid z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_U} \frac{h(t)}{t - z}\, dt.$$

Замечание. Если $U \cap L = \varnothing$, то в качестве g_U можно взять произвольные голоморфные в U вектор-функции.

Доказательство. Зафиксируем $U \in \mathscr{U}$ и перейдем в плоскость локального параметра. Поскольку (см. лемму 1) $G(t) = \Phi_U^+(t)(\Phi_U^-(t))^{-1}$, $t \in L_U$, краевое условие принимает вид

$$f^+(t) = \Phi_U^+(t)(\Phi_U^-(t))^{-1}f^-(t) + g(t)$$

или

$$(\Phi_U^+(t))^{-1}f^+(t) = (\Phi_U^-(t))^{-1}f^-(t) + (\Phi_U^+(t))^{-1}g(t), \quad t \in L_U.$$

Отсюда при $z \in U$ имеем

$$(\Phi_U(z))^{-1}f(z) = S_U((\Phi_U^+(t))^{-1}g(t) \mid z) + f_U(z),$$

где $f_U(z)$ голоморфна в U, откуда и следует непосредственно утверждение леммы.

Следствие. *Для любого атласа $\mathscr{U}$ существует семейство локальных решений неоднородной задачи $\{g_U, U \in \mathscr{U}\}$.*

Продолжение доказательства теоремы 3. Построим соответствие $g(t) \in C^\alpha(L) \to \{g_{UV}\} \in \ker\delta_1$. Для атласа $\mathscr{U}$ возьмем (произвольно) семейство локальных решений неоднородной задачи $g_U(z)$ и положим $g_{UV} = \Phi_U^{-1}(g_U - g_V)$, $z \in U \cap V$, $U, V \in \mathscr{U}$. В силу краевых условий при $t \in L \cap U \cap V$ имеем

$$\begin{aligned} g_{UV}^+(t) = (\Phi_U^+(t))^{-1}(g_U^+(t) - g_V^+(t)) = (\Phi_U^+(t))^{-1} \cdot G(t) \cdot (g_U^-(t) - g_V^-(t)) \\ = (\Phi_U^-(t))^{-1}(g_U^-(t) - g_V^-(t)) = g_{UV}^-(t), \end{aligned}$$

т. е. функции g_{UV} аналитичны в $U \cap V$. Далее, поскольку $E = E(G)$, матрицы перехода имеют вид $G_{UV} = \Phi_U^{-1}\Phi_V$, откуда

$$g_{UV} + G_{UV} g_{VW} = \Phi_U^{-1}(g_U - g_V) + \big(\Phi_U^{-1}\Phi_V\big)\Phi_V^{-1}(g_V - g_W) = \Phi_U^{-1}(g_U - g_W) = g_{UW},$$

т. е. $\{g_{UV}\} \in \ker \delta_1$.

Построенное отображение $g(t) \to \{g_{UV}\}$ и есть упоминавшееся каноническое соответствие между правыми частями $g(t)$ и 1-коциклами $\{g_{UV}\}$.

Используя представление леммы 4, получим

$$\begin{aligned} g_{UV} = \Phi_U^{-1}(\Phi_U S_U((\Phi_U^+(t))^{-1} g(t)) \\ + \Phi_U f_U - \Phi_V S_V((\Phi_V^+(t))^{-1} g(t) \mid z) - \Phi_V f_V(z)) \\ = g_{UV}^0 + f_U - G_{UV} f_V, \quad f = \{f_U\} \in X_0, \end{aligned}$$

$$g_{UV}^0 = S_U((\Phi_U^+(t))^{-1} g(t)) - G_{UV} S_V((\Phi_V^+(t))^{-1} g(t)).$$

Последнее равенство означает, что по $g(t)$ 1-коцикл $\{g_{UV}\}$ определяется не однозначно, а с точностью до 1-кограниц $\{f_U - G_{UV} f_V\} \in \operatorname{Im}\delta_0$. После факторизации по кограницам получим однозначное отображение $\varphi : g(t) \in C^\alpha(L) \to H^1(E)$.

Лемма 5. $\ker \varphi = Y_0$.

Доказательство. Если $g(t) \in Y_0$, т. е. $g(t) = f^+(t) - G(t) f^-(t)$, то в качестве локальных решений можно взять $g_U(z) = f(z)$, откуда $\varphi(g) = \{g_{UV}\} = \big\{\Phi_U^{-1}(g_U - g_V)\big\} = 0$. Обратно, если

$$\varphi(g) = \big\{g_{UV} = \Phi_U^{-1}(g_U - g_V)\big\} = 0 \in H^1(E),$$

т. е. $\{g_{UV}\} = \{f_U - G_{UV} f_V\} \in \operatorname{Im}\delta_0$, то для локальных решений $h_U = g_U - \Phi_U f_U$ в силу $g_{UV} = \Phi_U^{-1}(g_U - g_V)$ имеем

$$\begin{aligned} h_U = g_U - \Phi_U f_U = g_V + \Phi_U \cdot g_{UV} - \Phi_U f_U \\ = g_V + \Phi_U(f_U - G_{UV} f_V) - \Phi_U f_U = g_V - \Phi_V f_V = h_V, \end{aligned}$$

т. е. $h(z) = h_U(z)$, $z \in U$, есть однозначная вектор-функция в $D \setminus L$, причем

$$g(t) = h_U^+(t) - G(t) h_U^-(t) = h^+(t) - G(t) h^-(t) \in Y_0.$$

Окончание доказательства теоремы 3. Из леммы 5 следует, что отображение φ индуцирует взаимно однозначное отображение $\varphi_0 : H^1(G) \to H^1(E)$. Осталось только показать, что $\operatorname{Im}\varphi_0 = H^1(E)$, т. е. для любого 1-коцикла $\{g_{UV}\}$ существует функция $g(t)$, $t \in L$, такая, что $\{g_{UV}\} = \varphi(g)$. Для этого на поверхности с краем $D \setminus L$ достаточно построить аналитические и непрерывные (класса Гёльдера) вплоть до границы (но не непрерывные на L) функции $f_U(z)$, $z \in U$, такие, что $g_{UV} = f_U - G_{UV} f_V$. Действительно, тогда при $t \in L_U$ имеем

$$\begin{aligned} f_U^+(t) - f_U^-(t) = g_{UV}(t) + G_{UV}(t) f_V^+(t) - g_{UV}(t) - G_{UV}(t) f_V^-(t) \\ = G_{UV}(f_V^+(t) - f_V^-(t)) \end{aligned}$$

и, введя функцию $g_U(t) = \Phi_U^+(t)(f_U^+(t) - f_U^-(t))$, при $t \in L \cap U \cap V$ получим

$$g_U(t) = \Phi_U^+(t) G_{UV}(t)(f_V^+(t) - f_V^-(t)) = \Phi_V^+(t)(f_V^+(t) - f_V^-(t)) = g_V(t),$$

т. е. $g(t) = g_U(t)$, $t \in L_U$, — однозначная функция на L. При этом для функций $g_U = \Phi_U f_U$ будет

$$g_U^+(t) - G(t) g_U^-(t) = \Phi_U^+(t) f_U^+(t) - \Phi_U^+(t)(\Phi_u^-(t))^{-1} \Phi_U^-(t) f_U^-(t) = g(t), \quad t \in L_U,$$

т. е. $g_U(z)$ есть локальные решения неоднородной задачи с правой частью $g(t)$, причем

$$\Phi_U^{-1}(g_U - g_V) = \Phi_U^{-1}(\Phi_U f_U - \Phi_V f_V) = f_U - G_{UV} f_V = g_{UV},$$

т. е. $\{g_{UV}\} = \varphi(g)$.

Очевидно, существование f_U таких, что $g_{UV} = f_U - G_{UV} f_V$, нужно доказать для каждой компоненты связности $D \setminus L$.

Лемма 6. *Пусть D_1 — компонента связности $D \setminus L$ с границей L_1. Тогда существует 0-коцепь $\{f_U, z \in U \cap D_1\}$ такая, что $g_{UV} = f_U - G_{UV} f_V$, $z \in U \cap V \cap (D_1 \cup L_1)$.*

Доказательство. Эта лемма — еще один вариант общей идеи, что на поверхности с краем все проблемы, в данном случае проблемы «коциклического характера», можно «загнать за край» (см. для сравнения лемму 3).

Как и в лемме 3, слегка расширим $D_1 \cup L_1$ до некомпактной римановой поверхности $\widetilde{D}_1$, в которой заданы функции перехода G_{UV} и 1-коцикл $\{g_{UV}\}$, совпадающие с исходными в $D_1 \cup L_1$. Используя лемму 3, построим в $\widetilde{D}_1$ невырожденное матричное сечение Ψ_U расслоения E: $\Psi_U = G_{UV} \Psi_V$. Введем функции $g_{UV}^1 = \Psi_U^{-1} g_{UV}$. Тогда

$$\begin{aligned} g_{VW}^1 - g_{UW}^1 + g_{UV}^1 &= \Psi_V^{-1} g_{VW} - \Psi_U^{-1} g_{UW} + \Psi_U^{-1} g_{UV} \\ &= \Psi_U^{-1}(G_{UV} g_{VW} - g_{UW} + g_{UV}) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $\{g_{UV}^1\}$ есть 1-коцикл для тривиального (матрицы G_{UV}^1 единичные) расслоения. Но на некомпактной римановой поверхности первая группа когомологий тривиальна [1, § 26, предложение 26.1], т. е. существуют голоморфные в $\widetilde{D}_1$ функции f_U^1, $z \in U \cap \widetilde{D}_1$, такие, что $g_{UV}^1 = f_U^1 - f_V^1$. Тогда для функций $f_U = \Psi_U f_U^1$ имеем

$$f_U - G_{UV} f_V = \Psi_U f_U^1 - G_{UV} \Psi_V f_V^1 = \Psi_U \big(f_U^1 - f_V^1\big) = \Psi_U g_{UV}^1 = g_{UV}.$$

Лемма 6 доказана, а вместе с ней окончательно доказана и теорема 3.

Отметим, что фактически при доказательстве теоремы 3 построены изоморфизм $H^1(G)$ и группы $\ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0$. Отсюда, в частности, следует уже упоминавшееся утверждение, что при любом достаточно мелком атласе группы $\ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0$ изоморфны, $\ker \delta_1 / \operatorname{Im} \delta_0 = H^1(E)$.

В ходе доказательства теоремы 3 установлено соответствие между 1-коциклами $\{g_{UV}\}$ и правыми частями краевого условия $g(t)$, которое индуцирует изоморфизм первой группы когомологий $H^1(E)$, т. е. группы «препятствий для разрешимости 1-коциклов», и пространства $H^1(G)$, т. е. пространства «препятствий для разрешимости краевой задачи». В частности, размерность (число образующих) первой группы когомологий равна числу условий разрешимости краевой задачи. Вообще анализ группы 1-коциклов очевидным образом сводится к решению неоднородной краевой задачи, равно как и наоборот.

В качестве примера обратимся к одномерному случаю. Неоднородная краевая задача сопряжения для функций достаточно хорошо изучена (см., например, [8]). В частности, установлено, что условия разрешимости задачи есть условия ортогональности

$$\int\limits_L g(t)w^+(t) = 0,$$

где $w(z)$ есть общее решение так называемой союзной задачи: однородной задачи с коэффициентом $G^{-1}(t)$ в классе дифференциалов. Это, очевидно, означает, что пространство $H^1(G)$ изоморфно как двойственное пространству решений союзной задачи. Но, в свою очередь, решения союзной задачи канонически соответствуют сечениям союзного расслоения E^* [9], т. е. в итоге получим, что первая группа когомологий $H^1(E)$ канонически как двойственное пространство изоморфна группе сечений союзного расслоения. Наконец, интеграл

$$\int\limits_L g(t)w^+(t)$$

есть билинейная форма над функциями $g(t) \in C^\alpha(L)$ и решениями союзной задачи $w(z)$. Если, используя канонические соответствия между функциями $g(t)$ и коциклами $\{g_{UV}\}$ и между дифференциалами $w(z)$ и сечениями союзного расслоения E^*, переписать этот интеграл в терминах 1-коциклов для расслоения E и сечений расслоения E^*, то он задает билинейную форму, определяющую упомянутую двойственность между $H^1(E)$ и группой сечений расслоения E^*.

Как простую иллюстрацию описанной двойственности рассмотрим абелевы интегралы 1-го рода на римановой поверхности. Очевидно и хорошо известно, что каждому абелеву интегралу канонически соответствует 1-коцикл с коэффициентами в пучке сечений тривиального расслоения и функциями $g_{UV} = \mathrm{const}$. Возьмем, как в [9], кривую

$$L = \bigcup_{j=1}^{\rho} (a_j \cup b_j),$$

где a_j, b_j, $j = \overline{1, \rho}$, — базис гомотопической группы поверхности D. Разрезав поверхность D вдоль кривой L, получим односвязную область $\widetilde{D}$, которую геометрически можно реализовать как фундаментальный многоугольник фуксовой группы первого рода [9]. На рис. 1 (слева и справа) изображена часть L, соответствующая кривым a_j, b_j.

Рис. 1. Краевые значения абелева интеграла.

Пусть $w(z)$ — абелев дифференциал первого рода на D, тогда абелев интеграл в области $\widetilde{D}$ имеет вид

$$f(z) = C + \int\limits_{z_0}^{z} w, \quad C = \mathrm{const},$$

пусть для определенности $z_0 \notin L$. Вычисление граничных значений $f^{\pm}(t)$ при $t \in a_j$ изображено в левой части рис. 1:

$$f^{+}(t) = C + \int\limits_{L_+} w, \quad f^{-}(t) = C + \int\limits_{L_-} w,$$

откуда

$$f^{+}(t) - f^{-}(t) = \int\limits_{[AB]} w,$$

где $[AB]$ — отрезок L, соединяющий точки A и B. Очевидно,

$$\int\limits_{[AB]} w = \int\limits_{b_j} w = g_{bj}$$

есть период дифференциала w вдоль b_j. Совершенно аналогично (правая часть рис. 1) получим, что при $t \in b_j$

$$f^{+}(t) - f^{-}(t) = \int\limits_{a_j^{-1}} w = -\int\limits_{a_j} w = -g_{aj}.$$

Итак, для абелева интеграла имеем краевую задачу о скачке с кусочно постоянной правой частью:

$$f^{+}(t) = f^{-}(t) + g(t), \quad g(t) = \begin{cases} g_{bj}, & t \in a_j, \\ -g_{aj}, & t \in b_j, \end{cases}, \quad j = \overline{1, \rho},$$

где

$$g_{aj} = \int\limits_{a_j} w, \quad g_{bj} = \int\limits_{b_j} w, \quad j = \overline{1, \rho},$$

суть периоды абелева дифференциала. Однородная задача здесь, очевидно, имеет общее решение $f^{\pm}(z) = C = \mathrm{const}$, а общее решение однородной союзной задачи составляют абелевы дифференциалы 1-го рода, число которых, как известно, равно роду поверхности. Отсюда сразу получаем известные утверждения, что размерность (число образующих) первой группы когомологий (для тривиального расслоения) равна роду ρ, а сама эта группа канонически изоморфна пространству абелевых дифференциалов 1-го рода.

Условия разрешимости в данном случае имеют вид условий на периоды:

$$\sum_{j=1}^{\rho} \left(g_{bj} \int\limits_{a_j} w_k(t) - g_{aj} \int\limits_{b_j} w_k(t) \right) = 0, \quad k = \overline{1, \rho},$$

где w_k, $k = \overline{1, \rho}$, — базис абелевых дифференциалов 1-го рода. Отсюда сразу следует еще одно известное утверждение, что из 2ρ периодов абелева дифференциала ровно ρ можно задавать произвольно, а остальные определяются однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
2. *Gunning R. C.* Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.
3. *Gunning R. C.* Lectures on Riemann surfaces: Jacobi varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1972. (Princeton Math. Notes; V. 12).
4. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1971. (Grad. Text's Math.; V. 71).
5. *Чуешев В. В.* Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 629–636.
6. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровых классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.
7. *Монахов В. Н., Верховод Д. Б., Семенко Е. В.* Краевые задачи для квазианалитических функций на компактных римановых поверхностях. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1990.
8. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. М.: Физматлит, 2003.
9. *Семенко Е. В.* Представление дифференциалов Прима как решений краевых задач на римановых поверхностях // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 157–170.
10. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Гостехиздат, 1950.
11. *Grothendieck A.* Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann // Amer. J. Math. 1957. V. 79, N 1. P. 121–138.

Статья поступила 25 марта 2016 г.

Семенко Евгений Вениаминович
Новосибирский гос. педагогический университет,
ул. Вилюйская, 28, Новосибирск 630126
semenko54@gmail.com