Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.54

О ГРУППАХ, ПОРЯДКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОТОРЫХ ДЕЛЯТ 6 И 7

В. Го, А. С. Мамонтов

Аннотация. Доказано, что группа, порядки элементов которой делят 6 и 7, либо локально конечна, либо является расширением 2-группы посредством группы без инволюций.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.109

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, спектр.

Группой периода n называется группа, в которой выполняется тождество $x^n = 1$. Наименьший период группы называется ее *экспонентой*. *Спектром* периодической группы G называется множество $\omega(G)$ порядков ее элементов; $\mu(G)$ обозначает множество максимальных относительно делимости элементов из $\omega(G)$.

В обзоре [1], посвященном изучению периодических групп с заданным спектром, стоит вопрос о локальной конечности групп с $\omega(G) = \{1, 2, 3, 6, p\}$, где p простое. Вопрос имеет положительное решение для $p \in \{2, 3\}$ [2] и $p = 5$ [3] и открыт для остальных p. В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть* $\mu(G) = \{6, 7\}$. *Тогда группа* G *либо локально конечна, либо является расширением нетривиальной элементарной абелевой 2-группы посредством группы без инволюций.*

В предложении 1 описаны локально конечные группы G с $\mu(G) = \{6, 7\}$.

Следующие вопросы открыты.

1. Является ли группа G с $\mu(G) = \{3, 7\}$ локально конечной?

2. Будет ли группа периода 7, действующая без неподвижных точек на нетривиальной элементарной абелевой p-группе, где $p \in \{2, 3\}$, циклической? Для групп периода 5 ответ на аналогичный вопрос положителен [4].

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

Для простого числа p через $O_p(G)$ обозначим произведение всех нормальных p-подгрупп из G, через $O_{p,q}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_q(G/O_p(G))$, а через $C_G(x)$ — централизатор элемента x в группе G. Говоря о вычислениях, имеем в виду вычисления в GAP по алгоритму перечисления смежных классов [5].

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке NNSF-гранта Китая (грант № 11371335) и Wu Wen-Tsun Key Laboratory of Mathematics, USTC, Chinese Academy of Sciences.

Предложение 1. *Пусть $\mu(G) = \{6, 7\}$ и G локально конечна. Тогда $G = NC$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $N = O_7(G)$ — нетривиальная элементарная абелева группа, C — циклическая группа порядка 6, действующая свободно на N;

(2) $N = O_2(G) \times O_3(G)$, C — циклическая группа порядка 7, действующая свободно на N.

Доказательство. Пусть a, b — элементы из G порядков 6 и 7 соответственно и $F = \langle a, b\rangle$. По условию F конечна, согласно [6] является либо группой Фробениуса, либо двойной группой Фробениуса. В последнем случае $F = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы группы G; AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно.

Заметим, что $|B|$ не делится на 7. Предположим противное. Тогда B циклическая порядка 7. Если $(|A|, |C|) = 1$, то $6 \notin \omega(F)$; противоречие. Группа C циклическая, поэтому если $(|A|, |C|) \neq 1$, то по лемме Мазурова [7, лемма 6] она содержит элемент порядка 4 или 9; противоречие.

Таким образом, возможны только следующие случаи:

(а) $F = N_0C$, где $N_0 = O_7(F)$ — нетривиальная элементарная абелева группа, C циклическая порядка 6;

(б) $F = HC_7$, где H — нормальная нильпотентная $\{2, 3\}$-группа, C_7 — циклическая порядка 7, действующая свободно на H.

Пусть имеет место случай (а). Тогда $N = C_G(N_0)$ является 7-группой, на которой свободно действует группа C, содержащая инволюцию. Поэтому N — абелева группа. Пусть $H = NC$. Покажем, что $H = G$. Пусть $g \in G$, $F_1 = \langle F, g\rangle$. Тогда F_1 — конечная группа и $F_1 = O_7(F_1)C$, где $O_7(F_1)$ абелева. Очевидно, $N_0 \leq O_7(F_1) \leq N$, поэтому $F_1 \leq NC = H$. Отсюда $g \in H$ и $H = G$ удовлетворяет п. (1) заключения предложения.

Аналогично доказывается, что в случае (б) $C_G(O_2(H))C_7 = G$ удовлетворяет п. (2) заключения предложения. Предложение доказано.

Далее будем считать, что $\mu(G) = \{6, 7\}$. Запись $x \sim y$ обозначает, что элементы x и y имеют одинаковые порядки в группе. Например, $xy \sim yx$. Пусть $\Gamma_n = \Gamma_n(G)$ обозначает множество элементов порядка n из G, а C_s — циклическую группу порядка s. Пусть $K_s = \langle x, y \mid 1 = x^3 = y^2 = (xy)^6 = [x, y]^s\rangle$. Такая группа изоморфна полупрямому произведению $(C_s \times C_s) \leftthreetimes C_6$. Из [8, лемма 1] следует

Лемма 1.1. *Подгруппа в G, порожденная инволюцией и элементом порядка 3, либо изоморфна S_3 или A_4, либо является гомоморфным образом K_s, где $s \in \{6, 7\}$. В частности, порядок произведения инволюции и элемента порядка 3 всегда делит 6.*

Лемма 1.2. *Пусть x, y, t — инволюции такие, что x и y перестановочны, а x и t порождают подгруппу, изоморфную S_3. Тогда группа $H = \langle x, y, t\rangle$ конечна и не содержит элементов порядка 7. Кроме того, H содержит инволюцию w такую, что $(wt)^3 = [w, y] = 1$.*

Доказательство. Заметим, что $(xt \cdot y)^2 = xtxyty = txtyty \sim xt^{yt}$. Положим $t_0 = t, t_{i+1} = t_i^{yt_i}$. По лемме 1.1 $(xt_i)^3 = 1$. Если $|yt| = 7$, то $t_2 = y^t$ и $xy^t \sim txty = xtxy \sim ty^x = ty$; противоречие. Так как $[xt, y] = txyxty = (ty)^2$ и $\langle xt, y\rangle$ — нормальная подгруппа в H индекса 2, первое утверждение следует из леммы 1.1.

Можно считать, что $ty \in \Gamma_6$. Пусть $w = t^{ytx}$. Тогда

$$wt = xtytytxt \sim yty \cdot txtxt = ytyx \sim tx, \quad wy = xtytytxy \sim (ty)^3.$$

Лемма доказана.

Пусть далее L — подгруппа из G, изоморфная $\langle x, z \mid 1 = x^3 = z^2 = (xz)^6 = a^7,\ a^x = a^4\rangle$, где $a = z^x z$. Тогда L является группой Фробениуса порядка 42.

Лемма 1.3. *Пусть x и y — порождающие K_7 такие, что $x^3 = y^2 = (xy)^6 = [x, y]^7 = 1$. Обозначим $z = y^{xy}$, $a = z^x z$, $u = z^{x^2 z} = y^{[x^{-1}, y][x, y]}$. Тогда $a^x = a^4$, $[u, x] = 1$ и $\langle x, z\rangle \simeq L$.*

Доказательство. Отображение

$$x \to (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)(10, 11, 12)(13, 14, 15)(16, 17, 18)(19, 20, 21),$$

$$y \to (2, 4)(3, 5)(6, 7)(8, 10)(9, 11)(12, 13)(14, 16)(15, 17)(18, 19)$$

может быть продолжено до изоморфизма $\langle x, y\rangle$ и соответствующей группы подстановок. Вычисления в группе подстановок показывают справедливость требуемых соотношений. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть L — подгруппа в G и t — инволюция, централизующая элемент порядка 3 из L. Тогда $t \in L$.*

Доказательство. В группе L два класса сопряженных элементов порядка 3 с представителями x и x^{-1}, поэтому можно считать, что t централизует x. Тогда $\langle t, u\rangle \subseteq C(x)$ — группа периода 6. Если порядок tu четен, то группа диэдра $\langle t, u\rangle$ содержит центральную инволюцию. Таким образом, достаточно доказать лемму для случая $(tu)^2 = 1$ или $(tu)^3 = 1$. По лемме 1.1 $(xt^z)^6 = (t \cdot (zx)^2)^6 = 1$ и если $(tu)^3 = 1$, то $(ztu)^6 = 1$. Поэтому $\langle x, z, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $T(i_1, i_2, i_3) = \langle x, z, t \mid 1 = x^3 = z^2 = t^2 = (xz)^6 = a^7 = a^x a^{-4} = t^x t = (tu)^{i_1} = (tz)^{i_2} = (xt^z)^6 = (t(zx)^2)^6 = (ztu)^{i_3}\rangle$, где $i_1 \in \{2, 3\}$, $i_2, i_3 \in \{6, 7\}$ и $i_3 = 6$, если $i_1 = 3$. Вычисления показывают, что порядки таких групп не превосходят 42. Лемма доказана.

§ 2. Подгруппы, изоморфные A_4

В данном параграфе считаем, что группа G содержит подгруппу H, изоморфную A_4. Обозначим через x элемент порядка 3, а через t — инволюцию из H. Тогда $(xt)^3 = 1$.

В следующем предложении условия на группу G ослаблены.

Предложение 2. *Пусть G не содержит элементов порядка больше 9 и содержит подгруппу H, изоморфную A_4. Если инволюция a централизует элемент x порядка 3 из H, то группа $K = \langle a, H\rangle$ конечна и является либо $\{2, 3\}$-группой, либо гомоморфным образом одной из следующих групп:*
(1) *$V \leftthreetimes S_5$, где V — элементарная абелева порядка 2^{16};*
(2) *$L_3(2) \leftthreetimes C_2$;*
(3) *$L_2(8) \leftthreetimes C_3$.*

Доказательство. Заметим, что K является гомоморфным образом группы $G(i_1, i_2, \ldots, i_9) = \langle h, a, x \mid 1 = h^2 = a^2 = x^3 = (hc)^3 = a^c a = (ah)^{i_1} = (at)^{i_2} = (hat)^{i_3} = (td)^{i_4} = (t^{-1} d^{-1} td)^{i_5} = (ti)^{i_6} = (hj)^{i_7} = (hax)^{i_8} = ((ha)^2 x)^{i_9}\rangle$, где $i_1, \ldots, i_9 \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Вычисления показывают справедливость предложения.

Из предложения 2 для группы G в условиях теоремы следует

Лемма 2.1. *Если a — инволюция и $[a,x]=1$, то $(at)^2=1$.*

Лемма 2.2. $O_2(H)\subseteq O_2(G)$.

Доказательство. Если t порождает вместе с любым своим сопряженным 2-подгруппу, то заключение леммы очевидно. Возможны еще два случая.

Случай 1: $tt^g\in\Gamma_2\cup\Gamma_7$ для любого $g\in G$ и существует инволюция y такая, что $ty\in\Gamma_7$. Поскольку две инволюции в периодической группе порождают конечную группу диэдра, $y\in t^G$ и для любой инволюции s выполнено $ts\in\Gamma_2\cup\Gamma_7$.

1.1. Пусть $yy^z\in\Gamma_7$. Тогда $(xy)^6=1$ и $\langle x,y\rangle$ изоморфна K_7 или L. По лемме 1.3 $u=y^{[x^{-1},y][x,y]}$ централизует x. По лемме 2.1 u централизует t. Если $(tz)^2=1$, то t централизует uz и $14\in\omega(G)$, поэтому $(tz)^7=1$. Таким образом, в группе G слова множества

$$R_0=\{t^2,z^2,z^3,(xz)^6,a^7,a^xa^{-4},(tx)^3,(tz)^7,(ut)^2\},$$

где $a=z^xz$, $u=z^{x^2z}$, тривиальны.

Если w — инволюция, централизующая x, то по лемме 1.4 $u=w$. Обозначим $y_1=z^t$. Если $y_1^xy_1\in\Gamma_7$, то по лемме 1.3 $v_1=y_1^{[x^{-1},y_1][x,y_1]}$ централизует x. Положим $R_1=\big\{(y_1^xy_1)^7,(y_1x)^6,uv_1\big\}$, иначе положим $R_1=\big\{(y_1^xy_1)^2\big\}$. Пусть $R=R_0\cup R_1$. Вычисления показывают, что порядок группы с множеством порождающих $\{x,z,t\}$ и множеством определяющих соотношений R равен 3, что невозможно.

1.2. Пусть $yy^z\in\Gamma_2$. Тогда $(xy)^3=1$. Аналогично по п. 1.1 можно считать $(xt^y)^3=1$. Таким образом, $\langle x,y,t\rangle$ является гомоморфным образом группы $H=\langle x,y,t\mid 1=x^3=y^2=t^2=(xy)^7=(xt)^3=(xt^y)^3=(xy)^3=(xt\cdot y)^6\rangle$. Вычисления показывают, что порядок H равен 12, что невозможно.

Случай 2: существует инволюция y такая, что $ty\in\Gamma_3$. По лемме 1.2 y можно выбрать так, что $[y,t^x]=1$. Тогда $\langle x,y,t\rangle$ является гомоморфным образом группы $Q=\langle x,y,t\mid 1=x^3=y^2=t^2=(ty)^3=(yt^x)^2=(tx)^3=(xy)^6\rangle$. Вычисления показывают, что $Q\simeq L_2(13)\times A_4$, что невозможно. Лемма доказана.

§ 3. Случай, когда $G/O_2(G)$ четной экспоненты

Если $G/O_2(G)$ имеет нечетный период, то заключение теоремы справедливо. Поэтому цель данного параграфа — разобрать случай, когда $G/O_2(G)$ четной экспоненты. Другими словами, будем считать, что группа G не содержит подгрупп, изоморфных A_4, и покажем, что справедливо заключение теоремы. По лемме 1.1 если t — инволюция, а x — элемент порядка 3, то порядок произведения tt^x нечетен.

Лемма 3.1. *Если a, b, c — инволюции такие, что $(ab)^3=(bc)^3=1$, то $(ac)^3=1$.*

Доказательство. Группа $\langle a,b,c\rangle$ является гомоморфным образом группы $F(i,j,k)=\langle a,b,c\mid 1=a^2=b^2=c^2=(ab)^3=(bc)^3=(ac)^i=(abc)^6=(c^{ab}c)^k=(a^cb)^j\rangle$, где $i,j\in\{6,7\}$, $k\in\{3,7\}$. Вычисления показывают, что $F(6,6,3)$ — конечная группа порядка 54 и в ней выполняется требуемое тождество; в остальных случаях $|F(i,j,k)|$ делит 6. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть L — подгруппа в G и t — элемент порядка 3, централизующий циклическую подгруппу порядка 6 из L. Тогда $t \in L$.*

Доказательство. 1. Предположим, что $\langle t, z\rangle$ содержит элемент порядка 7. Тогда по лемме 1.3 $\langle t, z\rangle$ содержит инволюцию z_1 такую, что $\langle t, z_1\rangle \simeq L$. Пусть $u_1 = z_1^{t^2 z_1}$ — соответствующая инволюция из централизатора t. Тогда $\langle u_1, x\rangle$ централизует L и потому является гомоморфным образом $3^{1+2} : 2$. По лемме 1.4, примененной к $\langle t, z_1\rangle$, получаем $u_1^x = u_1$. Применяя ту же лемму к $\langle z, x\rangle$, имеем $u_1 = u$.

Таким образом, $\langle x, z, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, z, t \mid 1 = x^3 = z^2 = t^3 = (xz)^6 = a^7 = a^x a^{-4} = [t, x] = [t, u] = (tz)^6 = (z^t z)^7 = uu_1 = (xt^z)^{i_1} = (x^2 ztz)^{i_2}\rangle$, где $u_1 = z^{[t^{-1}, z][t,z]}$ и вычисления показывают, что порядок такой группы не превосходит 42, значит, $t \in \langle x, z\rangle$.

2. Пусть $\langle t, z\rangle$ — группа периода 6. Аналогично можно считать, что $\langle z, xt\rangle$ периода 6. Таким образом, $\langle x, z, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, z, t \mid 1 = x^3 = z^2 = t^3 = (xz)^6 = a^7 = a^x a^{-4} = [t, x] = [t, u] = (tz)^6 = (z^t z)^3 = (ztx)^6 = (z^{tx} z)^3 = (xt^z)^{i_1}\rangle$. Вычисления показывают, что порядок такой группы не превосходит 6. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если G содержит подгруппу L, то G локально конечна.*

Доказательство. По теореме Шункова [9] достаточно показать, что $C_G(u) = C_L(u)$.

Если $C_G(u)$ содержит элемент $y \notin L$ порядка 3, то $\langle x, y\rangle$ централизует u и по [10, лемма 10] является гомоморфным образом экстраспециальной группы порядка 27 и периода 3, что невозможно по лемме 3.2.

Если $C_G(u)$ содержит инволюцию t, то по доказанному $x^t \in \langle x\rangle$. По лемме 1.4 $x^t = x^{-1}$.

Таким образом, $\langle x, z, t\rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, z, t \mid 1 = x^3 = z^2 = t^3 = (xz)^6 = a^7 = a^x a^{-4} = (xt)^2 = (ut)^2 = (tz)^{i_1} = (tzx)^{i_2} = (t(zx)^2)^6 = (xz^{tz})^6\rangle$. Вычисления показывают, что порядок последней группы делит 12. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть G содержит подгруппу H, изоморфную S_3, и не содержит подгрупп, изоморфных L. Тогда $O_3(H) \subseteq O_3(G)$.*

Доказательство. Пусть a и b — инволюции такие, что $x = ab$ порядка 3. Покажем, что для любого элемента y порядка 3 порядок xy делит 3. По условию выполнены соотношения $(ay)^6 = (a^y a)^3 = 1$ и $(by)^6 = (b^y b)^3 = 1$.

Пусть $g = yy^a$. Тогда $g^3 = 1$ и $[g^a, g] = 1$. По условию $(bg)^6 = (b^a g)^6 = (b^g b)^3 = 1$. По лемме 3.1 $(ba^g)^3 = (ab^g)^3 = 1$. Группа $\langle a, b, g\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(i, j) = \langle a, b, g \mid 1 = a^2 = b^2 = g^3 = (ab)^3 = [g^a, g] = (bg)^6 = (b^g b)^3 = (ba^g)^3 = (ab^g)^3 = (abg)^i = (b^a g)^6 = (bag)^j\rangle$, где $i, j \in \{6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(i, j)$ — конечная группа (ее порядок делит $3^5 2$). Следовательно, $(abh)^3 = (bah)^3 = 1$.

Аналогично пусть $h = yy^b$, тогда $(abh)^3 = (bah)^3 = 1$.

Группа $\langle a, b, y\rangle$ является гомоморфным образом группы $G(i) = \langle a, b, y \mid 1 = a^2 = b^2 = y^3 = (ab)^3 = (ay)^6 = (a^y a)^3 = (by)^6 = (b^y b)^3 = (ba^y)^3 = (ab^y)^3 = (aby)^i = (abg)^3 = (bag)^3 = (abh)^3 = (bah)^3\rangle$, где $i \in \{6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(i)$ — группа порядка, делящего $3^7 2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. 1. Можно считать, что $O_3(G) = 1$. Действительно, если $\omega(G/O_3(G)) \neq \omega(G)$, то либо $G/O_3(G)$ локально конечна, либо период $G/O_{2,3}(G)$ нечетен [11, теорема 2]. Группы $O_3(G)$ и $O_{2,3}(G)$ локально конечны [2]. В первом случае локальная конечность группы G следует из теоремы Шмидта [12, теорема 4.3.9].

Во втором случае для $g \in \Gamma_7(G)$ группа $F = \langle g, O_{2,3}(G) \rangle$ по теореме Шмидта удовлетворяет условиям предложения 1. Следовательно, $O_2(F) \leq C_G(O_3(G)) \trianglelefteq G$. Так как период $G/O_{2,3}(G)$ нечетен, $O_2(F)$ силовская в G, а стало быть, характеристическая в $C_G(O_3(G))$ и нормальная в G.

2. Можно считать, что G не содержит подгрупп, изоморфных A_4. В противном случае по лемме 2.2 $O_2(G) \neq 1$. Обозначим $H = O_{3,2}(G)$.

Допустим, в G/H есть подгруппа, изоморфная A_4, и пусть tH — инволюция из этой подгруппы. Можно считать, что t — инволюция. Действительно, если $t \in \Gamma_6$, то $t^2 \in H$ и $tH = t^3H$.

Пусть $s \in O_2(G)$, тогда $(ts)^2 = s^t s \in O_2(G)$, следовательно, $(ts)^2 = 1$. Поскольку $t \notin O_2(G)$, порядок tr не делит 2 для некоторого $r \in t^G$. Так как $[t,s] = [r,s] = 1$, можно считать $tr \in \Gamma_3$. По лемме 2.2 $tH \in O_2(G/H)$, откуда $x = (tr)^2$ — элемент порядка 3, лежащий в H и централизующий $O_2(G)$. Поскольку H нормальна в G, характеристическая подгруппа $O_p(H)$ лежит в $O_p(G)$ для простого p. По п. 1 $O_3(H) = 1$, и по [8, лемма 3] $x \in C_H(O_2(H)) \leq O_2(H)$; противоречие.

Группа H локально конечна [2]. Можно считать, что G/H содержит инволюцию и элемент порядка 7. Поэтому случай $\omega(G/H) \neq \omega(G)$ аналогичен рассмотренному в п. 1. Таким образом, можно считать, что $\omega(G/H) = \omega(G)$, и заменить G на G/H.

3. Пусть $\omega(G) = \{6, 7\}$, G не содержит подгрупп, изоморфных A_4, $O_3(G) = 1$ и G не является локально конечной. По лемме 3.3 G не содержит подгрупп, изоморфных L, а по лемме 3.4 — подгрупп, изоморфных S_3. По лемме 1.1 любая инволюция и любой элемент порядка 3 перестановочны. Поскольку G содержит элемент порядка 3 и не содержит элементов порядка 21, порядок произведения двух инволюций не равен 7. Следовательно, любые две инволюции перестановочны. Поэтому инволюции порождают нормальную локально конечную 2-подгруппу. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lytkina D., Mazurov V.* Groups with given element orders // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2014. V. 7, N 2. P. 191–203.
2. *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. 1958. V. 2. P. 764–786.
3. *Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.* О периодических группах с элементами малых порядков // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 397–404.
4. *Jabara E.* Fixed point free action of groups of exponent 5 // J. Austral. Math. Soc. 2004. V. 77. P. 297–304.
5. The GAP Group. Gap – groups, algorithms, and programming, vers. 4.6.5 (2013); http://www.gap-system.org.
6. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
7. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
8. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С., Ябара Э.* Группы, порядки элементов которых не превосходят 6 // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 570–586.
9. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.

10. *Мамонтов А. С.* Группы периода 12 без элементов порядка 12 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 150–156.

11. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.

12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.

Статья поступила 4 декабря 2015 г.

Guo Wenbin (Го Вэньбинь)
University of Science and Technology of China,
School of Mathematical Science,
Hefei, 230026, P. R. China
wguo@ustc.edu.cn

Мамонтов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
andreysmamontov@gmail.com