Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.57

ОБ IHM–ДОЗВОЛЕННЫХ И IHM–ЗАПРЕЩЕННЫХ КВАЗИПОРЯДКАХ НА МНОЖЕСТВАХ

А. Г. Пинус

Аннотация. Рассматриваются вопросы существования квазипорядков на множествах, в терминах которых возможно описание оператора алгебраического замыкания на подмножествах универсальных алгебр с данным базисным множеством.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.516

Ключевые слова: квазипорядок, внутренний гомоморфизм алгебры, алгебраическое множество.

Понятие алгебраического множества универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ (совокупности решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы термальных уравнений) и индуцированное этим понятием понятие алгебраического замыкания подмножеств этой алгебры относятся к основным понятиям алгебраической геометрии универсальных алгебр (см., например, [1]). Решетки алгебраических множеств данной алгебры $\mathfrak{A}$ естественно рассматривать как некие производные структуры (наряду с решетками подалгебр, конгруэнций, группами автоморфизмов и т. д.), характеризующие строение универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ и лежащие в основе некоторой классификации подобных алгебр (см., например, [2]).

В [2] для изучения оператора алгебраического замыкания $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ на подмножествах B декартовых степеней A^n основного множества A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ (здесь $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ — наименьшее алгебраическое множество ($B \subseteq A^n$) алгебры $\mathfrak{A}$, включающее в себя B) предложено использование некоторого квазипорядка $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A}$ и ряда ее расширений. Здесь $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ — полугруппа внутренних гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ (гомоморфизмов подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ на ее же подалгебры). В результате этого алгебраические множества оказываются естественным образом связанными с идеалами подобного квазипорядка, рассмотренного на прямых и матричных степенях алгебры $\mathfrak{A}$.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любых ее элементов $a, b \in A$ полагаем $a \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда существует внутренний гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\varphi(b) = a$. Здесь и далее $\langle c \rangle_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная элементом c из A. Квазипорядок $\leq$ на множестве A будем называть Ihm-*дозволенным*, если существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ такая, что $\leq$ совпадает с квазипорядком $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$. В противном случае квазипорядок $\leq$ будем называть Ihm-*запрещенным*. Квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} \rangle$ естественно рассматривать как некую производную

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 2014.138, проект 1052).

структуру алгебры $\mathfrak{A}$, позволяющую, как отмечено выше, описывать алгебраические множества этой алгебры и оператор алгебраического замыкания на ее подмножествах. Поэтому естествен интерес к традиционной проблематике универсальных алгебр: к конкретному и абстрактному описанию производных структур алгебр, к описанию и свойствам этих квазиупорядоченных множеств, в частности, к вопросу существования Ihm-дозволенных и Ihm-запрещенных квазипорядков на тех или иных множествах. Если вопрос существования Ihm-дозволенных квазипорядков на любом множестве тривиален, то ответ на вопрос существования Ihm-запрещенных квазипорядков на тех или иных множествах далеко не так очевиден. В работе [2] было замечено, что любые квазипорядки на не более чем трехэлементных множествах Ihm-дозволенные, однако существует Ihm-запрещенный квазипорядок на четырехэлементном множестве.

Докажем, что это верно для любого не менее чем четырехэлементного множества.

Теорема 1. *На любом не менее чем четырехэлементном множестве существуют* Ihm-*запрещенные квазипорядки.*

Доказательство. Пусть множество A состоит из попарно различных элементов a, b, c, d, e_i $(i \in I)$. Квазипорядок $\leq$ на A определим следующими неравенствами: $a \leq b$, $b \leq a$, $a < d$, $b < d$, $c < d$, и условием, что все e_i попарно не сравнимы, равно как и любой e_i не сравним с элементами a, b, c, d. Покажем, что подобный квазипорядок Ihm-запрещенный. Допустим противное, и пусть алгебра $\mathfrak{A} = \langle \{a, b, c, d, e_i \mid i \in I\}; \sigma\rangle$ такова, что квазипорядок $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ совпадает с квазипорядком $\leq$. Прежде всего отметим, что если бы алгебра $\mathfrak{A}$ имела одноэлементную подалгебру $\{p\}$, то в силу определения квазипорядка $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ p был бы наименьшим элементом квазипорядка $\leq$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ не имеет одноэлементных подалгебр.

Заметим, что множество $\{a, b, c, d\}$ не может являться подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. В противном случае если $\mathfrak{A}' = \langle \{a, b, c, d\}; \sigma\rangle$ была бы подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, то квазипорядок $\leq$ на $\{a, b, c, d\}$ был бы Ihm-дозволенным. Покажем, что это невозможно. Так как квазиупорядоченное множество $\langle \{a, b, c, d\}; \leq\rangle$ не имеет наименьшего элемента, алгебра $\mathfrak{A}'$ не имеет одноэлементных подалгебр. Следовательно, подалгебры $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}$, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'}$ алгебры $\mathfrak{A}'$ не менее чем двухэлементны. Тем самым так как $a, b, c < d$, гомоморфизм алгебры $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$ не является изоморфизмом и, значит, $|\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}| \geq 3$.

При этом если имели бы место равенства $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}| = 2$, то, так как $|\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}| \geq 3$, имели бы место включения $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}, \langle b\rangle_{\mathfrak{A}'} \subseteq \{a, b, c\}$. Поскольку пересечение $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$ и $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}$ неодноэлементно, то $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b\}$. Заметим, что $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b, c\}$. Действительно, равенство $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{c, a\}$ невозможно, так как иначе имело бы место включение $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} \supseteq \langle a\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b\}$. Равным образом невозможно равенство $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{c, b\}$. В силу того, что c строго меньше, чем d, имеем $|\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'}| < |\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}|$ и, значит, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b, c\}$, а $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b, c, d\}$. Пусть ψ — гомоморфизм $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$. Тогда ограничение ψ на подалгебру $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b, c\}$ отображает c либо на a, либо на b и, значит, либо $a \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}'} c$, либо $b \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}'} c$; противоречие с несравнимостью элементов a и c, b и c соответственно относительно квазипорядка $\leq$.

Рассмотрим случай, когда $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}| = 3$. Тогда опять $|\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}| = 4$ и, значит, $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}'} = \{a, b, c\}$. Пусть φ — изоморфизм $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$ на $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}$. Тогда либо c — неподвижная точка для φ и, значит, $\{c\}$ — одноэлементная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}'$, что, как замечено выше, невозможно, либо $\varphi(b) = c$, но тогда

$c \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}'} b$; противоречие с заданием квазипорядка $\leq$ на A. Тем самым доказано, что совокупность элементов $\{a, b, c, d\}$ не является подалгеброй алгебры.

Вернемся к доказательству Ihm-запрещенности квазипорядка $\leq$ на множестве $\{a, b, c, d, e_i \mid i \in I\}$. Пусть φ_a, φ_b, φ_c — гомоморфизмы алгебры $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебры $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ и $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ соответственно. Тогда в силу $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$-несравнимости элементов $\{e_i \mid i \in I\}$ попарно и с элементами a, b, c, d имеют место равенства

$$\langle d\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \{e_i \mid i \in I\} = \langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \{e_i \mid i \in I\} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \{e_i \mid i \in I\} = \langle c\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \{e_i \mid i \in I\}.$$

Обозначим множество $\{e_i \mid i \in I\}$ через E. При этом $\varphi_a(e_i) = \varphi_b(e_i) = \varphi_c(e_i) = e_i$ для любого $e_i \in E$. Через ψ обозначим изоморфизм $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$. Аналогичным образом имеет место $\psi(e_i) = e_i$ для $e_i \in E$. Через B обозначим множество $\{a, b, c, d\}$. Тогда $\varphi_a(B), \varphi_b(B), \varphi_c(B) \subseteq B$. Через $\langle a\rangle_B$, $\langle b\rangle_B$, $\langle c\rangle_B$, $\langle d\rangle_B$ обозначим соответственно множества $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \cap B$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}} \cap B$, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}} \cap B$, $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}} \cap B$. При этом

$$\varphi_a(\langle d\rangle_B) = \langle a\rangle_B, \quad \varphi_b(\langle d\rangle_B) = \langle b\rangle_B, \quad \varphi_c(\langle d\rangle_B) = \langle c\rangle_B, \quad \psi(\langle d\rangle_B) = \langle b\rangle_B.$$

Непосредственно замечается, что если какое-либо из множеств $\langle a\rangle_B$, $\langle b\rangle_B$, $\langle c\rangle_B$ было бы одноэлементным (например, $\langle c\rangle_B$), то отображение $\eta : \langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \to \langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ такое, что $\eta(\langle a\rangle_B) = \{c\}$ и $\eta(e_i) = e_i$ для $e_i \in E$, было бы гомоморфизмом алгебры $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$; противоречие с несравнимостью элементов a и c относительно квазипорядка $\leq$. Аналогично невозможны одноэлементности множеств $\langle a\rangle_B$ и $\langle b\rangle_B$.

Таким образом, имеют место неравенства $2 \leq |\langle a\rangle_B|, |\langle b\rangle_B|, |\langle c\rangle_B| \leq 3$ и $|\langle d\rangle_B| \leq 4$. Повторяя рассуждения из доказательства того, что множество $\{a, b, c, d\}$ не образует подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$ с заменой множеств $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}'}$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}'}$, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}'}$, $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}'}$ множествами $\langle a\rangle_B$, $\langle b\rangle_B$, $\langle c\rangle_B$, $\langle d\rangle_B$ соответственно. Строя соответствующие гомоморфизмы между подалгебрами $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}}$ подобно построенному выше гомоморфизму η, получаем противоречие с предположением о совпадении квазипорядков $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ и $\leq$. Тем самым доказаны Ihm-запрещенность последнего, а значит, и утверждение теоремы 1.

Отметим, что подобные рассуждения дают пример иного Ihm-запрещенного квазипорядка $\leq$ на конечных множествах $\{a, b, c, d, d_1, \dots, d_k\}$ для $k \in \omega$, если квазипорядок $\leq$ на множестве $\{a, b, c, d\}$ определим, как и в доказательстве теоремы 1, и дополнительно положим $d < d_1 < \dots < d_i < d_{i+1} < \dots < d_k$.

Напомним, что квазипорядок $\langle A; \leq\rangle$ называется *линейным*, если соответствующее фактор-множество $\langle A/\sim; \leq\rangle$ линейно упорядочено.

Теорема 2. *Любой линейный квазипорядок* Ihm-*дозволенный.*

Доказательство. Пусть $\langle A; \leq\rangle$ является линейным квазипорядком. На множестве A определим алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle f_c \mid c \in A\rangle$ следующим образом: для любого $a \in A$

$$f_c(a) = \begin{cases} c, & \text{если } c \leq a, \\ a & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \{d \in A \mid d \leq a\}$ для $a \in A$. Непосредственно проверяется, что для $b \leq a$ имеет место $b \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} a$. При этом гомоморфизм φ алгебры $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ определен так:

$$\varphi(d) = \begin{cases} d & \text{для } d \leq b, \\ b & \text{иначе.} \end{cases}$$

В то же время в случае, когда $b \le a$, не существует гомоморфизма ψ алгебры $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ такого, что $\psi(b) = a$, так как в этом случае $\psi(f_b(b)) = \psi(b) = a$, но $f_b(\psi(b)) = f_b(a) = b$. В силу линейности квазипорядка $\le$ имеет равенство квазипорядков $\le$ и $\le_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$. Теорема доказана.

В [2] доказано, что любые частично упорядоченные множества, являющиеся нижними полурешетками, представляют собой Ihm-дозволенные квазипорядки. В связи с этим результатом и теоремой 2 возникает естественный вопрос: будет ли любое «раздувание» Ihm-дозволенного частичного порядка до квазипорядка Ihm-дозволенным, т. е. будет ли Ihm-дозволенным любой квазипорядок $\langle A; \le\rangle$ такой, что его частично упорядоченное фактор-множество $\langle A/\sim; \le\rangle$ Ihm-дозволенное (здесь, как и ранее, $\sim$ — естественное отношение эквивалентности на A порожденное квазипорядком $\le$)? Отрицательный ответ следует из примера четырехэлементного Ihm-запрещенного квазипорядка из доказательства теоремы 1, частично упорядоченный фактор которого трехэлементен и, значит, как замечено выше, Ihm-дозволен.

Представляет интерес вопрос: какие операции над квазипорядками сохраняют их Ihm-дозволенность? Из отмеченного выше очевидно, что к таковым не относятся переходы от квазипорядков к подквазипорядкам или к гомоморфным образам. Однако имеет место

Теорема 3. *Прямое произведение* Ihm-*дозволенных квазипорядков* Ihm-*дозволенно.*

Здесь под прямым произведением квазипорядков имеется в виду квазипорядок, определенный на прямом произведении квазиупорядоченных множеств.

Доказательство. Пусть $\langle A_i; \le_i\rangle$ $(i \in I)$ — Ihm-дозволенные квазипорядки и алгебры $\mathfrak{A}_i = \langle A_i; \sigma_i\rangle$ таковы, что квазипорядки $\le_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}_i}$ совпадают с $\le_i$ для $i \in I$. Будем считать, что сигнатуры σ_i дизъюнктны для $i \in I$, и определим сигнатуру σ как $\bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$. При этом на $\prod\limits_{i\in I} A_i$ функции $f(x_1,\dots,x_n) \in \sigma$ определим следующим образом: для $g_1,\dots,g_n \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ пусть $f(g_1,\dots,g_n) \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ такова, что если $f \in \sigma_j$, то для $i \in I$

$$f(g_1,\dots,g_n)(i) = \begin{cases} f(g_1(i),\dots,g_n(i)), & \text{если } i = j,\\ g_1(i) & \text{иначе.}\end{cases}$$

Непосредственно замечается, что для любых $g_1, g_2 \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ отображение φ такое, что $\varphi(g_1) = g_2$, продолжимо до гомоморфизма алгебры $\langle g_1\rangle_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $\langle g_2\rangle_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ отображения φ_i такие, что $\varphi_i(g_1(i)) = g_2(i)$, продолжимы до гомоморфизмов алгебр $\langle g_1(i)\rangle\mathfrak{A}_i$ на алгебры $\langle g_2(i)\rangle_{\mathfrak{A}_i}$. Значит, для алгебры $\mathfrak{A} = \big\langle \prod\limits_{i\in I} A_i; \sigma\big\rangle$ имеет место совпадение квазипорядка $\big\langle \prod\limits_{i\in I} A_i; \le_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\big\rangle$ с $\prod\limits_{i\in I}\langle A_i; \le_i\rangle$, что и требовалось доказать.

2-*Линейным квазипорядком* назовем любой квазипорядок, частично упорядоченный фактор которого является двухэлементным линейно упорядоченным множеством. Точно так же, как доказывается широко известный факт, что любое частично упорядоченное множество $\langle A; \le\rangle$ вложимо в множество $\langle P(A); \subseteq\rangle$ своих подмножеств, а значит, в подходящую прямую степень двухэлементного линейно упорядоченного множества, доказывается вложимость любого квазиупорядоченного множества в подходящую прямую степень некоторого

2-линейного квазипорядка. Последний Ihm-дозволен в силу теоремы 2, и тем самым из указанной вложимости и теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Любой квазипорядок вложим в подходящий* Ihm-*дозволенный квазипорядок.*

Наконец, заметим, что для любого ультрафильтра D на множестве I и любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ имеем

$$\langle A^I/D; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}I/D} \rangle \cong \langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} \rangle I/D$$

и тем самым класс Ihm-дозволенных квазипорядков замкнут относительно ультрастепеней.

Представляет интерес дальнейшее исследование свойств классов Ihm-дозволенных и Ihm-запрещенных квазипорядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плоткин Б. И.* Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 224–248.
2. *Пинус А. Г.* О квазипорядке, индуцированном внутренними гомоморфизмами, и об операторе алгебраического замыкания // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 629–636.

Статья поступила 18 ноября 2015 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru