*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1*

*УДК 519.17*

# О DP–РАСКРАСКЕ ГРАФОВ И МУЛЬТИГРАФОВ

**А. Ю. Бернштейн,**
**А. В. Косточка, С. П. Пронь**

**Аннотация.** При решении задачи о предписанной раскраске плоских графов Дворжак и Постл ввели понятие DP-раскраски (они назвали его *correspondence coloring*). DP-раскраска графа $G$ сводит задачу поиска раскраски $G$ для заданного предписания $L$ к проблеме поиска «большого» независимого множества во вспомогательном графе $H(G, L)$ с множеством вершин $\{(v, c) : v \in V(G) \text{ и } c \in L(v)\}$. Это похоже на сведение В. Г. Визинга и Г. С. Плесневича задачи $k$-раскраски к проблеме поиска независимого множества размера $|V(G)|$ в декартовом произведении $G\square K_k$, но DP-раскраска представляется значительно более полезной, чем сведение В. Г. Визинга и Г. С. Плесневича. Некоторые свойства DP-хроматического числа $\chi_{\mathrm{DP}}(G)$ напоминают свойства предписанного хроматического числа $\chi_\ell(G)$, но некоторые отличия довольно существенны. Всегда $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \geq \chi_\ell(G)$. Целью настоящей работы является введение DP-раскраски для мультиграфов и доказательство аналога результата О. В. Бородина и Эрдёша — Рубина — Тейлора, характеризующего мультиграфы, которые не допускают DP-раскрасок для некоторых степенных предписаний. Из этого результата следует аналог для DP-раскраски теоремы Галлаи о минимальном числе ребер в критических $k$-хроматических графах.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.104

**Ключевые слова:** степень вершины, предписанная раскраска, критический граф.

## 1. Введение

Графы в данной статье предполагаются обыкновенными, т. е. без петель и кратных ребер. Мультиграфы могут иметь кратные ребра, но не петли. Полный $n$-вершинный граф будем обозначать через $K_n$, а $n$-вершинный цикл — через $C_n$. Если $G$ — (мульти)граф и $v$, $u \in V(G)$, то $E_G(v, u)$ — это множество всех ребер в $G$, соединяющих $v$ и $u$. Пусть $e_G(v, u) := |E_G(v, u)|$ и $\deg_G(v) := \sum\limits_{u \in V(G)\setminus\{v\}} e_G(v, u)$. Если $A \subseteq V(G)$, то $G[A]$ обозначает под(мульти)граф $G$, индуцируемый $A$, и для $A$, $B \subseteq V(G)$ через $G[A, B]$ обозначается максимальный двудольный под(мульти)граф $G$ с долями $A$ и $B$. Если $G_1, \dots, G_k$ — графы, то $G_1 + \dots + G_k$ обозначает граф с множеством вершин $V(G_1) \cup \dots \cup V(G_k)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup \dots \cup E(G_k)$. Число независимости графа $G$ обозначим через $\alpha(G)$. $\mathbb{N}$ обозначает множество всех неотрицательных целых чисел. Для $k \in \mathbb{N}$ через $[k]$ обозначим множество $\{1, \dots, k\}$.

Напомним, что (правильная) *$k$-раскраска* графа $G$ — это отображение $f : V(G) \to [k]$ такое, что $f(v) \neq f(u)$ для $vu \in E(G)$. Наименьшее $k$ такое, что $G$

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке стипендии штата Иллинойс, вторым автором — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15–01–05867, 16–01–00499), а также грантов NSF (DMS–1266016, DMS–1600592).

имеет $k$-раскраску, называется *хроматическим числом* $G$ и обозначается через $\chi(G)$. Г. С. Плесневич и В. Г. Визинг [1] доказали, что $G$ имеет $k$-раскраску тогда и только тогда, когда декартово произведение $G\Box K_k$ содержит независимое множество размера $|V(G)|$, т. е. $\alpha(G\Box K_k) = |V(G)|$.

Для решения некоторых проблем раскраски графов В. Г. Визинг [2] и независимо Эрдёш, Рубин и Тейлор [3] ввели более общее понятие *предписанной раскраски*. *Предписание* $L$ для графа $G$ — это отображение $L : V(G) \to \mathrm{Pow}(\mathbb{N})$, сопоставляющее каждой вершине $v \in V(G)$ набор $L(v) \subseteq \mathbb{N}$. *$L$-раскраской* $G$ называют такое отображение $f : V(G) \to \mathbb{N}$, что $f(v) \in L(v)$ для каждой $v \in V(G)$ и $f(v) \neq f(u)$, если $vu \in E(G)$. *Предписанным хроматическим числом* $\chi_\ell(G)$ называют минимальное $k$ такое, что $G$ имеет $L$-раскраску для всех $L$, удовлетворяющих условию $|L(v)| = k$ для каждой $v \in V(G)$.

Поскольку обычная правильная $k$-раскраска $G$ является $L$-раскраской с предписанием $L : v \mapsto [k]$, имеем $\chi_\ell(G) \geq \chi(G)$ для любого $G$. Однако разность $\chi_\ell(G) - \chi(G)$ может быть сколь угодно большой. Более того, графы с хроматическим числом 2 могут иметь произвольно большое предписанное хроматическое число. Известно, что 2-раскрашиваемые графы могут иметь сколь угодно большую минимальную степень, однако для предписанной раскраски Алон [4] показал, что $\chi_\ell(G) \geq (1/2 - o(1)) \log_2 \delta$ для любого графа $G$ с минимальной степенью $\delta$. С другой стороны, некоторые известные верхние оценки для $\chi(G)$ в терминах степеней вершин имеют место и для $\chi_\ell(G)$, например теорема Брукса [2] и верхняя оценка для $\chi_\ell(G)$ в терминах вырожденности. Кроме того, О. В. Бородин [5, 6] и независимо Эрдёш, Рубин и Тейлор [3] обобщили теорему Брукса на случай степенных предписаний. Напомним, что предписание $L$ для графа $G$ называется *степенным*, если $|L(v)| = \deg_G(v)$ для любой $v \in V(G)$.

**Теорема 1** [3, 5, 6] (см. простое доказательство в [7]). *Пусть $G$ — связный граф. Тогда $G$ не является $L$-раскрашиваемым для некоторого степенного предписания, если и только если каждый блок графа $G$ является либо полным графом, либо нечетным циклом.*

Этот результат позволяет распространить оценки Галлаи [8] для минимального числа ребер в $n$-вершинных $k$-критических графах (т. е. таких графах $G$ с $\chi(G) = k$, что после удаления любого ребра или вершины хроматическое число уменьшается) на $n$-вершинные предписанно-$k$-критические графы (т. е. такие графы $G$ с $\chi_\ell(G) = k$, что после удаления любого ребра или вершины предписанное хроматическое число уменьшается).

Предписанные раскраски оказались полезными при получении ряда результатов для обычной раскраски графа. Однако, как правило, получать верхние оценки для $\chi_\ell(G)$ бывает труднее, чем для $\chi(G)$. Чтобы доказать верхнюю оценку для одного класса плоских графов, Дворжак и Постле [9] ввели и активно использовали новое обобщение предписанной раскраски, названное ими *correspondence coloring*. Для краткости будем называть такую раскраску *DP-раскраской*.

Сначала покажем, как свести к DP-раскраске проблему $L$-раскраски графа $G$. Для графа $G$ с предписанием $L$ множеством вершин вспомогательного графа $H = H(G, L)$ является $\{(v, c) : v \in V(G) \text{ и } c \in L(v)\}$, а две различные вершины $(v, c)$ и $(v', c')$ смежны в $H$ тогда и только тогда, когда либо $c = c'$ и $vv' \in E(G)$, либо $v = v'$. Отметим, что число независимости графа $H$ не больше $|V(G)|$, так как $V(H)$ покрывается $|V(G)|$ кликами. Если в $H$ есть независимое множество $I$ с $|I| = |V(G)|$, то для каждого $v \in V(G)$ существует единственное $c \in L(v)$ с $(v, c) \in I$. Кроме того, один и тот же цвет $c$ не может быть выбран для любых двух смежных вершин. Другими словами, отображение $f : V(G) \to \mathbb{N}$, определяемое условием $(v, f(v)) \in I$, является $L$-раскраской графа $G$. С другой стороны, если $G$ имеет $L$-раскраску $f$, то множество $\{(v, f(v)) : v \in V(G)\}$ является независимым множеством размера $|V(G)|$ в $H$.

По построению для всех различных $v$, $v' \in V(G)$ множество ребер графа $H$, соединяющих $\{(v, c) : c \in L(v)\}$ и $\{(v', c') : c' \in L(v')\}$, пусто, если $vv' \notin E(G)$, и образует паросочетание (возможно, пустое), если $vv' \in E(G)$. На основе этих свойств графа $H(G, L)$ Дворжак и Постл [9] ввели DP-раскраску. Сформулированные ниже определения слегка отличаются от приведенных в [9], но сохраняют изначальные суть и смысл.

Определение 2. *Накрытием* графа $G$ называется пара $(L, H)$, где $L$ — предписание вершинам графа $G$ попарно не пересекающихся множеств $L(v)$, а $H$ — граф с множеством вершин $\bigcup\limits_{v \in V(G)} L(v)$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для каждой вершины $v \in V(G)$ граф $H[L(v)]$ полный.
2. Для каждого ребра $uv \in E(G)$ множество ребер, соединяющих $L(u)$ и $L(v)$, образует паросочетание (возможно, пустое).
3. Для всех различных $u$, $v \in V(G)$ с $uv \notin E(G)$ никакие ребра графа $H$ не соединяют $L(u)$ и $L(v)$.

Определение 3. Пусть $G$ — граф и $(L, H)$ является накрытием $G$. Тогда $(L, H)$*-раскраской* $G$ называется независимое множество $I \subseteq V(H)$ размера $|V(G)|$. Мы будем называть вершины графа $H$ *цветами*. Граф $G$ называется $(L, H)$*-раскрашиваемым*, если он допускает $(L, H)$-раскраску.

Заметим, что если $(L, H)$ является накрытием графа $G$, а $I$ — его $(L, H)$-раскраской, то $|I \cap L(v)| = 1$ для всех $v \in V(G)$. На рис. 1 показан пример двух различных накрытий для $G \cong C_4$.

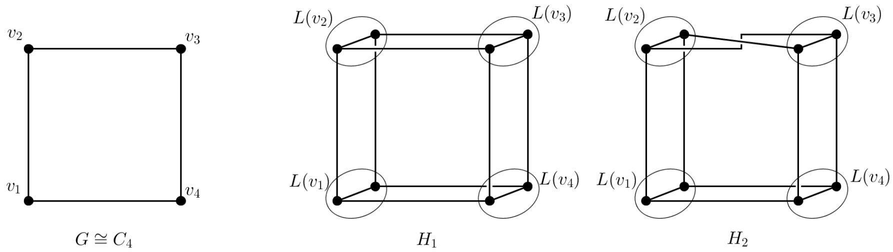


Рис. 1. Граф $C_4$ и два накрытия для него такие, что он $(L, H_1)$-раскрашиваем, но не $(L, H_2)$-раскрашиваем.

Определение 4. Пусть $G$ — граф, и пусть $f : V(G) \to \mathbb{N}$ присваивает целые неотрицательные числа вершинам $G$. Граф $G$ называется DP-$f$*-раскрашиваемым*, если он $(L, H)$-раскрашиваем всякий раз, когда $(L, H)$ — накрытие $G$ такое, что $|L(v)| \geq f(v)$ для всех $v \in V(G)$. Если $G$ является DP-$\deg_G$-раскрашиваемым, то будем говорить, что $G$ *имеет* DP-*степенную раскраску.*

Определение 5. DP-*хроматическое число* $\chi_{\mathrm{DP}}(G)$ есть минимальное $k$ такое, что $G$ является $(L,H)$-раскрашиваемым при любом выборе $(L,H)$ с $|L(v)| \geq k$ для всех $v \in V(G)$.

Дворжак и Постл доказали [9], что $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \leq k+1$ для любого $k$-вырожденного графа $G$ и что теорема Брукса почти справедлива для DP-раскрасок, за исключением того, что в отличие от предписанной раскраски $\chi_{\mathrm{DP}}(C_n) = 3$ для любого, а не только нечетного, $n \geq 3$, где $C_n$ обозначает цикл длины $n$. Тот факт, что $\chi_{\mathrm{DP}}(C_4) = 3$, является важным отличием DP-раскраски от предписанной раскраски, поскольку показывает, что идеи теоремы Алона — Тарси [10] и леммы Бонди — Боппана — Зигеля (см. [10]) для предписанной раскраски не распространяются на DP-раскраски. В [9] также отмечено, что доказательство теоремы Томассена о предписанной 5-раскрашиваемости плоских графов распространяется и на DP-раскраску. Бернштейн показал [11], что нижняя оценка DP-хроматического числа графа $G$ с минимальной степенью $\delta$ значительно выше, чем оценка Алона [4] для предписанной раскраски, а именно $\chi_{\mathrm{DP}}(G) \geq \Omega(\delta/\ln\delta)$. С другой стороны, в [11] доказан аналог верхней оценки Йоханссона [12] хроматического числа графов без треугольников с заданной максимальной степенью.

Цель настоящей статьи заключается в расширении понятия DP-раскраски на мультиграфы и выводе некоторых простых свойств DP-раскрасок мультиграфов. Основным результатом является аналог теоремы 1: характеризация связных мультиграфов, которые не имеют DP-степенной раскраски. Этот результат дает также нижнюю оценку числа ребер в $n$-вершинных DP-критических графах (мы определим такие графы в разд. 2).

Структура статьи следующая. В разд. 2 определим DP-раскраску мультиграфов и связанные с нею понятия, рассмотрим некоторые примеры, сформулируем основной результат и одно следствие из него. Основной результат будет доказан в разд. 3. В разд. 4 кратко обсудим DP-критические (мульти)графы и докажем оценку числа ребер в них, вытекающую из основного результата. Для полноты в приложении приводится доказательство Галлаи [8] его леммы о количестве ребер в так называемых деревьях Галлаи (работа [8] опубликована на немецком языке).

## 2. Определения и основной результат

Чтобы определить DP-раскраску для мультиграфов, нужно только изменить определение 2, как показано ниже, и заменить слово *граф* словом *мультиграф* в определениях 3–5. Приведем новую версию определения 2.

Определение 6. *Накрытием* мультиграфа $G$ называется пара $(L,H)$, где $L$ — предписание вершинам мультиграфа $G$ попарно не пересекающихся множеств $L(v)$, а $H$ — граф с множеством вершин $\bigcup\limits_{v\in V(G)} L(v)$, удовлетворяющий следующим условиям.

1. Для каждой вершины $v \in V(G)$ граф $H[L(v)]$ полный.
2. Для каждого ребра $uv \in E(G)$ множество ребер, соединяющих $L(u)$ и $L(v)$, есть объединение $e_G(u,v)$ паросочетаний (возможно, пустых).

Для положительного целого числа $k$ и мультиграфа $G$ обозначим через $G^k$ мультиграф, полученный из $G$ заменой каждого ребра в $G$ множеством из $k$ параллельных ребер. В частности, $G^1 = G$ для каждого $G$. Следующие две леммы показывают два класса примеров мультиграфов, которые не имеют

DP-степенной раскраски. Первый из этих классов содержит мультиграфы, DP-хроматические числа которых больше числа вершин. В частности, для каждого $k \geq 2$ 2-вершинный мультиграф $K_2^k$ имеет DP-хроматическое число $k+1$.

**Лемма 7.** *Мультиграф $K_n^k$ не имеет DP-степенной раскраски.*

Доказательство. Пусть $G := K_n^k$. Для каждой $v \in V(G)$ положим

$$L(v) := \{(v, i, j) : i \in [n-1],\ j \in [k]\},$$

и пусть

$$(v_1, i_1, j_1)(v_2, i_2, j_2) \in E(H) \iff v_1 = v_2 \ \vee\ i_1 = i_2.$$

Тогда $(L, H)$ является накрытием мультиграфа $G$ и $|L(v)| = k(n-1) = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Утверждается, что $G$ не является $(L, H)$-раскрашиваемым. В самом деле, если $I \subseteq V(H)$ таково, что $|I \cap L(v)| = 1$ для всех $v \in V$, то для некоторых различных $(v_1, i_1, j_1), (v_2, i_2, j_2) \in I$ имеем $i_1 = i_2$. Таким образом, $I$ не является независимым множеством. $\square$

**Лемма 8.** *Мультиграф $C_n^k$ не имеет DP-степенной раскраски.*

Доказательство. Пусть $G := C_n^k$. Не ограничивая общности, предположим, что $V(G) = [n]$ и $e_G(u, v) = k$ тогда и только тогда, когда $|u - v| = 1$ или $\{u, v\} = \{1, n\}$. Для каждого $v \in [n]$ положим $L(v) := \{(v, i, j) : i \in [2],\ j \in [k]\}$, и пусть

$$\begin{aligned}(v_1, i_1, j_1)(v_2, i_2, j_2) \in E(H) :\iff v_1 = v_2 \ \vee\ (|v_1 - v_2| = 1 \ \wedge\ i_1 = i_2) \\ \vee\ (\{v_1, v_2\} = \{1, n\} \ \wedge\ i_1 = i_2 + 1 + n \pmod 2).\end{aligned}$$

Тогда $(L, H)$ является накрытием мультиграфа $G$ и $|L(v)| = 2k = \deg_G(v)$ для всех $v \in [n]$. Покажем, что $G$ не $(L, H)$-раскрашиваем. Действительно, предположим, что $I \subset V(H)$ является $(L, H)$-раскраской $G$. Пусть $I = \{(v, i_v, j_v)\}_{v=1}^n$. Не ограничивая общности, предположим, что $i_1 = 1$. Тогда $i_v = v \pmod 2$ для каждого $v \in [n]$. Значит, $i_1 = i_n + 1 + n \pmod 2$, поэтому $(1, i_1, j_1)(n, i_n, j_n) \in E(H)$. Следовательно, $I$ не является независимым. $\square$

Наш основной результат показывает, что приведенные выше леммы описывают все 2-связные мультиграфы, которые не являются DP-степенно-раскрашиваемыми.

**Теорема 9.** *Если $G$ — связный мультиграф, то он не DP-степенно-раскрашиваем тогда и только тогда, когда каждый блок $G$ является одним из графов $K_n^k$, $C_n^k$ для некоторых $n$ и $k$.*

Результат позволяет оценить число ребер в DP-$k$-*критических* графах и мультиграфах, т. е. (мульти)графах $G$ с $\chi_{\mathrm{DP}}(G) = k$ таких, что каждый правильно раскрашиваемый под(мульти)граф графа $G$ имеет меньшее DP-хроматическое число. Легко показать (следует из приведенных выше лемм и леммы 12 из разд. 3), что $K_n^k$ является DP-$(k(n-1)+1)$-критическим и $C_n^k$ является DP-$(2k+1)$-критическим. Кроме того, из теоремы 9 легко следует, что

$$2|E(G)| \geq (k-1)n \text{ для всех } n\text{-вершинных DP-}k\text{-критических мультиграфов } G. \tag{1}$$

Примеры $C_n^k$ показывают, что для каждого нечетного $k \geq 3$ существует бесконечно много 2-связных DP-$k$-критических мультиграфов $G$, для которых верно (1). Однако для обыкновенных графов из теоремы 9 вытекает более сильная оценка, чем (1), которая является аналогом оценки Галлаи [8] для обычной окраски (см. [7] для предписанной раскраски).

**Следствие 10.** *Пусть $k \geq 4$ и $G$ является DP-$k$-критическим графом, отличным от $K_k$. Тогда*

$$2|E(G)| \geq \left(k - 1 + \frac{k-3}{k^2-3}\right)n. \tag{2}$$

Мы докажем теорему 9 в разд 3, а вывод следствия 10 приведем в разд. 4.

## 3. Доказательство теоремы 9

Докажем ряд лемм.

**Лемма 11.** *Если $G$ — регулярный $n$-вершинный мультиграф, основой которого является простой цикл, то $G$ не имеет DP-степенной раскраски тогда и только тогда, когда $G \cong C_n^k$ для некоторого $k$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $V(G) = [n]$ и $e_G(u, v)$ положительно тогда и только тогда, когда $|u - v| = 1$ или $\{u, v\} = \{1, n\}$. Предположим, что $G \ncong C_n^k$. Из регулярности $G$ следует, что $n$ четно и для некоторых различных положительных $r$ будет $s$, $e_G(v, v+1) = r$ при всех нечетных $v \in [n]$ и $e_G(1, n) = e_G(v, v+1) = s$ для всех четных $v \in [n-1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $s > r$.

Пусть $(L, H)$ — накрытие мультиграфа $G$ такое, что $|L(v)| = \deg_G(v) = r + s$ для всех $v \in [n]$. Покажем, что $G$ $(L, H)$-раскрашиваем. Назовем цвет $y \in L(v)$ *$x$-допустимым* для $x \in L(1)$, если существует такое независимое в $H - E_H(L(1), L(n))$ множество $I \subseteq V(H)$, что $|I \cap L(u)| = 1$ для всех $u \in [v]$ и $\{x, y\} \subseteq I$. Пусть $A_x(v) \subseteq L(v)$ обозначает множество всех $x$-допустимых цветов из $L(v)$. Очевидно, что $|A_x(2)| \geq s$ для каждого $x \in L(1)$ и $|A_x(3)| \geq r$. Предположим, что $|A_x(3)| > r$ для некоторого $x \in L(1)$. Тогда, поскольку каждый цвет в $L(4)$ имеет не более $r$ соседей в $L(3)$, $A_x(4) = L(4)$. Аналогично $A_x(v) = L(v)$ для всех $v \geq 4$. В частности, $A_x(n) = L(n)$. Возьмем любое $y \in L(n) \setminus N_H(x)$. Так как $y \in A_x(n)$, существует такое независимое в $H - E_H(L(1), L(n))$ множество $I \subseteq V(H)$, что $|I \cap L(u)| = 1$ для всех $u \in [n]$ и $\{x, y\} \subseteq I$. Но тогда $I$ независимо в $H$ и, следовательно, является $(L, H)$-раскраской мультиграфа $G$. Таким образом, остался случай, когда $|A_x(3)| = r$ для всех $x \in L(v)$. Заметим, что

$$L(3) \setminus A_x(3) = L(3) \cap \bigcap_{y \in A_x(2)} N_H(y).$$

Следовательно, $L(3) \cap N_H(y)$ — это одно и то же множество размера $s$ для всех $y \in A_x(2)$. Так как каждая вершина из $L(3)$ имеет не больше чем $s$ соседей в $L(2)$, граф $H[A_x(2) \cup (L(3) \setminus A_x(3))]$ является полным $2s$-вершинным графом. Поскольку каждая вершина в $L(2)$ является $x$-допустимой для некоторого $x \in L(1)$, то $H[L(2) \cup L(3)]$ содержит объединение по крайней мере двух непересекающихся полных $2s$-вершинных графов. Таким образом, $|L(2) \cup L(3)| \geq 4s$. Но $|L(2)| = |L(3)| = r + s < 2s$; противоречие. □

**Лемма 12.** *Пусть $G$ — связный мультиграф, а $(L, H)$ — накрытие $G$ такое, что $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$ и $|L(v_0)| > \deg_G(v_0)$ для некоторой $v_0 \in V(G)$. Тогда $G$ $(L, H)$-раскрашиваем.*

Доказательство. Если $|V(G)| = 1$, то утверждение очевидно. Предположим, что $G$ — контрпример с наименьшим числом вершин. Рассмотрим мультиграф $G' := G - v_0$. Пусть $L'(v) := L(v)$ для каждого $v \in V(G')$, и пусть

$H' := H - L(v_0)$. По построению $(L', H')$ является таким накрытием мультиграфа $G'$, что $|L(v)| \geq \deg_{G'}(v)$ для всех $v \in V(G')$. Кроме того, поскольку $G$ связен, каждая компонента связности в $G'$ содержит вершины $u$, смежные в $G$ с $v_0$, а значит, для них верно неравенство $\deg_{G'}(u) < \deg_G(u)$. Следовательно, в силу минимальности $G$ мультиграф $G'$ является $(L', H')$-раскрашиваемым. Пусть $I' \subseteq V(H')$ будет $(L', H')$-раскраской мультиграфа $G'$. Тогда $|N_G(I') \cap L(v_0)| \leq \deg_G(v_0)$, а значит, $L(v_0) \setminus N_G(I') \neq \varnothing$. Таким образом, $I'$ может быть расширено до $(L, H)$-раскраски $I$ мультиграфа $G$; противоречие. $\square$

**Лемма 13.** *Пусть $G$ — связный мультиграф, а $(L, H)$ — накрытие $G$. Предположим, что существуют такие вершина $v_1 \in V(G)$ и цвет $x_1 \in L(v_1)$, что $G - v_1$ связен и для некоторой вершины $v_2 \in V(G) \setminus \{v_1\}$ цвет $x_1$ имеет в $L(v_2)$ соседей меньше, чем $e_G(v_1, v_2)$. Тогда $G$ $(L, H)$-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть $G' := G - v_1$. Для всех $v \in V(G')$ положим

$$L'(v) := L(v) \setminus N_H(x_1),$$

и пусть

$$H' := H - L(v_1) - N_H(x_1).$$

Тогда $(L', H')$ является накрытием мультиграфа $G'$. Более того, для каждого $v \in V(G')$

$$|L'(v)| = |L(v)| - |L(v) \cap N_H(x_1)| \geq \deg_G(v) - e_G(v, v_1) = \deg_{G'}(v),$$

$$|L'(v_2)| = |L(v_2)| - |L(v_2) \cap N_H(x_1)| > \deg_G(v_2) - e_G(v_2, v_1) = \deg_{G'}(v_2).$$

В силу связности $G'$ по лемме 12 получаем, что $G'$ $(L', H')$-раскрашиваем. Но если $I' \subseteq V(H')$ — $(L', H')$-раскраска графа $G'$, то $I' \cup \{x_1\}$ является $(L, H)$-раскраской графа $G$, что и требовалось доказать. $\square$

**Лемма 14.** *Предположим, что $G$ — 2-связный мультиграф и $(L, H)$ — его накрытие такое, что $|L(v)| \geq \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Если $G$ не $(L, H)$-раскрашиваем, то он регулярен и для всех пар смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$ двудольные графы $H[L(v_1), L(v_2)]$ являются $e_G(v_1, v_2)$-регулярными графами.*

Доказательство. Рассмотрим любые две смежные вершины $v_1$, $v_2 \in V(G)$. По лемме 13 $H[L(v_1), L(v_2)]$ является $e_G(v_1, v_2)$-регулярным двудольным графом с долями $L(v_1)$, $L(v_2)$. Следовательно, $|L(v_1)| = |L(v_2)|$ и $\deg_G(v_1) = \deg_G(v_2)$, что и требовалось. Поскольку $G$ связен и $v_1$, $v_2$ — произвольные смежные вершины в $G$, получаем, что $G$ регулярный. $\square$

**Лемма 15.** *Пусть $G$ — 2-связный мультиграф, а $u_1, u_2, w \in V(G)$ такие различные вершины, что $G - u_1 - u_2$ связен, $e_G(u_1, u_2) < e_G(u_1, w)$ и $e_G(u_2, w) \geq 1$. Тогда $G$ DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Пусть $G$ не $(L, H)$-раскрашиваем для некоторого накрытия $(L, H)$ с $|L(v)| = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Сначала покажем, что

$$\text{есть несмежные } x_1 \in L(u_1),\ x_2 \in L(u_2) \text{ с } N_H(x_1) \cap N_H(x_2) \cap L(w) \neq \varnothing. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим любое $x_2 \in L(u_2)$. В силу леммы 14

$$|L(w) \cap N_H(x_2)| = e_G(u_2, w) \geq 1.$$

Аналогично для каждого $y \in L(w) \cap N_H(x_2)$

$$|L(u_1) \cap N_H(y)| = e_G(u_1, w) > e_G(u_1, u_2) = |L(u_1) \cap N_H(x_2)|.$$

Таким образом, существует $x_1 \in (L(u_1) \cap N_H(y)) \setminus (L(u_1) \cap N_H(x_2))$. По построению $x_1$ и $x_2$ несмежны и $y \in N_H(x_1) \cap N_H(x_2) \cap L(w)$. Это доказывает (3).

Пусть $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют условию (3) и $G' := G - u_1 - u_2$. Для всех $v \in V(G')$ положим

$$L'(v) := L(v) \setminus (N_H(x_1) \cup N_H(x_2)),$$

и пусть

$$H' := H - L(u_1) - L(u_2) - N_H(x_1) - N_H(x_2).$$

Тогда $G'$ связен, а $(L', H')$ является его накрытием, удовлетворяющим условиям леммы 12 с $w$ в роли $v_0$. Значит, по лемме 12 $G'$ $(L', H')$-раскрашиваем. Следовательно, $G$ $(L, H)$-раскрашиваем; противоречие. $\square$

**Лемма 16.** *Пусть $G$ является $n$-вершинным 2-связным мультиграфом и имеет вершину, смежную со всеми остальными вершинами. Тогда либо $G \cong K_n^k$ для некоторого $k$, либо $G$ DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что $G$ — $n$-вершинный мультиграф, который не DP-степенно-раскрашиваем, а вершина $w \in V(G)$ смежна со всеми остальными вершинами. Если какие-то различные $u_1, u_2 \in V(G) \setminus \{w\}$ несмежны, то тройка $u_1$, $u_2$, $w$ удовлетворяет условиям леммы 15, а значит, $G$ DP-степенно-раскрашиваем. Следовательно, любые две вершины мультиграфа $G$ смежны. Остается показать, что любые две вершины $G$ связаны одним и тем же числом ребер. Действительно, если $u_1, u_2, u_3 \in V(G)$ таковы, что $e_G(u_1, u_2) < e_G(u_1, u_3)$, то опять по лемме 15 $G$ DP-степенно-раскрашиваем. $\square$

**Лемма 17.** *Если $G$ — 2-связный $n$-вершинный мультиграф, в котором каждая вершина имеет не более двух соседей, то либо $G \cong C_n^k$ для некоторого $k$, либо $G$ DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что $G$ является 2-связным $n$-вершинным мультиграфом, в котором каждая вершина имеет не более двух соседей, но $G$ не DP-степенно-раскрашиваем. Тогда основа мультиграфа $G$ является циклом и по лемме 14 $G$ регулярный, поэтому $G \cong C_n^k$ согласно лемме 11. $\square$

**Лемма 18.** *Если $G$ — 2-связный $n$-вершинный мультиграф, не имеющий DP-степенной раскраски, то $G \cong K_n^k$ или $C_n^k$ для некоторого $k$.*

Доказательство. В силу лемм 16 и 17 можем считать, что $G$ содержит такую вершину $u$, что $3 \leq |N_G(u)| \leq n - 2$. Так как $G$ 2-связен, $G - u$ остается связным. Однако $G - u$ не 2-связный. Действительно, пусть $v_1$ — произвольная вершина в $V(G) \setminus (\{u\} \cup N_G(u))$, которая имеет общего с $u$ соседа $w$. Из леммы 15 с $u$ вместо $v_2$ получаем, что $G - v_1 - u$ несвязен. Поэтому $v_1$ является точкой сочленения в $G - u$.

Следовательно, $G - u$ содержит по крайней мере два висячих блока, скажем, $B_1$ и $B_2$. Для $i \in [2]$ пусть $x_i$ будет точкой сочленения в $G - u$, содержащейся в $B_i$. Так как сам $G$ 2-связен, $u$ имеет соседа $v_i \in V(B_i) \setminus \{x_i\}$ для каждого $i \in [2]$. Тогда $v_1$ и $v_2$ не смежны и $G - u - v_1 - v_2$ связен. Поскольку $u$ имеет по крайней мере трех соседей, то $G - v_1 - v_2$ также связен. Получаем противоречие с леммой 15, где $u$ играет роль $w$. $\square$

**Лемма 19.** *Пусть $w \in V(G)$, $G = G_1 + G_2$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{w\}$. Если $G_1$ и $G_2$ не DP-степенно-раскрашиваемы, то $G$ не DP-степенно-раскрашиваем.*

Доказательство. Предположим, что $G_1$ не $(L_1, H_1)$-раскрашиваем и $G_2$ не $(L_2, G_2)$-раскрашиваем, при этом для каждого $i \in [2]$ $(L_i, H_i)$ является таким накрытием мультиграфа $G_i$, что $|L(v)| = \deg_{G_i}(v)$ для всех $v \in V(G_i)$. Не ограничивая общности, предположим, что $L_1(v_1) \cap L_2(v_2) = \varnothing$ для всех $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$. Для всех $v \in V(G)$ положим

$$L(v) := \begin{cases} L_1(v), & \text{если } v \in V(G_1) \setminus \{w\}, \\ L_2(v), & \text{если } v \in V(G_2) \setminus \{w\}, \\ L_1(w) \cup L_2(w), & \text{если } v = w, \end{cases}$$

и пусть $H := H_1 + H_2 + K(L(w))$, где $K(L(w))$ обозначает полный граф с множеством вершин $L(w)$. Тогда $(L, H)$ является накрытием мультиграфа $G$ и для всех $v \in V(G)$ имеем $|L(v)| = \deg_G(v)$. Предположим, что $G$ $(L, H)$-раскрашиваем и $I$ является $(L, H)$-раскраской графа $G$. Без ограничения общности будем считать, что $I \cap L(w) \subseteq L_1(w)$. Тогда $I \cap V(H_1)$ является $(L_1, H_1)$-раскраской $G_1$; противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 9. Леммы 7, 8 и 19 показывают, что если каждый блок мультиграфа $G$ изоморфен одному из мультиграфов $K_n^k$, $C_n^k$ для некоторых $n$ и $k$, то $G$ не DP-степенно-раскрашиваем.

Теперь предположим, что $G$ связен и не DP-степенно-раскрашиваем. Если $G$ 2-связен, то доказательство вытекает из леммы 18. Таким образом, можем считать, что $G$ имеет точку сочленения $w \in V(G)$. Пусть $G_1$ и $G_2$ такие нетривиальные связные подграфы $G$, что $G = G_1 + G_2$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{w\}$. Остается показать, что ни $G_1$, ни $G_2$ не DP-степенно-раскрашиваемы, так как утверждение теоремы сразу следует из этого по индукции. Предположим, что $G_1$ DP-степенно-раскрашиваем. Пусть $(L, H)$ такое накрытие мультиграфа $G$, что $|L(v)| = \deg_G(v)$ для всех $v \in V(G)$. Применяя лемму 12 к связным компонентам в $G_2 - w$, получаем, что существует такое независимое множество $I_2 \subseteq \bigcup\limits_{v \in V(G_2)\setminus\{w\}} L(v)$, что $|L(v) \cap I_2| = 1$ для всех $v \in V(G_2) \setminus \{w\}$. Для любого $v \in V(G_1)$ пусть

$$L_1(v) := L(v) \setminus N_H(I_2).$$

(Заметим, что $L_1(v) = L(v)$ для всех $v \in V(G_1) \setminus \{w\}$.) Кроме того, положим

$$H_1 := H\Big[\bigcup_{v \in V(G_1)} L_1(v)\Big].$$

Тогда $(L_1, H_1)$ является накрытием мультиграфа $G_1$. Для любого $v \in V(G_1) \setminus \{w\}$ будет

$$|L_1(v)| = |L(v)| = \deg_G(v) = \deg_{G_1}(v),$$

и для $w$ имеем

$$|L_1(w)| = |L(v)| - |N_H(I_2) \cap L(w)| \geq \deg_G(w) - \deg_{G_2}(w) = \deg_{G_1}(w).$$

Поскольку $G_1$ DP-степенно-раскрашиваем, он, в частности, $(L_1, H_1)$-раскрашиваем. Но если $I_1$ — это $(L_1, H_1)$-раскраска $G_1$, то $I_1 \cup I_2$ — $(L, H)$-раскраска $G$. $\square$

## 4. DP-критические графы

Галлаи [8] доказал оценку (2) для обыкновенных $k$-критических $n$-вершинных графов, используя верхнюю оценку числа ребер в *деревьях Галлаи* — связных графах, в которых каждый блок представляет собой полный граф или нечетный цикл. Нам понадобится такое же утверждение для GDP-*деревьев* — связных графов, в которых каждый блок представляет собой полный граф или цикл (не обязательно нечетный).

**Лемма 20.** *Если $k \geq 4$ и $T$ — $n$-вершинное* GDP*-дерево с максимальной степенью $\Delta(T) \leq k-1$, не содержащее $K_k$, то*

$$2|E(T)| \leq \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n. \tag{4}$$

Доказательство такое же, как у Галлаи. Для полноты приводим доказательство в приложении, так как работа Галлаи на немецком языке. Ниже приведем остаток доказательства следствия 10. Оно основано на идеях Галлаи, но короче, поскольку использует метод перераспределения зарядов.

Пусть $G$ — $n$-вершинный DP-$k$-критический граф, отличный от $K_k$. По лемме 12 минимальная степень графа $G$ не меньше $k-1$. Исходный заряд каждой вершины $v \in V(G)$ положим равным $\mathrm{ch}(v) := \deg_G(v)$. Единственное правило перераспределения заключается в следующем.

**(R1)** Каждая вершина $v \in V(G)$ с $\deg_G(v) \geq k$ посылает каждому соседу заряд $(k-1)/(k^2-3)$.

Обозначим новый заряд каждой вершины $v$ через $\mathrm{ch}^*(v)$. Покажем, что

$$\sum_{v \in V(G)} \mathrm{ch}^*(v) \geq \left(k-1+\frac{k-3}{k^2-3}\right)n. \tag{5}$$

Действительно, если $\deg_G(v) \geq k$, то

$$\mathrm{ch}^*(v) \geq \deg_G(v) - \frac{k-1}{k^2-3}\cdot \deg_G(v) \geq k\left(1-\frac{k-1}{k^2-3}\right) = k-1+\frac{k-3}{k^2-3}. \tag{6}$$

Кроме того, если $T$ является компонентой подграфа $G'$, индуцированного вершинами степени $k-1$, то

$$\sum_{v \in V(T)} \mathrm{ch}^*(v) \geq (k-1)|V(T)| + \frac{k-1}{k^2-3}|E_G(V(T), V(G) \setminus V(T)|.$$

Поскольку $T$ является GDP-деревом и не содержит $K_k$, по лемме 20

$$|E(V(T), V(G) \setminus V(T)| \geq (k-1)|V(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)|V(T)| = \frac{k-3}{k-1}|V(T)|.$$

Таким образом, для каждой компоненты $T$ графа $G'$ имеем

$$\sum_{v \in V(T)} \mathrm{ch}^*(v) \geq (k-1)|V(T)| + \frac{k-1}{k^2-3}\cdot\frac{k-3}{k-1}\cdot|V(T)| = \left(k-1+\frac{k-3}{k^2-3}\right)|V(T)|.$$

С учетом (6) отсюда следует (5).

## 5. Приложение

Повторим доказательство Галлаи леммы 20 индукцией по числу блоков. Если $T$ — блок, то, поскольку $T \not\cong K_k$ и $k \geq 4$, имеем оценку $\Delta(T) \leq k-2$, которая сильнее, чем (4).

Предположим, что (4) имеет место для всех GDP-деревьев с не более чем $s$ блоками и $T$ представляет собой GDP-дерево с $s+1$ блоком. Пусть $B$ — висячий блок $T$ и $x$ — точка сочленения в $V(B)$. Пусть $D := \Delta(B)$.

Случай 1: $D \leq k-3$. Пусть $T' := T - (V(B) \setminus \{x\})$. Тогда $T'$ является GDP-деревом с $s$ блоками. Значит, $2|E(T)| = 2|E(T')| + D|V(B)|$, и по индукции

$2|E(T')| \le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|+1)$. Если $B = K_r$, то $r = D+1 \le k-2$. Стало быть, в этом случае

$$\begin{aligned}
2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-D) + D(D+1) - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&= D\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+D+1\right) \le -D\frac{2}{k-1} < 0,
\end{aligned}$$

как и утверждалось. Аналогично если $B = C_t$, то $k \ge 5$ и

$$\begin{aligned}
2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-t+1) + 2t - n\left(k-2+\frac{2}{k-1}\right) \\
&= (t-1)\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+2\right) + 2 < 2\left(-k+4\right) + 2 \le 0.
\end{aligned}$$

Случай 2: $D = k-2$. Так как $\Delta(T) \le k-1$, только один блок $B'$ помимо $B$ может содержать $x$ и этот блок $B'$ изоморфен $K_2$. Пусть $T'' = T - V(B)$. Тогда $T''$ является GDP-деревом с $s-1$ блоком. Имеем $2|E(T)| = 2|E(T'')| + D|V(B)| + 2$, и по индукции $2|(T'')| \le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|)$. Следовательно, поскольку $|V(B)| \ge D+1 = k-1$, получаем

$$\begin{aligned}
2|E(T)| - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&\le \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)(n-|V(B)|) + (k-2)|V(B)| + 2 - \left(k-2+\frac{2}{k-1}\right)n \\
&= |V(B)|\left(-k+2-\frac{2}{k-1}+k-2\right) + 2 \le -\frac{2}{k-1}|V(B)| + 2 \le 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

**Благодарность.** Авторы признательны рецензенту за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Визинг В. Г., Плесневич Г. С.* К проблеме минимальной окраски вершин графа // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 1. С. 234–236.
2. *Визинг В. Г.* Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем. 1976. Т. 29. С. 3–10.
3. *Erdős P., Rubin A. L., Taylor H.* Choosability in graphs // Proc. West Coast Conf. combinatorics, graph theory and computing (Humboldt State Univ., Arcata, CA, 1979) / Congr. Numer. 1980. V. 26. P. 125–157.
4. *Alon N.* Degrees and choice numbers // Random Struct. Algorithms. 2000. V. 16. P. 364–368.
5. *Бородин О. В.* Критерий хроматичности степенного предписания // Тр. IV Всесоюз. конф. по теоретической кибернетике. Новосибирск, 1977. С. 127–128.
6. *Бородин О. В.* Задачи раскраски и покрытия вершин графов индуцированными подграфами: дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Новосиб. гос. университет, 1979.
7. *Kostochka A. V., Stiebitz M., Wirth B.* The colour theorems of Brooks and Gallai extended // Discrete Math. 1996. V. 162. P. 299–303.
8. *Gallai T.* Kritische Graphen. I // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8. P. 165–192.

**9.** *Dvořák Z., Postle L.* List-coloring embedded graphs without cycles of lengths 4 to 8 // http://arxiv.org/abs/1508.03437.
**10.** *Alon N., Tarsi M.* Colorings and orientations of graphs // Combinatorica. 1992. V. 12. P. 125–134.
**11.** *Bernshteyn A.* The asymptotic behavior of the correspondence chromatic number // http://arxiv.org/abs/1602.00347.
**12.** *Johansson A.* Asymptotic choice number for triangle-free graphs. Technical Report 91–95, DIMACS, 1996.
**13.** *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: A survey // Discrete Math. 2013. V. 313. P. 517–539.
**14.** *Gallai T.* Kritische Graphen. II // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8. P. 373–395.

*Статья поступила 21 марта 2016 г.*

Бернштейн Антон Юрьевич
Университет штата Иллинойс, кафедра математики,
Урбана, США
bernsht2@illinois.edu

Косточка Александр Васильевич
Университет штата Иллинойс, кафедра математики,
Урбана, США;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sasha@math.nsc.ru

Пронь Сергей Петрович
Алтайский гос. университет,
факультет математики и информационных технологий,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656002
pspron@mail.ru