Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2017. Том 58, № 1

УДК 512.552

ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ОБОБЩЕННЫХ КОСЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Э. Албаш, Н. Аржач, В. Де Филиппис

Аннотация. Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от 2, $\mathscr{Q}$ — его фактор-кольцо Мартиндейла и $\mathscr{C}$ — его расширенный центроид. Пусть $\mathscr{G}$ — ненулевое обобщенное косое дифференцирование кольца $\mathscr{R}$ и $f(x_1,\dots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных. Пусть $f(\mathscr{R}) = \{f(r_1,\dots,r_n) : r_i \in \mathscr{R}\}$ — множество всех значений $f(x_1,\dots,x_n)$ в $\mathscr{R}$, $\mathscr{A} = \{[\mathscr{G}(f(r_1,\dots,r_n)), f(r_1,\dots,r_n)] : r_i \in \mathscr{R}\}$ и $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A})$ — централизатор $\mathscr{A}$ в $\mathscr{R}$, т. е. $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{R} : [a,x] = 0\ \forall x \in \mathscr{A}\}$. Доказывается, что если $\mathscr{A} \neq (0)$, то $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A}) = Z(R)$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.101

Ключевые слова: полиномиальное тождество, обобщенное косое дифференцирование, первичное кольцо.

1. Введение

Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо с центром $\mathscr{Z}(\mathscr{R})$, и пусть d — ненулевое дифференцирование $\mathscr{R}$. Известная теорема Поснера [1] утверждает, что если $[d(x),x] \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ для всех $x \in \mathscr{R}$, то $\mathscr{R}$ необходимо коммутативно.

В [2] Лански распространил результат Поснера на лиевы идеалы. Более точно, он показал, что если d — ненулевое дифференцирование $\mathscr{R}$ такое, что $[d(x),x] \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ для всех x в лиевом идеале $\mathscr{L}$ кольца $\mathscr{R}$, то либо $\mathscr{L}$ централен в $\mathscr{R}$, либо $\operatorname{char}(\mathscr{R}) = 2$ и $\mathscr{R}$ удовлетворяет стандартному полиномиальному тождеству $S_4(x_1,\dots,x_4)$ степени 4. Несколько авторов изучали связь между структурой первичного кольца $\mathscr{R}$ и поведением аддитивного отображения f, удовлетворяющего условию типа Энгеля $[f(x),x]_k = 0$. Условие Энгеля состоит в том, что $[f(x),x]_k = [[f(x),x]_{k-1},x]$ для всех $x \in \mathscr{R}$ и всех $k > 1$.

В [3] доказано, что если $f(x_1,\dots,x_n)$ — полилинейный многочлен и d — ненулевое дифференцирование кольца $\mathscr{R}$ такое, что $[d(x),x]_k = 0$ для всех $x \in \{f(x_1,\dots,x_n) : x_1,\dots,x_n \in \mathscr{R}\}$, то отображение $f(x_1,\dots,x_n)$ центральнозначно в $\mathscr{R}$, кроме случая, когда $\operatorname{char}(\mathscr{R}) = 2$ и $\mathscr{R}$ удовлетворяет условию $S_4(x_1,\dots,x_4)$. Более того, в [4] этот результат распространен на произвольный многочлен без предположения полилинейности.

В двух недавних статьях [5, 6] были рассмотрены другие обобщения. Точнее, в упомянутых статьях дифференцирование d заменяется соответственно косым дифференцированием (см. [5]) и обобщенными косыми дифференцированиями (см. [6]). Напомним определение косых дифференцирований кольца

$\mathscr{R}$. Пусть $\mathscr{R}$ — ассоциативное кольцо и α — автоморфизм $\mathscr{R}$. Аддитивное отображение $d : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}$ называется *косым дифференцированием* кольца $\mathscr{R}$, если

$$d(xy) = d(x)y + \alpha(x)d(y)$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}$, при этом α называется *ассоциированным автоморфизмом* дифференцирования d. Аддитивное отображение $\mathscr{G} : \mathscr{R} \longrightarrow \mathscr{R}$ называется *обобщенным косым дифференцированием* кольца R, если существует косое дифференцирование d кольца $\mathscr{R}$ с ассоциированным автоморфизмом α такое, что

$$\mathscr{G}(xy) = \mathscr{G}(x)y + \alpha(x)d(y)$$

для всех $x, y \in \mathscr{R}$; d называется *ассоциированным косым дифференцированием* для $\mathscr{G}$, а α называется *ассоциированным автоморфизмом* для $\mathscr{G}$. Определение обобщенного косого дифференцирования — унифицированное понятие косого и обобщенного дифференцирований, рассматриваемых как классические аддитивные отображения неассоциативных алгебр. Оно изучалось разными исследователями с разных точек зрения [7–13].

В настоящей работе продолжим изучение множества

$$\mathscr{A} = \{[\mathscr{G}(f(x_1, \dots, x_n)), f(x_1, \dots, x_n)] \mid x_1, \dots, x_n \in \mathscr{R}\}$$

для обобщенного косого дифференцирования $\mathscr{G}$ кольца $\mathscr{R}$. Один из стандартных подходов к изучению вышеупомянутого множества $\mathscr{A}$ заключается в исследовании его размера. Разумный критерий для изучения размера $\mathscr{A}$ состоит в рассмотрении его левого аннулятора и централизатора в $\mathscr{R}$. В рамках этой линии исследования в [6] было показано, что если $\mathscr{A} \neq 0$, то его левый аннулятор в $\mathscr{R}$ равен нулю. Наша цель — доказать, что централизатор $\mathscr{A}$ в $\mathscr{R}$ тривиален, т. е. совпадает с центром кольца $\mathscr{R}$.

В действительности будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от 2, $\mathscr{Q}$ — его правое фактор-кольцо Мартиндейла, а $\mathscr{C}$ — его расширенный центроид. Предположим, что $\mathscr{G}$ — ненулевое обобщенное косое дифференцирование кольца $\mathscr{R}$ и $f(x_1, \dots, x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных.*

Пусть $f(\mathscr{R}) = \{f(r_1, \dots, r_n) : r_i \in \mathscr{R}\}$ — множество всех значений $f(x_1, \dots, x_n)$ в $\mathscr{R}$, $\mathscr{A} = \{[\mathscr{G}(f(r_1, \dots, r_n)), f(r_1, \dots, r_n)] : r_i \in \mathscr{R}\}$ и $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A})$ — централизатор $\mathscr{A}$ в $\mathscr{R}$, т. е. $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{R} : [a, x] = 0 \ \forall x \in \mathscr{A}\}$. Если $\mathscr{A} \neq (0)$, то $C_{\mathscr{R}}(\mathscr{A}) = \mathscr{Z}(\mathscr{R})$.

Заметим, что для случая, когда $\mathscr{G}$ есть обычное или обобщенное дифференцирование кольца $\mathscr{R}$, заключение теоремы 1 следует из результатов работ [14] (где $\mathscr{G}$ — обычное дифференцирование) и [15] (где $\mathscr{G}$ — обобщенное дифференцирование).

В дальнейшем пусть $\mathscr{Q}$ — правое фактор-кольцо Мартиндейла кольца $\mathscr{R}$ и $\mathscr{C} = \mathscr{Z}(\mathscr{Q})$ — центр $\mathscr{Q}$, который обычно называется *расширенным центроидом* кольца $\mathscr{R}$. Если $\mathscr{R}$ первично, то $\mathscr{C}$ — поле. Следует отметить, что $\mathscr{Q}$ — центрально замкнутая первичная $\mathscr{C}$-алгебра. Определения и свойства этих объектов можно найти в [16].

Хорошо известно, что автоморфизмы, дифференцирования и косые дифференцирования кольца $\mathscr{R}$ могут быть продолжены на $\mathscr{Q}$. В [7] Чжан распространил определение обобщенного косого дифференцирования на правое фактор-кольцо Мартиндейла $\mathscr{Q}$ кольца $\mathscr{R}$ следующим образом: под (правым) обобщенным косым дифференцированием мы подразумеваем аддитивное отображение

$\mathscr{G} : \mathscr{Q} \longrightarrow \mathscr{Q}$ такое, что $\mathscr{G}(xy) = \mathscr{G}(x)y + \alpha(x)d(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{Q}$, где d — косое дифференцирование $\mathscr{R}$ и α — автоморфизм кольца $\mathscr{R}$. Более того, существует $\mathscr{G}(1) = a \in \mathscr{Q}$ такое, что $\mathscr{G}(x) = ax + d(x)$ для всех $x \in \mathscr{R}$. Примем следующее обозначение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_n + \sum_{\sigma \in S_n,\, \sigma \neq \mathrm{id}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$$

для некоторых $\alpha_\sigma \in \mathscr{C}$. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ называется *нецентральным*, если он имеет нецентральное значение на $\mathscr{R}$ в $\mathscr{Q}$ или, что равносильно, в центральном замыкании $\mathscr{C}\mathscr{R}$ кольца $\mathscr{R}$. Всегда предполагаем, что $\mathrm{char}(\mathscr{R}) \neq 2$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ нецентрально в $\mathscr{R}$.

2. Случай внутренних обобщенных косых дифференцирований

В данном разделе изучается случай, когда $\mathscr{G}$ — внутреннее косое дифференцирование, индуцированное элементами $b, c \in \mathscr{R}$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$, т. е. $\mathscr{G}(x) = bx + \alpha(x)c$ для всех $x \in \mathscr{R}$. В этом смысле наша цель — доказать следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных. Пусть $0 \neq a, b, c \in \mathscr{R}$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R})$ таковы, что $\mathscr{G}(x) = bx + \alpha(x)c$ для всех $x \in \mathscr{R}$. Если*

$$[a, [bf(r_1, \ldots, r_n) + \alpha(f(r_1, \ldots, r_n))c, f(r_1, \ldots, r_n)]] = 0$$

для всех $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{R}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

(a) *$a \in \mathscr{C}$;*

(b) *существует $\lambda \in \mathscr{C}$ такое, что $\mathscr{G}(x) = \lambda x$ для всех $x \in \mathscr{R}$;*

(c) *существует $\lambda \in \mathscr{C}$ такое, что $\mathscr{G}(x) = bx + xc$ для всех $x \in \mathscr{R}$, где $c - b = \lambda$ и $f(x_1, \ldots, x_n)^2$ центральнозначен на $\mathscr{R}$.*

2.1. Матричный случай. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathscr{R} = \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — поле характеристики, отличной от двух. Заметим, что множество $f(\mathscr{R}) = \{f(r_1, \ldots, r_n) : r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{R}\}$ инвариантно относительно действия всех внутренних автоморфизмов кольца $\mathscr{R}$. Будем писать $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathscr{R} \times \mathscr{R} \times \cdots \times \mathscr{R} = \mathscr{R}^n$. Тогда для всякого внутреннего автоморфизма φ алгебры $\mathscr{M}_m(\mathscr{K})$ имеем $\underline{r} = (\varphi(r_1), \ldots, \varphi(r_n)) \in \mathscr{R}^n$ и $\varphi(f(r)) = f(\underline{r}) \in f(\mathscr{R})$. Как обычно, обозначаем матрицу, имеющую единицу на месте (i, j) и нули на остальных местах, символом e_{ij}.

Напомним несколько известных результатов.

Лемма 2.2 [15, предложение 1]. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, $f(x_1, \ldots, x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных и $0 \neq a, b, c \in \mathscr{R}$. Если*

$$[a, [bf(r_1, \ldots, r_n) + f(r_1, \ldots, r_n)c, f(r_1, \ldots, r_n)]] = 0$$

для всех $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{R}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

(a) *$a \in \mathscr{C}$;*

(b) *$b, c \in \mathscr{C}$;*

(c) *существует $\lambda \in \mathscr{C}$ такое, что $c - b = \lambda$ и $f(x_1, \ldots, x_n)^2$ центральнозначен на $\mathscr{R}$.*

Отсюда вытекает

Лемма 2.3. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, $f(x_1,\ldots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных и $0 \neq a, b \in \mathscr{R}$. Если*

$$[a,[bf(r_1,\ldots,r_n),f(r_1,\ldots,r_n)]]=0$$

для всех $r_1,\ldots,r_n \in \mathscr{R}$, то либо $a \in \mathscr{C}$, либо $b \in \mathscr{C}$.

Начнем со следующей леммы.

Лемма 2.4 [15, лемма 1]. *Пусть $\mathscr{K}$ — бесконечное поле, и пусть $m \geq 2$ — положительное целое число. Если $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_k$ не являются скалярными матрицами в $\mathscr{M}_m(\mathscr{K})$, то найдется обратимая матрица $\mathscr{B} \in \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$ такая, что у каждой из матриц $\mathscr{B}\mathscr{A}_1\mathscr{B}^{-1},\ldots,\mathscr{B}\mathscr{A}_k\mathscr{B}^{-1}$ все элементы ненулевые.*

Лемма 2.5 [6, лемма 2.8]. *Пусть $\mathscr{K}$ — бесконечное поле, $m \geq 2$ — положительное целое число и $\mathscr{R} = \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$. Если существуют $b,c,q \in \mathscr{R}$ такие, что q — обратимая матрица и $[bu+quq^{-1}c,u]=0$ для всех $u \in f(\mathscr{R})$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *$q^{-1}c, b+c \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;*

(b) *$q, c-b \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ и $u^2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ для всех $u \in f(\mathscr{R})$.*

Лемма 2.6. *Пусть $\mathscr{K}$ — бесконечное поле характеристики, отличной от двух, $m \geq 2$ — положительное целое число и $\mathscr{R} = \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$. Если существуют $0 \neq a,b,c,q \in \mathscr{R}$ такие, что q — обратимая матрица и*

$$[a,[bu+quq^{-1}c,u]]=0$$

для всех $u \in f(\mathscr{R})$, то справедливо одно из следующих утверждений.

(a) *$a \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;*

(b) *$q^{-1}c, b+c \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;*

(c) *$q, c-b \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ и $u^2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ для всех $u \in f(\mathscr{R})$.*

Доказательство. Предположим, что $a \notin \mathscr{Z}(\mathscr{R})$. Заметим, что если либо $q \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$, либо $q^{-1}c \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$, то результат следует из леммы 2.3. Значит, можно предполагать, что a нецентрален и $q^{-1}c$ и q не являются скалярными матрицами. По лемме 2.4 существует обратимая матрица $\mathscr{B} \in M_m(\mathscr{K})$ такая, что у каждой из матриц $\mathscr{B}a\mathscr{B}^{-1}$, $\mathscr{B}(q^{-1}c)\mathscr{B}^{-1}$, $\mathscr{B}q\mathscr{B}^{-1}$ все элементы ненулевые. Обозначим символом $\varphi(x) = \mathscr{B}x\mathscr{B}^{-1}$ внутренний автоморфизм, индуцированный $\mathscr{B}$. Будем писать $\varphi(a) = \sum_{hl} a_{hl}e_{hl}$, $\varphi(q) = \sum_{hl} q_{hl}e_{hl}$ и $\varphi(q^{-1}c) = \sum_{hl} c_{hl}e_{hl}$ для $0 \neq a_{hl}, 0 \neq q_{hl}, 0 \neq c_{hl} \in \mathscr{K}$. Более того, по лемме из [17] и лемме 2 из [18], поскольку многочлен $f(x_1,\ldots,x_n)$ нецентральнозначен, $e_{ij} \in f(\mathscr{R})$ и

$$[\varphi(a),[\varphi(b)e_{ij}+\varphi(q)e_{ij}\varphi(q^{-1}c),e_{ij}]]=0.$$

В частности, умножая на e_{ij} одновременно слева и справа, имеем $2a_{ji}q_{ji}c_{ji}=0$; противоречие. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть $\mathscr{K}$ — поле характеристики, отличной от двух, $m \geq 2$ — положительное целое число и $\mathscr{R} = \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$. В условиях леммы 2.6 справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *$a \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;*

(b) *$q^{-1}c, b+c \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;*

(c) *$q, c-b \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ и $u^2 \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$ для всех $u \in f(\mathscr{R})$.*

Доказательство. Если поле $\mathscr{K}$ бесконечно, утверждение следует из леммы 2.6.

Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечное поле, являющееся расширением поля $\mathscr{K}$, и пусть $\overline{\mathscr{R}} = \mathscr{M}_m(\mathscr{H}) \cong \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{K}} \mathscr{H}$. Заметим, что полилинейный многочлен $f(x_1,\dots,x_n)$ центральнозначен на $\mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда он центральнозначен на $\overline{\mathscr{R}}$. Обобщенный многочлен

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = [a,[bf(x_1,\dots,x_n) + qf(x_1,\dots,x_n)q^{-1}c, f(x_1,\dots,x_n)]]$$

является обобщенным полиномиальным тождеством для $\mathscr{R}$. Более того, $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ полиоднородно полистепени $(2,\dots,2)$ относительно неизвестных $x_1,\dots,x_n$. С другой стороны, полная линеаризация $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ ведет к полилинейному обобщенному многочлену $\Theta(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$, имеющему вид

$$\Theta(x_1,\dots,x_n,x_1,\dots,x_n) = 2^n\Phi(x_1,\dots,x_n).$$

Ясно, что полилинейный многочлен $\Theta(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ является обобщенным полиномиальным тождеством для $\mathscr{R}$ и $\overline{\mathscr{R}}$. Так как $\mathrm{char}(\mathscr{K}) \neq 2$, получаем, что $\Phi(r_1,\dots,r_n) = 0$ для всех $r_1,\dots,r_n \in \overline{\mathscr{R}}$, и утверждение следует из леммы 2.6. $\square$

Следствие 2.8. *Пусть $\mathscr{K}$ — поле характеристики, отличной от двух, $m \geq 2$ — положительное целое число и $\mathscr{R} = \mathscr{M}_m(\mathscr{K})$. Если существуют $0 \neq a,b,c,q \in \mathscr{R}$ такие, что q — обратимая матрица и*

$$[a,[bx + qxq^{-1}c, x]] = 0$$

для всех $x \in \mathscr{R}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

(a) $a \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$;

(b) $q^{-1}c, b + c \in \mathscr{Z}(\mathscr{R})$.

2.2. Доказательство предложения 2.1. Предположим сначала, что α — X-внутренний автоморфизм кольца $\mathscr{R}$, т. е. существует обратимый элемент $q \in \mathscr{Q}$ такой, что $\alpha(x) = qxq^{-1}$ для всех $x \in \mathscr{R}$. Следовательно, обобщенный многочлен

$$\Phi(x_1,\dots,x_n) = [a,[bf(x_1,\dots,x_n) + qf(x_1,\dots,x_n)q^{-1}c, f(x_1,\dots,x_n)]]$$

является обобщенным полиномиальным тождеством для $\mathscr{R}$.

Докажем сначала, что $\Phi(x_1,\dots,x_n)$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество для $\mathscr{R}$, кроме случая, когда существует $\theta \in \mathscr{C}$ такое, что $bx + qxq^{-1}c = \theta x$ для всех $x \in \mathscr{R}$.

В дальнейшем можно предполагать, что $a \notin \mathscr{C}$, кроме того, либо $q \notin C$, либо $q^{-1}c \notin \mathscr{C}$, иначе все получается снова с помощью лемм 2.2 и 2.3.

Рассмотрим обобщенный многочлен $\Phi(x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{Q} *_{\mathscr{C}} \mathscr{C}\{x_1,\dots,x_n\}$. В силу предположения кольцо R удовлетворяет этому обобщенному полиномиальному тождеству. Если B — базис $\mathscr{Q}$ над $\mathscr{C}$, то любой элемент из $T = \mathscr{Q} *_{\mathscr{C}} \mathscr{C}\{x_1,\dots,x_n\}$ может быть записан в виде $g = \sum\limits_i \alpha_i m_i$. В этом разложении коэффициенты α_i из $\mathscr{C}$, а элементы m_i — B-одночлены, т. е. $m_i = q_0 y_1 \dots y_h q_h$, причем $q_i \in B$ и $y_i \in \{x_1,\dots,x_n\}$. В [19] показывается, что обобщенный многочлен $g = \sum\limits_i \alpha_i m_i$ является нулевым элементом T тогда и только тогда, когда все α_i нулевые. Следовательно, пусть $a_1,\dots,a_k \in \mathscr{Q}$ линейно независимы над $\mathscr{C}$ и $a_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \dots + a_k g_k(x_1,\dots,x_n) = 0 \in T$ для некоторых $g_1,\dots,g_k \in T$. Если $g_i(x_1,\dots,x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j h_j(x_1,\dots,x_n)$ для всех i

и $h_j(x_1,\dots,x_n)\in T$, то $g_1(x_1,\dots,x_n)$, …, $g_k(x_1,\dots,x_n)$ — нулевые элементы T. То же верно, если $g_1(x_1,\dots,x_n)a_1+\dots+g_k(x_1,\dots,x_n)a_k=0\in T$ и $g_i(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}h_j(x_1,\dots,x_n)x_j$ для некоторых $h_j(x_1,\dots,x_n)\in T$.

Пишем $q^{-1}c=p$, $f(X)=f(x_1,\dots,x_n)$ и $\Phi(X)=\Phi(x_1,\dots,x_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=abf(X)^2+aqf(X)pf(X)-af(X)bf(X)-af(X)qf(X)p\\&\quad-bf(X)^2a-qf(X)pf(X)a+f(X)bf(X)a+f(X)qf(X)pa.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Если $\{pa,a,p,1\}$ линейно независимы над $\mathscr{C}$, то $\Phi(X)\neq 0\in T$. Поэтому можем предполагать, что a, p, q — нецентральные элементы $\mathscr{Q}$ и $\{pa,a,p,1\}$ линейно независимы над $\mathscr{C}$.

Если $\{a,p,1\}$ линейно независимы, то существуют $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathscr{C}$ такие, что $pa=\alpha_1a+\alpha_2p+\alpha_3$. В этом случае

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=(abf(X)+aqf(X)p-af(X)b+\alpha_3f(X)q)f(X)\\&\quad-(af(X)qf(X)-\alpha_2f(X)qf(X))p\\&\quad-(bf(X)^2+qf(X)pf(X)-f(X)bf(X)-\alpha_1f(X)qf(X))a.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Так как $\{a,p,1\}$ линейно независимы, $af(X)qf(X)-\alpha_2f(X)qf(X)\neq 0\in T$ и также получаем, что $\Phi(X)\neq 0\in T$.

Если $\{a,p,1\}$ линейно зависимы, то найдутся $\beta_1,\beta_2\in\mathscr{C}$ такие, что $p=\beta_1a+\beta_2$ и $\beta_1\neq 0$, потому что p нецентрален. Кроме того, $pa=\beta_1a^2+\beta_2a$, и в силу (2.1)

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=\beta_1f(X)qf(X)a^2+(-bf(X)^2-\beta_1qf(X)af(X)-\beta_2qf(X)^2\\&\quad+f(X)bf(X)+\beta_2f(X)qf(X)-\beta_1af(X)qf(X))a\\&\quad(abf(X)+\beta_1aqf(X)a+\beta_2aqf(X)-af(X)b-\beta_2af(X)q)f(X).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Если $\{a^2,a,1\}$ линейно независимы, то $\Phi(X)\neq 0\in T$. Если $\{a^2,a,1\}$ линейно зависимы, то найдутся $\lambda,\omega\in\mathscr{C}$ такие, что $a^2=\lambda a+\omega$. В этом случае в силу (2.3) имеем

$$\begin{aligned}\Phi(X)&=\beta_1\lambda f(X)qf(X)a+\beta_1\omega f(X)qf(X)\\&\quad+(-bf(X)^2-\beta_1qf(X)af(X)-\beta_2qf(X)^2\\&\quad+f(X)bf(X)+\beta_2f(X)qf(X)-\beta_1af(X)qf(X))a\\&\quad(abf(X)+\beta_1aqf(X)a+\beta_2aqf(X)-af(X)b-\beta_2af(X)q)f(X).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Поэтому $\Phi(X)=P_1(X)+P_2(X)a$, где

$$\begin{aligned}P_1(X)&=abf(X)^2+\beta_1aqf(X)af(X)+\beta_2aqf(X)^2\\&\quad-af(X)bf(X)-\beta_2af(X)qf(X)+\beta_1\omega f(X)qf(X)\end{aligned}\tag{2.5}$$

и

$$\begin{aligned}P_2(X)&=-a(\beta_1f(X)qf(X))-b(f(X)^2)\\&\quad-q(\beta_1f(X)af(X)+\beta_2f(X)^2)+f(X)(bf(X)+\beta_1\lambda qf(X)+\beta_2qf(X)).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Ясно, что если $\{1,q,a,b\}$ линейно независимы, то $P_2(X)\neq 0\in T$ и, таким образом, $\Phi(X)\neq 0\in T$. Предположим, что $\{1,q,a,b\}$ линейно зависимы; тогда существуют $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathscr{C}$ такие, что $q = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3$ и $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$, поскольку q нецентрален. Значит, в силу (2.6)

$$\begin{aligned}P_2(X) = a(-\beta_1\mu_1 f(X)af(X) - \beta_1\mu_2 f(X)bf(X) - \beta_1\mu_3 f(X)^2\\ - \beta_1\mu_1 f(X)af(X) - \beta_2\mu_1 f(X)^2) + b(-\beta_1\mu_2 f(X)af(X) - \beta_2\mu_2 f(X)^2 - f(X)^2)\\ + (-\beta_1\mu_3 f(X)af(X) - \beta_2\mu_3 f(X)^2 + f(X)bf(X)\\ + \beta_1\mu_1\lambda f(X)af(X) + \beta_1\mu_2\lambda f(X)bf(X) + \beta_1\lambda\mu_3 f(X)^2\\ + \beta_2\mu_1 f(X)af(X) + \beta_2\mu_2 f(X)bf(X) + \beta_2\mu_3 f(X)^2).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Если $\{1, a, b\}$ линейно независимы, то $P_2(X) \neq 0 \in T$, так что $\Phi(X) \neq 0 \in T$. Поэтому можно предполагать, что существуют $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathscr{C}$ такие, что $\mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3 = 0$, где $\mu_2 \neq 0$, так как $a \notin \mathscr{C}$. Значит, можем записать $b = \gamma_1 a + \gamma_2$ для подходящих $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{C}$.

Мы доказали, что

$$a^2 = \lambda a + \omega, \quad p = \beta_1 a + \beta_2, \quad b = \gamma_1 a + \gamma_2.$$

Поскольку $q = \mu_1 a + \mu_2 b + \mu_3$, таким образом, пишем $q = \nu_1 a + \nu_2$ для некоторых $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{C}$. Более того, $\beta_1 \neq 0$ и $\nu_1 \neq 0$. Вычисляя, получаем

$$bx + qxp = (\gamma_1 + \nu_1\beta_2)ax + (\gamma_2 + \nu_2\beta_2)x + (\nu_2\beta_1)xa + (\nu_1\beta_1)axa$$

и для ясности пишем

$$bx + qxp = \eta_1 ax + \eta_2 x + \eta_3 xa + \eta_4 axa, \quad \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \mathscr{C},\ \eta_4 \neq 0.$$

Значит, (2.1) сводится к

$$\begin{aligned}\Phi(X) = \eta_1(\lambda a + \omega)f(X)^2 + (\eta_3 - \eta_1)af(X)af(X) + \eta_4(\lambda a + \omega)f(X)af(X)\\ - \eta_3 af(X)^2 a - 2\eta_4 af(X)af(X)a - \eta_1 af(X)^2 a + (\eta_1 - \eta_3)f(X)af(X)a\\ + \eta_3 f(X)^2(\lambda a + \omega) + \eta_4 f(X)af(X)(\lambda a + \omega),\end{aligned} \tag{2.8}$$

т. е.

$$\begin{aligned}\Phi(X) = a(\eta_1\lambda f(X)^2 + (\eta_3 - \eta_1)f(X)af(X) + \eta_4\lambda f(X)af(X)\\ - \eta_3 f(X)^2 a - 2\eta_4 f(X)af(X)a - \eta_1 f(X)^2 a)\\ + (\eta_1\omega f(X)^2 + \eta_4\omega f(X)af(X) + (\eta_1 - \eta_3)f(X)af(X)a\\ + \eta_3 f(X)^2(\lambda a + \omega) + \eta_4 f(X)af(X)(\lambda a + \omega)).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Поскольку $a \notin \mathscr{C}$, либо (2.9) — нетривиальный обобщенный многочлен, либо

$$\begin{aligned}(\eta_1\omega f(X) + 2\eta_4\omega f(X)a + \eta_3\omega f(X))f(X)\\ + ((\eta_1 - \eta_3)f(X)af(X) + \eta_3\lambda f(X)^2 + \eta_4\lambda f(X)af(X))a = 0 \in T.\end{aligned} \tag{2.10}$$

В этом последнем случае из (2.10) следует, что

$$(\eta_1 + \eta_3)\omega f(X)^2 + 2\eta_4\omega f(X)af(X) = 0 \in T. \tag{2.11}$$

Так как $\eta_4 \neq 0$, то $\omega = 0$, так что (2.10) сводится к

$$(\eta_1 - \eta_3 + \eta_4\lambda)f(X)af(X)a + \eta_3\lambda f(X)^2 a = 0 \in T, \tag{2.12}$$

поэтому либо $\lambda = 0$ и $\eta_1 - \eta_3 = 0$, либо $\eta_3 = 0$ и $\eta_1 + \lambda\eta_4 = 0$.

Для $\lambda = 0$ и $\eta_1 - \eta_3 = 0$ в силу (2.9) имеем

$$\Phi(X) = -2a(\eta_4 f(X)af(X)a + \eta_1 f(X)^2 a) = 0 \in T, \tag{2.13}$$

откуда $\eta_1 = \eta_4 = 0$; противоречие.

С другой стороны, если $\eta_3 = 0$ и $\eta_1 + \lambda\eta_4 = 0$, снова в силу (2.9) имеем

$$\Phi(X) = \eta_4(-\lambda^2 af(X)^2 + 2\lambda af(X)af(X) - 2af(X)af(X)a + \lambda af(X)^2 a). \tag{2.14}$$

Поскольку $\eta_4 \neq 0$, ввиду (2.14) $\mathscr{R}$ удовлетворяет равенству

$$\Phi(X) = (-\lambda^2 af(X)^2 + 2\lambda af(X)af(X)) + (-2af(X)af(X) + \lambda af(X)^2)a. \tag{2.15}$$

Так как $a \notin \mathscr{C}$, то $2af(X)af(X) - \lambda af(X)^2$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество для $\mathscr{R}$, т. е. $\Phi(X) \neq 0 \in T$, как и требовалось.

Из [19] вытекает, что $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество для $\mathscr{Q}$. Согласно известной теореме Мартиндейла [20] $\mathscr{Q}$ — примитивное кольцо с ненулевым цоколем, у которого поле $\mathscr{C}$ является ассоциированным кольцом частных. Ввиду [21, с. 75] $\mathscr{Q}$ изоморфно плотному подкольцу кольца линейных преобразований векторного пространства $\mathscr{V}$ над $\mathscr{C}$, содержащему ненулевые линейные преобразования конечного ранга. Предположим сначала, что $\dim_{\mathscr{C}} \mathscr{V} = \infty$. Как и в лемме 2 из [22], множество $f(\mathscr{R}) = \{f(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in \mathscr{R}\}$ плотно в $\mathscr{R}$. В силу того факта, что $\Phi(r_1, \ldots, r_n) = 0$ — обобщенное полиномиальное тождество кольца $\mathscr{R}$, знаем, что $\mathscr{R}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $[a, [bx_1 + qx_1q^{-1}c, x_1]]$. Пусть $y_0 \in \mathscr{R}$. По теореме Литоффа (см. теорему 4.3.11 в [16]) существует идемпотентный элемент $e \in \mathscr{R}$ такой, что $y_0, a, b, c, q, q^{-1} \in e\mathscr{R}e \cong M_k(\mathscr{C})$ для некоторого целого k. Разумеется,

$$[a, [br + qrq^{-1}c, r]] = 0 \quad \forall r \in e\mathscr{R}e.$$

Таким образом, по следствию 2.8 либо $a \in \mathscr{C}e$ и $[a, y_0] = 0$, либо $q^{-1}c \in \mathscr{C}e$ и $[q^{-1}c, y_0] = 0$.

Это означает, что для всех $y \in \mathscr{R}$ либо $[a, y] = 0$, либо $[q^{-1}c, y] = 0$. Поэтому каждый элемент $\mathscr{R}$ принадлежит одному из множеств $S_1 = \{x \in \mathscr{R} : [a, x] = 0\}$ или $S_2 = \{x \in \mathscr{R} : [q^{-1}c, x] = 0\}$. Другими словами, $\mathscr{R}$ есть объединение своих аддитивных подгрупп S_1 и S_2. Тем не менее группа не может быть объединением двух собственных подгрупп, так что либо $\mathscr{R} = S_1$, либо $\mathscr{R} = S_2$. Значит, либо $[a, x] = 0$ для всех $x \in \mathscr{R}$, либо $[q^{-1}c, x] = 0$ для всех $x \in \mathscr{R}$, т. е. либо $a \in \mathscr{C}$, либо $bx + qxq^{-1}c = (b + c)x$ для любого $x \in \mathscr{R}$, и все доказано в силу леммы 2.3.

С другой стороны, если $\dim_{\mathscr{C}} \mathscr{V} = k \geq 2$ — конечное положительное число, то $\mathscr{Q} \cong \mathscr{M}_k(\mathscr{C})$, и утверждение следует из леммы 2.7.

Поэтому можно предполагать, что α является X-внешним. Ввиду [23] $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Q}$ удовлетворяют тому же обобщенному полиномиальному тождеству с автоморфизмами. Поэтому

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = [a, [bf(x_1, \ldots, x_n) + \alpha(f(x_1, \ldots, x_n))c, f(x_1, \ldots, x_n)]]$$

тоже выполнено для $\mathscr{Q}$. Более того, $\mathscr{Q}$ — центральнозамкнутая первичная $\mathscr{C}$-алгебра. Заметим, что если $c = 0$, то все получается по лемме 2.3. Предположим, что $c \neq 0$ и $a \neq 0$. В этом случае из основной теоремы в [24] вытекает, что $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — нетривиальное обобщенное тождество для $\mathscr{R}$ и для $\mathscr{Q}$. В силу теоремы 1 из [25] получаем, что $\mathscr{R}\mathscr{C}$ имеет ненулевой цоколь и $\mathscr{Q}$ примитивно. Так как α — внешний автоморфизм и любая $(x_i)^\alpha$-словесная степень в

$\Phi(x_1,\dots,x_n)$ равна 1, по теореме 3 из [24] в $\mathscr{Q}$ выполнено обобщенное полиномиальное тождество

$$[a,[bf(x_1,\dots,x_n)+f(y_1,\dots,y_n)c,f(x_1,\dots,x_n)]].$$

В частности, $\mathscr{Q}$ (и потому также $\mathscr{R}$) удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$[a,[bf(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)c,f(x_1,\dots,x_n)]].$$

Требуемые заключения следуют из леммы 2.2.

3. Доказательство теоремы 1

Напомним сначала следующее утверждение.

Лемма 3.1 [15]. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо характеристики, отличной от двух, $\mathscr{Q}$ — его правое фактор-кольцо Мартиндейла и $\mathscr{C}$ — его расширенный центроид. Пусть δ — ненулевое обобщенное дифференцирование кольца $\mathscr{R}$ и $f(x_1,\dots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над $\mathscr{C}$ от n некоммутирующих переменных. Если существует элемент $a\in\mathscr{R}$ такой, что*

$$[a,[\delta(f(r_1,\dots,r_n)),f(r_1,\dots,r_n)]]=0$$

для всех $r_1,\dots,r_n\in\mathscr{R}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

(a) *$a\in\mathscr{C}$;*

(b) *существует $\lambda\in\mathscr{C}$ такое, что $\delta(x)=\lambda x$ для всех $x\in\mathscr{R}$;*

(c) *найдутся $q\in\mathscr{U}$ и $\lambda\in\mathscr{C}$ такие, что $\delta(x)=(q+\lambda)x+xq$ для всех $x\in\mathscr{R}$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ центральнозначен на $\mathscr{R}$.*

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{R}$ — первичное кольцо, $\mathscr{D}$ — X-внешнее косое дифференцирование кольца $\mathscr{R}$, и пусть α — X-внешний автоморфизм кольца $\mathscr{R}$. Если $\Phi(x_i,\mathscr{D}(x_i),\alpha(x_i))$ — обобщенное полиномиальное тождество для $\mathscr{R}$, то $\mathscr{R}$ также удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $\Phi(x_i,y_i,z_i)$, где x_i, y_i и z_i — различные неизвестные* [26, *теорема* 1].

3.1. Доказательство теоремы 1. Как указано во введении, можно записать $\mathscr{G}(x)=bx+d(x)$ для всех $x\in\mathscr{R}$, где $b\in\mathscr{Q}$ и d — косое дифференцирование кольца $\mathscr{R}$ (см. [7]). Полагаем $f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\gamma_\sigma x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)}$, где $\gamma_\sigma\in\mathscr{C}$. Согласно теореме 2 из [26] $\mathscr{R}$ и $\mathscr{Q}$ удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам с одним косым дифференцированием. Таким образом, $\mathscr{Q}$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi(x_1,\dots,x_n,d(x_1),\dots,d(x_n))\\ =[a,[bf(x_1,\dots,x_n)+d(f(x_1,\dots,x_n)),f(x_1,\dots,x_n)]].$$

Покажем, что либо $a\in\mathscr{C}$, либо $\mathscr{A}=\{[\mathscr{G}(f(r_1,\dots,r_n)),f(r_1,\dots,r_n)]:r_i\in\mathscr{R}\}=(0)$. Более точно, в последнем случае справедливо одно из следующих утверждений:

(a) существует $\lambda\in\mathscr{C}$ такое, что $\mathscr{G}(x)=\lambda x$ для всех $x\in\mathscr{R}$;

(b) существует $\lambda\in\mathscr{C}$ такое, что $\mathscr{G}(x)=bx+xc$ для всех $x\in\mathscr{R}$, где $c-b=\lambda$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ центральнозначен на $\mathscr{R}$.

Если дифференцирование d X-внутреннее, то существуют $c\in\mathscr{Q}$ и $\alpha\in\operatorname{Aut}(\mathscr{Q})$ такие, что $d(x)=cx+\alpha(x)c$ для всех $x\in\mathscr{R}$. В этом случае $\mathscr{G}(x)=$

$(b+c)x+\alpha(x)c$, и по предложению 2.1 либо $a\in\mathscr{C}$, либо $\mathscr{G}(x)=\lambda x$ для некоторого $\lambda\in\mathscr{C}$, либо $f(x_1,\dots,x_n)^2$ центральнозначен на $\mathscr{R}$ и $\mathscr{G}(x)=(b+c)x+xc$ для всех $x\in\mathscr{R}$, где $b\in\mathscr{C}$.

Предположим, что d — X-внешнее дифференцирование и $\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathscr{Q})$ — ассоциированный автоморфизм дифференцирования d. Если α — тождественное отображение на $\mathscr{R}$, то d — обычное дифференцирование кольца $\mathscr{R}$. Значит, $\mathscr{G}$ становится обобщенным дифференцированием кольца $\mathscr{R}$. В этом случае требуемые заключения следуют из леммы 3.1. Поэтому в дальнейшем всегда будем предполагать, что $1_{\mathscr{R}}\neq\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$. Обозначим через $f^d(x_1,\dots,x_n)$ многочлен, полученный из $f(x_1,\dots,x_n)$ заменой каждого коэффициента γ_σ на $d(\gamma_\sigma)$. Так как

$$d(\gamma_\sigma\cdot x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)})=d(\gamma_\sigma)x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(n)}\\ +\alpha(\gamma_\sigma)\sum_{j=0}^{n-1}\alpha(x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(j)})d(x_{\sigma(j+1)})x_{\sigma(j+2)}\dots x_{\sigma(n)},$$

имеем

$$d(f(x_1,\dots,x_n))=f^d(x_1,\dots,x_n)\\ +\sum_{\sigma\in S_n}\alpha(\gamma_\sigma)\sum_{j=0}^{n-1}\alpha(x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(j)})d(x_{\sigma(j+1)})x_{\sigma(j+2)}\dots x_{\sigma(n)}.$$

Поскольку $\mathscr{Q}$ удовлетворяет $\Phi(x_1,\dots,x_n,d(x_1),\dots,d(x_n))$, для него также выполнено

$$[a,[bf(x_1,\dots,x_n)+f^d(x_1,\dots,x_n),f(x_1,\dots,x_n)]]+\Biggl[a,\Biggl[\sum_{\sigma\in S_n}\alpha(\gamma_\sigma)\\ \times\sum_{j=0}^{n-1}\alpha(x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(j)})d(x_{\sigma(j+1)})x_{\sigma(j+2)}\dots x_{\sigma(n)},f(x_1,\dots,x_n)\Biggr]\Biggr].$$

По теореме 1 из [26] отсюда следует, что $\mathscr{Q}$ удовлетворяет $\Phi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$, т. е.

$$[a,[bf(x_1,\dots,x_n)+f^d(x_1,\dots,x_n),f(x_1,\dots,x_n)]]+\Biggl[a,\Biggl[\sum_{\sigma\in S_n}\alpha(\gamma_\sigma)\\ \times\sum_{j=0}^{n-1}\alpha(x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(j)})y_{\sigma(j+1)}x_{\sigma(j+2)}\dots x_{\sigma(n)},f(x_1,\dots,x_n)\Biggr]\Biggr].$$

В частности, $\mathscr{Q}$ для каждого $i=1,\dots,n$ удовлетворяет соотношению

$$\Biggl[a,\Biggl[\sum_{\sigma\in S_n}\alpha(\gamma_\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(i-1)})y_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1)}\dots x_{\sigma(n)},f(x_1,\dots,x_n)\Biggr]\Biggr].\quad(3.1)$$

Рассмотрим сначала случай, когда α — внутренний автоморфизм $\mathscr{R}$. Тогда существует обратимый элемент $q\in\mathscr{Q}$ такой, что $\alpha(x)=qxq^{-1}$ для всех $x\in\mathscr{R}$. Так как $1_{\mathscr{R}}\neq\alpha\in\mathrm{Aut}(\mathscr{R})$, можно полагать, что $q\notin\mathscr{C}$. Более того, $\alpha(\gamma_\sigma)=\gamma_\sigma$ для всех коэффициентов, участвующих в $f(x_1,\dots,x_n)$. Заменяя каждый $y_{\sigma(i)}$ на $qx_{\sigma(i)}$ в (3.1), получаем, что $\mathscr{Q}$ удовлетворяет тождеству

$$\Biggl[a,\Biggl[q\sum_{\sigma\in S_n}\gamma_\sigma x_{\sigma(1)}\cdot x_{\sigma(2)}\dots x_{\sigma(i-1)}x_{\sigma(i)}x_{\sigma(i+1)}\dots x_{\sigma(n)},f(x_1,\dots,x_n)\Biggr]\Biggr],$$

т. е.

$$[a, [qf(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)]].$$

Заметим, что $q \notin \mathscr{C}$ и $f(x_1, \ldots, x_n)$ нецентральнозначен на $\mathscr{Q}$. Поэтому в силу леммы 2.2 $a \in \mathscr{C}$.

Предположим, что α X-внешнее. В свете леммы 3.2 и соотношения (3.1) $\mathscr{Q}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$\Big[a, \Big[\sum_{\sigma \in S_n} \alpha(\gamma_\sigma) z_{\sigma(1)} \cdot z_{\sigma(2)} \ldots z_{\sigma(i-1)} y_{\sigma(i)} x_{\sigma(i+1)} \ldots x_{\sigma(n)}, f(x_1, \ldots, x_n)\Big]\Big] \tag{3.2}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. В частности, выберем

- $y_{\sigma(i)} = 0$ для всех $i \geq 2$,
- $z_{\sigma(i-1)} = 0$ для всех $i \geq 2$.

В силу (3.2) $\mathscr{Q}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$\Big[a, \Big[y_1 \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha(\gamma_\sigma) x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}, f(x_1, \ldots, x_n)\Big]\Big]. \tag{3.3}$$

Здесь обозначено $\sum\limits_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha(\gamma_\sigma) x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} = t_1(x_2, \ldots, x_n)$. Тогда $\mathscr{Q}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$[a, [y_1 t_1(x_2, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)]]. \tag{3.4}$$

Ввиду теоремы 6 из [4] и тождества (3.4) для $a \notin \mathscr{C}$ получаем, что

$$[y_1 t_1(x_2, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)]$$

— центральный многочлен для $\mathscr{Q}$. Поэтому найдутся подходящее поле $\mathscr{K}$ и целое число $t \geq 1$ такие, что $\mathscr{Q}$ и матричное кольцо $\mathscr{M}_t(\mathscr{K})$ удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ нецентральнозначен на $\mathscr{Q}$, можно предполагать, что $t \geq 2$. В таком случае в силу леммы из [17] и леммы 2 из [18] для всех $i \neq j$ существуют $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{M}_t(\mathscr{K})$ такие, что $f(r_1, \ldots, r_n) = e_{ij} \neq 0$ и

$$[y_1 t_1(r_2, \ldots, r_n), e_{ij}] \tag{3.5}$$

централен в $\mathscr{M}_t(\mathscr{K})$ для всех $y_1 \in \mathscr{M}_t(\mathscr{K})$. В силу (3.5) для $y_1 = e_{ii}X$ и для произвольного $X \in \mathscr{M}_t(\mathscr{K})$ имеем $e_{ii}Xt_1(r_2, \ldots, r_n)e_{ij} = 0$, т. е. $t_1(r_2, \ldots, r_n)e_{ij} = 0$. Ввиду (3.5) получаем, что

$$y_1 t_1(r_2, \ldots, r_n) e_{ij} - e_{ij} y_1 t_1(r_2, \ldots, r_n) = -e_{ij} y_1 t_1(r_2, \ldots, r_n)$$

централен в $\mathscr{M}_t(\mathscr{K})$, откуда следует, что $t_1(r_2, \ldots, r_n) = 0$.

Заметим также, что если через $f^\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ обозначить многочлен, полученный из $f(x_1, \ldots, x_n)$ заменой каждого коэффициента γ_σ на $\alpha(\gamma_\sigma)$, то $f^\alpha(r_1, \ldots, r_n) \neq 0$.

Снова начнем с (3.2) и зафиксируем индекс $j \in \{1, \ldots, n\}$. Выберем

- $y_{\sigma(i)} = 0$ для всех $i \neq j$,
- $z_{\sigma(i)} = 0$ для всех $i \neq j$.

Поэтому в силу (3.2) $\mathscr{Q}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$\Big[a, \Big[y_j \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \alpha(\gamma_\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(j-i)} x_{\sigma(j+1)} \ldots x_{\sigma(n)}, f(x_1, \ldots, x_n)\Big]\Big]. \tag{3.6}$$

Окончательно запишем

$$\sum_{\sigma\in S_{n-1}} \alpha(\gamma_\sigma)x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(j-i)}x_{\sigma(j+1)}\dots x_{\sigma(n)} = t_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n).$$

Таким образом, $\mathscr{Q}$ удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$[a,[y_jt_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),f(x_1,\dots,x_n)]].$$

Кроме того, известно, что существуют $r_1,\dots,r_n \in \mathscr{M}_t(\mathscr{K})$ такие, что $f(r_1,\dots,r_n) = e_{ij} \neq 0$. Используя те же рассуждения, что и выше, получаем, что $t_j(r_1,\dots,r_{j-1},r_{j+1},\dots,r_n) = 0$. Наконец, заметим, что

$$f^\alpha(x_1,\dots,x_n) = \sum_j x_jt_j(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n),$$

где каждый t_j — полилинейный многочлен степени $n-1$ и x_j никогда не появляется ни в одном мономе от t_j. Это ведет к противоречию: $f^\alpha(r_1,\dots,r_n) = 0$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение работы и проницательные комментарии и предложения, которые значительно помогли улучшить окончательный вид статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Posner E. C.* Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.
2. *Lanski C.* Differential identities, Lie ideals and Posner's theorems // Pacific J. Math. 1988. V. 134, N 2. P. 275–297.
3. *Lee P.-H., Lee T.-K.* Derivations with Engel conditions on multilinear polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 2625–2629.
4. *Lee T.-K.* Derivations with Engel conditions on polynomials // Algebra Colloq. 1998. V. 5. P. 13–24.
5. *De Filippis V., Wei F.* Posner's second theorem for skew derivations on multilinear polynomials on left ideals // Houston J. Math. 2012. V. 38. P. 373–395.
6. *De Filippis V., Wei F.* Posner's second theorem and annihilator conditions with generalized skew derivations // Collect. Math. 2012. V. 129, N 1. P. 61–74.
7. *Chang J.-C.* On the identity $h(x) = af(x)+g(x)b$ // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7. P. 103–113.
8. *Chang J.-C.* Generalized skew derivations with annihilating Engel conditions // Taiwanese J. Math. 2009. V. 12. P. 1641–1650.
9. *Chang J.-C.* Generalized skew derivations with nilpotent values on Lie ideals // Monatsh. Math. 2010. V. 161. P. 155–160.
10. *Chang J.-C.* Generalized skew derivations with power central values on Lie ideals // Commun. Algebra. 2011. V. 39. P. 2241–2248.
11. *Cheng H.-W., Wei F.* Generalized skew derivations of rings // Adv. Math. (China). 2006. V. 35. P. 237–243.
12. *Lee T.-K.* Generalized skew derivations characterized by acting on zero products // Pacific J. Math. 2004. V. 216. P. 293–301.
13. *Liu K.-S.* Differential identities and constants of algebraic automorphisms in prime rings: Ph. D. Thesis. National Taiwan Univ., 2006.
14. *De Filippis V., Di Vincenzo O. M.* Posner's second theorem, multilinear polynomials and vanishing derivations // J. Austral. Math. Soc. 2004. V. 76. P. 357–368.
15. *De Filippis V., Di Vincenzo O. M.* Vanishing derivations and centralizers of generalized derivations on multilinear polynomials // Commun. Algebra. 2012. V. 40. P. 1918–1932.
16. *Beidar K. I., Martindale, III W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identities. New York: Marcel Dekker, 1996. (Pure Applied Math.).
17. *Lee T.-K.* Derivations with invertible values on a multilinear polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119. P. 1–5.
18. *Leron U.* Nil and power central polynomials in rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 202. P. 97–103.

19. *Chuang C.-L.* GPIs having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 723–728.
20. *Martindale, III W. S.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.
21. *Jacobson N.* Structure of rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1964.
22. *Wong T.-L.* Derivations with power central values on multilinear polynomials // Algebra Colloq. 1996. V. 3. P. 369–378.
23. *Chuang C.-L.* Differential identities with automorphisms and antiautomorphisms. I // J. Algebra. 1992. V. 149. P. 371–404.
24. *Chuang C.-L.* Differential identities with automorphisms and antiautomorphisms. II // J. Algebra. 1993. V. 160. P. 130–171.
25. *Харченко В. К.* Обобщенные тождества с автоморфизмами // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 2. С. 215–237.
26. *Chuang C.-L., Lee T.-K.* Identities with a single skew derivation // J. Algebra. 2005. V. 288. P. 59–77.

Статья поступила 11 мая 2015 г.

Emine Albaş (Албаш Эмине), Nurcan Argaç (Аржач Нуркан)
Department of Mathematics, Science Faculty,
Ege University,
35100, Bornova, Izmir, Turkey
emine.albas@ege.edu.tr, nurcan.argac@ege.edu.tr

Vincenzo de Filippis (Де Филиппис Винченцо)
Department of Mathematics and Computer Science,
University of Messina,
viale S. D'Alcontres, 98166, Messina, Italy
defilippis@unime.it