Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.925.54

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНО–МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n–ГО ПОРЯДКА

А. И. Перов, И. Д. Коструб

Аннотация. Для доказательства существования и единственности (или только существования) ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков используются принцип сжимающих отображений и теорема Тихонова о неподвижной точке. Важной является количественная оценка нелинейного возмущения, сохраняющего основные черты поведения линейного уравнения (асимптотическая устойчивость или экспоненциальная дихотомия) при переходе к нелинейному уравнению.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.408

Ключевые слова: нелинейные системы дифференциальных уравнений, ограниченные решения, принцип сжимающих отображений, теорема Тихонова о неподвижной точке.

При изучении ограниченных решений обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений используются различные методы: это и топологический метод Важевского (опирающийся на теорию ретрактов), и метод направляющих функций Красносельского и Перова (основанный на топологической степени отображения), и метод интегральных уравнений, и др. Настоящая статья посвящена методу интегральных уравнений, в котором проблема сводится к изучению ограниченных решений некоторой системы нелинейных интегральных уравнений. Для доказательства существования ограниченных решений системы нелинейных интегральных уравнений применяются различные принципы неподвижной точки от обычного и обобщенного принципов сжимающих отображений до топологических теорем Боля — Брауэра, принципа Шаудера и принципа Тихонова. Особенностью изложения является его нацеленность на уравнения высшего порядка, которые иногда встречаются в теории нелинейных колебаний. Несколько сужает круг возможных приложений слабая нелинейность уравнений (фактически условие Липшица). Наш перечень методов был бы неполным, если бы мы не упомянули многочисленные работы Воскресенского по методу сравнения и асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00197).

1. Матричные нерезонансные многочлены

Пусть n и d — фиксированные натуральные числа. Через n обозначается порядок дифференциального уравнения, а через d — размерность решения. Конечномерное d-мерное пространство, которое может быть как вещественным $\mathbb{R}^d$, так и комплексным $\mathbb{C}^d$, предполагается нормированным со стандартным обозначением нормы. Если $\mathbf{A}$ — квадратная $d \times d$-матрица, то через $\|\mathbf{A}\|$ обозначается ее операторная норма. Значительно более простой случай, когда $d = 1$, изучался в [1].

Рассмотрим линейное однородное векторно-матричное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ — постоянные $d \times d$-матрицы, причем матрица $\mathbf{A}_0$ невырожденна:

$$\det \mathbf{A}_0 \neq 0. \tag{1.2}$$

Выпишем соответствующие *матричный характеристический многочлен*

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{A}_n \tag{1.3}$$

и *скалярное характеристическое уравнение*

$$\varphi_{nd}(\lambda) \equiv \det \mathbf{L}_n(\lambda) = 0. \tag{1.4}$$

Выражение (1.3) в силу условия (1.2) есть *регулярный* матричный многочлен степени n и порядка d, а скалярный характеристический многочлен $\varphi_{nd}(\lambda)$ имеет степень nd [2, гл. IV, § 1].

Корни скалярного характеристического уравнения (1.4) обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{nd}$. Для нас важно знать, когда однородное дифференциальное уравнение (1.1) не имеет ненулевых ограниченных решений. Можно показать, что это имеет место тогда и только тогда, когда алгебраическое уравнение (1.4) не имеет ни нулевых, ни чисто мнимых корней, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda_1 \neq 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0,\ \dots,\ \operatorname{Re}\lambda_{nd} \neq 0. \tag{1.5}$$

Указанное предположение равносильно *нерезонансному условию*

$$\det \mathbf{L}_n(i\theta) \neq 0, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{1.6}$$

В этом случае при любом вещественном θ справедлива формула

$$\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{L}_n(i\theta)}{\det \mathbf{L}_n(i\theta)}. \tag{1.7}$$

Матричный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$, а также скалярный многочлен $\varphi_{nd}(\lambda)$, удовлетворяющие условию (1.6), называют *нерезонансными.*

Условие (1.6) заведомо выполнено, если скалярный характеристический многочлен $\varphi_{nd}(\lambda)$ *гурвицев*, т. е. все его корни лежат в открытой левой полуплоскости

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0,\ \dots,\ \operatorname{Re}\lambda_{nd} < 0. \tag{1.8}$$

В этом случае матричный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ также называют *гурвицевым.*

Отметим, что для нерезонансного матричного многочлена

$$\det \mathbf{A}_n \neq 0. \tag{1.9}$$

2. Матричная ограниченная функция Грина и интегральные постоянные

Рассмотрим линейное неоднородное векторно-матричное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0 x^{(n)} + \mathbf{A}_1 x^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_n x = \mathbf{f}(t), \tag{2.1}$$

в котором $\mathbf{f}(t)$ есть векторная непрерывная ограниченная (со значениями в $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{C}^d$) функция; последнее, как известно, означает, что

$$\|\mathbf{f}(t)\| < c, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{2.2}$$

Если выполнено нерезонансное условие (1.6), то линейное неоднородное уравнение (2.1) при любой непрерывной ограниченной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$, причем ограниченными оказываются все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ (а также и $\mathbf{x}^{(n)}(t)$) и имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)\,ds, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{G}(t)$ — это *матричная ограниченная функция Грина*, т. е. функция Грина задачи об ограниченных решениях для уравнения (2.1) (см., например, [3, гл. V, § 10; 4, гл. II, § 4; 5, гл. I, § 4]). Отметим оценку

$$\|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| \le \hat{c}e^{-\gamma|t|}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, n, \tag{2.5}$$

имеющую место при некоторых положительных $\hat{c}$ и γ.

Величина

$$\varkappa_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\|\,dt, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.6}$$

называется *j-й интегральной постоянной.* К ним естественно присоединить *n-ю интегральную постоянную*

$$\varkappa_n = \left\|\mathbf{A}_0^{-1}\right\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\|\,dt \quad (= V\{\mathbf{G}^{(n-1)}(t)\}), \tag{2.7}$$

где справа стоит вариация матричной функции $\mathbf{G}^{(n-1)}(t)$ на всей вещественной прямой. В силу оценки (2.5) все несобственные интегралы в формулах (2.6) и (2.7) так же, как и в формулах (2.3) и (2.4), абсолютно и равномерно сходятся.

Введем в рассмотрение банахово пространство $C = C(-\infty, +\infty)$ всех непрерывных и ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ (или $\mathbb{C}^d$), положив

$$\|\mathbf{f}(t)\|_C = \sup_{-\infty < t < +\infty} \|\mathbf{f}(t)\|. \tag{2.8}$$

Формулы (2.3) и (2.4) показывают, что

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \le \varkappa_j \|\mathbf{f}\|_C, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, n. \tag{2.9}$$

3. Матричная передаточная функция и частотные постоянные

Рассмотрим матричный нерезонансный многочлен (1.3). Напомним, что в теории автоматического управления функция $\mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{L}_n^{-1}(\lambda)$ комплексного переменного $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *матричной передаточной функцией*, а функция $\mathbf{H}(\theta) = \mathbf{W}(i\theta)$ вещественного переменного $\theta \in \mathbb{R}$ — *матричной частотной характеристикой* [6, гл. II, § 6].

Величина

$$\sigma_j = \max_{-\infty<t<+\infty} \big\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\|, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \tag{3.1}$$

называется *j-частотной постоянной*. Иногда к ним удобно причислять и *n-ю частотную постоянную*

$$\sigma_n = \sup_{-\infty<t<+\infty} \big\|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\|. \tag{3.2}$$

Наличие в одних формулах максимума, а в другой — только супремума объясняется тем, что

$$\big\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\| \sim \frac{1}{|i\theta|^n}\big\|A_0^{-1}\big\| \quad \text{при } |\theta| \to +\infty.$$

Из формул (3.1) и (3.2) вытекает, что

$$\big\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\| \le \sigma_j, \quad -\infty < \theta < +\infty, \ j = 0, 1, \dots, n-1, n. \tag{3.3}$$

Приведем простейшие оценки снизу частотных постоянных. При $j = 0$ из (3.3) следует неравенство $\big\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\| \le \sigma_0$, которое при $\theta = 0$ приводит к оценке (см. (1.9))

$$\sigma_0 \ge \big\|A_n^{-1}\big\|. \tag{3.4}$$

При $j = n$ из (3.3) получаем неравенство $\big\|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\| \le \sigma_n$, которое после предельного перехода при $|\theta| \to +\infty$ приводит к оценке (см. (1.2))

$$\sigma_n \ge \big\|A_0^{-1}\big\|. \tag{3.5}$$

Отметим еще одно интересное неравенство

$$\sigma_j^2 \le \sigma_{j-1}\sigma_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \tag{3.6}$$

означающее, что конечная последовательность $\{\sigma_j\}$ *логарифмически выпуклая*. Действительно, так как согласно (3.3)

$$\big\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\|^2 = \big\|(i\theta)^{j-1} \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\|\big\|(i\theta)^{j+1} \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\| \le \sigma_{j-1}\sigma_{j+1},$$

переходя к максимуму по θ в левой части написанного неравенства, в силу формулы (3.1) приходим к анонсированному неравенству (3.6).

Лемма 3.1. *Рассмотрим матричный нерезонансный многочлен* (3.1), *частотные постоянные которого обозначим через $\sigma_j(\mathbf{L}_n)$. Пусть возмущение*

$$\mathbf{\Delta L}(\lambda) = \mathbf{B}_0\lambda^n + \mathbf{B}_1\lambda^{n-1} + \dots + \mathbf{B}_n, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ — произвольные постоянные $d \times d$-матрицы, удовлетворяет условию

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n} \sigma_j(\mathbf{L}_n)\|\mathbf{B}_{n-j}\| < 1. \tag{3.8}$$

Тогда возмущенный матричный многочлен

$$\mathbf{M}_n(\lambda) = \mathbf{L}_n(\lambda) + \mathbf{\Delta L}_n(\lambda) \tag{3.9}$$

также нерезонансный и справедливы двусторонние оценки

$$\frac{\sigma_j(\mathbf{L}_n)}{1+q_\sigma} \le \sigma_j(\mathbf{M}_n) \le \frac{\sigma_j(\mathbf{L}_n)}{1-q_\sigma}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, n, \tag{3.10}$$

где $\sigma_j(\mathbf{M}_n)$ *— частотные постоянные возмущенного матричного многочлена* (3.9).

Из леммы 3.1 вытекает важное следствие: если матричный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ гурвицев, а возмущение $\mathbf{\Delta L}_n(\lambda)$ удовлетворяет условию малости (3.8), то возмущенный многочлен также гурвицев.

Доказательство. Так как из (3.7) в силу (3.3) и условия малости (3.8) имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{\Delta L}_n(i\theta)\| \le \sum_{j=0}^{n} \|(i\theta)^j \mathbf{B}_{n-j}\| \le \sum_{j=0}^{n-1} |(i\theta)^j| \|\mathbf{B}_{n-j}\| \\ \le \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j(L_n) \frac{\|\mathbf{B}_{n-j}\|}{\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|} = \frac{q_\sigma}{\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|},\end{aligned} \tag{3.11}$$

согласно оценке

$$\|\mathbf{M}_n(i\theta) - \mathbf{L}_n(i\theta)\| = \|\mathbf{\Delta L}_n(i\theta)\| \le \frac{q_\sigma}{\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|}, \tag{3.12}$$

справедливой при любом фиксированном θ, в соответствии с неравенством $q_\sigma < 1$ из обратимости матрицы $\mathbf{L}_n(i\theta)$ получаем обратимость матрицы $\mathbf{M}_n(i\theta)$. Поэтому возмущенный матричный многочлен $\mathbf{M}_n(\lambda)$ также нерезонансный. Как это утверждение, так и оценки

$$\frac{1}{1+q_\sigma}\left\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\| \le \left\|\mathbf{M}_n^{-1}(i\theta)\right\| \le \frac{1}{1-q_\sigma}\left\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\| \tag{3.13}$$

непосредственно вытекают из леммы 3.2. Из (3.13) немедленно следуют оценки (3.10). ☐

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *— квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда если матрица* $\mathbf{A}$ *обратима и выполнено условие*

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}, \tag{3.14}$$

то матрица $\mathbf{B}$ *также обратима и справедливы двусторонние оценки*

$$\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1+q} \le \|\mathbf{B}^{-1}\| \le \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1-q}, \tag{3.15}$$

где

$$q \equiv \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| < 1 \tag{3.16}$$

(*в силу условия* (3.14)).

Это утверждение, в общем, хорошо известно и встречается во многих монографиях (см., например, [7, п. 9.9.1]), однако оценка слева в (3.15) нам ранее не встречалась.

4. Сравнение интегральных и частотных постоянных

Приведем известную формулу

$$\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t)e^{-i\theta t}\,dt, \quad -\infty < \theta < +\infty, \tag{4.1}$$

означающую, что преобразование Фурье матричной ограниченной функции Грина совпадает с матричной частотной характеристикой. Из нее вытекает неравенство

$$\left\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}(t)\|\,dt = \varkappa_0,$$

переходя в котором слева к максимуму по θ, получим важное соотношение

$$\sigma_0 \le \varkappa_0. \tag{4.2}$$

Далее, из (4.1) интегрированием по частям приходим к равенствам

$$(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t)e^{-i\theta t}\,dt, \quad -\infty < \theta < +\infty,\ j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.3}$$

Эта формула говорит о том, что j*-я матричная частотная характеристика* — так называется левая часть написанного равенства — есть преобразование Фурье j-й производной матричной ограниченной функции Грина. Из формулы (4.3) согласно (2.6) следует неравенство

$$\left\|(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\|\,dt = \varkappa_j,$$

переходя в котором слева к максимуму по θ, в силу определения (3.1) получаем важное соотношение

$$\sigma_j \le \varkappa_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.4}$$

Ввиду формулы (4.3) при $j = n-1$ интегрированием по частям убеждаемся в том, что

$$(i\theta)^n\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \mathbf{A}_0^{-1} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t)e^{-i\theta t}\,dt, \quad -\infty < \theta < +\infty. \tag{4.5}$$

Отсюда, как и выше, согласно (2.7) вытекает неравенство

$$\left\|(i\theta)^n\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\| \le \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\|\,dt = \varkappa_n,$$

переходя в котором слева к максимуму по θ, в силу определения (3.2) получаем важное соотношение

$$\sigma_n \le \varkappa_n. \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. *В нерезонансном случае справедливы неравенства* (4.2), (4.4) *и* (4.6).

5. Интегральные операторы. Спектр и резольвента

Геометрический смысл интегральных и частотных постоянных полностью раскрывают приводимые ниже теоремы. Введем в рассмотрение интегральные операторы, определяемые формулами (2.3):

$$\mathbf{K}_j\mathbf{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)\,ds, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5.1}$$

и формулой (2.4):

$$\mathbf{K}_n\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Интегральный оператор* K_j *при любом* $j = 0, 1, \ldots, n-1, n$ *действует в банаховом пространстве* C *и является линейным ограниченным оператором, причем для указанных значений* j

$$\|\mathbf{K}_j\|_C \le \varkappa_j, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{spr}\mathbf{K}_j \le \sigma_j, \tag{5.4}$$

где в формуле (5.3) *имеется в виду норма интегрального оператора, а в формуле* (5.4) *— его спектральный радиус.*

Чтобы избежать недоразумений, поясним, что здесь и далее $\operatorname{sp}\mathbf{K}$ обозначает спектр оператора $\mathbf{K}$, а $\operatorname{spr}\mathbf{K}$ — его спектральный радиус.

Доказательство. Оценки (5.3) непосредственно вытекают из (2.8), а оценки (5.4) — из доказываемых ниже формул для спектральных радиусов (5.20)–(5.22). □

Прежде всего выпишем формулы для спектров $\operatorname{sp}\mathbf{K}_j$ интегральных операторов $\mathbf{K}_j$:

$$\operatorname{sp}\mathbf{K}_0 = 0 \cup \bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{sp}\bigl\{\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\bigr\}, \tag{5.5}$$

$$\operatorname{sp}\mathbf{K}_j = \bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{sp}\bigl\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\bigr\}, \quad 0 < j < n, \tag{5.6}$$

$$\operatorname{sp}\mathbf{K}_n = \bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{sp}\bigl\{(i\theta)^n\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\bigr\} \cup \operatorname{sp}\mathbf{A}_0^{-1}. \tag{5.7}$$

Появление нуля в формуле (5.5) объясняется тем, что диаметр спектра $\operatorname{sp}\bigl\{\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\bigr\}$ стремится к 0 при $|\theta| \to \infty$. Осталось заметить, что спектр интегрального оператора всегда является замкнутым множеством.

Доказательство. Докажем формулу (5.6) (остальные доказательства аналогичны). Пусть μ — собственное значение интегрального оператора $\mathbf{K}_j$, а $\mathbf{f}$ — соответствующая ему собственная функция:

$$\mathbf{K}_j\mathbf{f} = \mu\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \in C, \quad \mathbf{f} \ne \mathbf{0}. \tag{5.8}$$

Покажем, что μ входит в правую часть формулы (5.6). Это очевидно, если $\mu = 0$ (нуль в (5.6) получается при $\theta = 0$). Для $\mu \ne 0$ рассуждаем следующим образом: пусть $\mathbf{K}_0\mathbf{f} = \mathbf{x}$, тогда $\mathbf{K}_j\mathbf{f} = \mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(j)} = \mu\mathbf{f}$ согласно (5.8). Поэтому $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение однородного уравнения

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}(t) + \dots + \left(\mathbf{A}_{n-j} - \frac{1}{\mu}\mathbf{I}\right)\mathbf{x}^{(j)}(t) + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \tag{5.9}$$

с постоянными коэффициентами. По теореме Бора — Нойгебауэра [3, дополнение: почти периодические функции, § 17] это решение может быть только почти периодическим, точнее, тригонометрическим полиномом

$$\mathbf{x}(t) = \sum \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t} \tag{5.10}$$

(сумма конечная). Подставляя в уравнение (5.9), получаем

$$\mathbf{L}_n(i\theta_k)\mathbf{x}_k = \frac{1}{\mu}(i\theta_k)^j\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}. \tag{5.11}$$

Видим, что

$$\mu \in \operatorname{sp}\bigl\{(i\theta_k)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta_k)\bigr\} \tag{5.12}$$

и включение в одну сторону в формуле (5.6) установлено. Обратно, если имеет место (5.12), то функция $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_k e^{i\theta_k t}$, где $\mathbf{x}_k$ взято из (5.11), приводит к собственной функции $\mathbf{f}(t)$, для которой справедлива (5.8). □

Для построения резольвенты оператора $\mathbf{K}_j$ рассмотрим уравнение

$$(\zeta\mathbf{E} - \mathbf{K}_j)\mathbf{f} = \mathbf{g}, \tag{5.13}$$

в котором $\zeta \in \mathbb{C}$, ограниченная векторная функция $\mathbf{g}(t)$ является заданной, а непрерывная ограниченная векторная функция $\mathbf{f}(t)$ — искомой; $\mathbf{E}$ — единичный оператор в пространстве C.

Проверим, что если ζ не входит в правую часть формулы (5.5), (5.6) или (5.7), то для резольвенты соответственно имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\zeta}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\zeta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}\Bigl\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\zeta}\mathbf{I}\Bigr\}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\zeta}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\zeta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}^{(j)}\left\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\zeta}\lambda^j\mathbf{I}\right\}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds, \quad 0 < j < n, \tag{5.15}$$

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\zeta}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\zeta^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}^{(n)}\Bigl\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\zeta}\lambda^n\mathbf{I}\Bigr\}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds + \frac{1}{\zeta^2}\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t). \tag{5.16}$$

Здесь через $\mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda)\}(t)$ обозначена матричная ограниченная функция Грина, отвечающая нерезонансному многочлену $\mathbf{L}_n(\lambda)$.

Доказательство. Проверим лишь формулу (5.15) (проверка остальных производится аналогично). Предположим, что при заданном $\mathbf{g} \in C$ уравнение (5.13) имеет решение $\mathbf{f} \in C$. Тогда

$$\mathbf{K}_j\mathbf{f} = \zeta\mathbf{f} - \mathbf{g}. \tag{5.17}$$

Положим $\mathbf{K}_0\mathbf{f} = \mathbf{x}$. Тогда $\mathbf{K}_j\mathbf{f} = \mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(j)} = \zeta\mathbf{f} - \mathbf{g}$. Поэтому

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}(t) + \dots + \left(\mathbf{A}_{n-j} - \frac{1}{\zeta}\mathbf{I}\right)\mathbf{x}^{(j)}(t) + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\zeta}\mathbf{g}. \tag{5.18}$$

Нетрудно проверить, что при сделанном предположении относительно ζ матричный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\zeta}\lambda^j\mathbf{I}$ нерезонансный. Отсюда вытекает, что неоднородное уравнение (5.18) имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ и это решение можно записать в интегральном виде

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{\zeta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}\Big\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\zeta}\lambda^j\mathbf{I}\Big\}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{5.19}$$

Используя соотношение $\mathbf{x}^{(j)} = \zeta\mathbf{f} - \mathbf{g}$, из (5.19) выводим формулу (5.15). $\square$

Теорема 5.2. *Для спектра интегрального оператора* $\mathbf{K}_j$ *при любом* $j = 0, 1, \dots, n-1, n$ *справедливы формулы* (5.5)–(5.7).

Из теоремы 5.2 вытекают точные формулы для спектральных радиусов:

$$\operatorname{spr}\mathbf{K}_0 = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{spr}\big\{\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\}, \tag{5.20}$$

$$\operatorname{spr}\mathbf{K}_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{spr}\big\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\}, \quad 0 < j < n, \tag{5.21}$$

$$\operatorname{spr}\mathbf{K}_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \operatorname{spr}\big\{(i\theta)^n\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\big\}. \tag{5.22}$$

Теорема 5.3. *Если* $\zeta \notin \operatorname{sp}\mathbf{K}_j$, *то при любом* $j = 0, 1, \dots, n-1, n$ *для резольвенты имеют место формулы* (5.14)–(5.16) *соответственно.*

6. Нелинейные уравнения. Условие Липшица. Метод последовательных приближений

Рассмотрим нелинейное векторно-матричное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \tag{6.1}$$

при прежних предположениях относительно матричных коэффициентов линейной его части, в котором нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{(n-1)}) : \mathbb{R}\times\underbrace{\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d}_{n \text{ раз}} \to \mathbb{R}^d$ или $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{(n-1)}) : \mathbb{R}\times\underbrace{\mathbb{C}^d \times \dots \times \mathbb{C}^d}_{n \text{ раз}} \to \mathbb{C}^d$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица по пространственным переменным:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{(n-1)}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{(n-1)})\| \le \sum_{j=0}^{n-1} l_j\|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\|, \tag{6.2}$$

где $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$ — некоторые неотрицательные постоянные (липшицевы постоянные). Особо выделим векторную функцию $\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, которая по предположению непрерывна. Впоследствии нам потребуется условие:

$$\text{векторная функция } \mathbf{f}_0(t) \text{ ограничена.} \tag{6.3}$$

Из вышеизложенного вытекают, во-первых, непрерывность векторной функции $\mathbf{f}(t,\, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ по совокупности переменных и, во-вторых, оценка

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})\| \le \sum_{j=0}^{n-1} l_j\|\mathbf{x}_j\| + \|\mathbf{f}_0\|_C, \tag{6.4}$$

если дополнительно известно, что векторная функция $\mathbf{f}_0(t)$ ограничена.

Очевидно, что при сделанных предположениях уравнение (6.1) при любых начальных условиях $\mathbf{x}^{(j)}(\tau) = \boldsymbol{\zeta}_j$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет единственное решение и это решение можно считать определенным на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Дифференциальное уравнение (6.1) при выполнении условия Липшица (6.2) называется *слабо нелинейным* или *квазилинейным.*

Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (6.1) при выполнении условий (6.2) и (6.3). Согласно теореме Эсклангона, которая легко может быть перенесена на рассматриваемый нами нелинейный случай, если воспользоваться рассуждениями из [5, гл. I, § 2], будут ограниченными также и производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ (а также $\mathbf{x}^{(n)}(t)$). Тогда с учетом оценки (6.4) будет ограниченной векторная непрерывная функция $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t))$. Таким образом, можно считать, что ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ нелинейного уравнения (6.1) является одновременно и ограниченным решением линейного неоднородного уравнения (2.1) с известной правой частью $\mathbf{f}(t)$. Поэтому, воспользовавшись формулами (2.3), можно написать

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(s))\, ds, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6.5}$$

Положим $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}^{(j)}(t)$ и от системы (6.5) перейдем к новой системе n векторных нелинейных интегральных уравнений

$$\mathbf{x}_j(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0(s), \mathbf{x}_1(s), \ldots, \mathbf{x}_{n-1}(s))\, ds, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6.6}$$

Для доказательства существования и единственности ограниченного решения уравнения (6.1), а также для его приближенного нахождения можно использовать классический метод последовательных приближений, к описанию которого переходим.

В качестве нулевого приближения $\mathbf{x}^{[0]}(t)$ берется любая векторная функция, имеющая непрерывные и ограниченные производными вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно. После этого все последующие приближения $\mathbf{x}^{[1]}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[k]}(t)$ единообразно находятся по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{[k](n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{[k](n-1)} + \cdots + \mathbf{A}_n\mathbf{x}^{[k]} \\ &\qquad = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^{[k-1]}(t), \mathbf{x}^{[k-1]\bullet}(t), \ldots, \mathbf{x}^{[k-1](n-1)}(t)), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где $\mathbf{x}^{[k]}(t)$ есть единственное ограниченное (вместе с производными до порядка $n-1$ включительно) решение написанного уравнения с известной правой частью. Этот итерационный процесс может быть записан в интегральном виде

$$\mathbf{x}_j^{[k]}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}\big(s, \mathbf{x}_0^{[k-1]}(s), \mathbf{x}_1^{[k-1]}(s), \ldots, \mathbf{x}_{n-1}^{[k-1]}(s)\big)\, ds, \tag{6.8}$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-1, \ k = 1, 2, \ldots.$$

Во всей оставшейся части статьи основную роль в наших рассуждениях играет интегральное условие

$$q \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j l_j < 1, \tag{6.9}$$

которое иногда будем называть *$\varkappa$-условием.*

7. Теорема существования и единственности. Принцип сжимающих отображений

Костяк теоретических утверждений составляют основные четыре теоремы.

Теорема 7.1. *Пусть выполнено нерезонансное условие* (1.6). *Пусть нелинейная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ *непрерывна по времени* t *и удовлетворяет условию Липшица* (6.2) *и непрерывная векторная функция* $\mathbf{f}_0(t)$ *ограничена, т. е. выполнено условие* (6.3). *Пусть, наконец, выполнено интегральное условие* (6.9).

Тогда уравнение (6.1) *имеет единственное решение* $\mathbf{x}(t)$, *ограниченное вместе с производными до порядка* $(n-1)$ *включительно, и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \leq \frac{\varkappa_j}{1-q}\|\mathbf{f}_0\|_C, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.1}$$

Доказательство. Из системы (6.5) согласно оценкам (2.9) находим

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \leq \varkappa_j \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_C + \|\mathbf{f}_0\|_C \right\}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{7.2}$$

Умножив j-е неравенство на l_j и сложив почленно получившиеся неравенства, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \leq q \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_C + \|\mathbf{f}_0\|_C \right\},$$

откуда согласно условию (6.9) приходим к промежуточной оценке

$$\sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \leq \frac{q}{1-q}\|\mathbf{f}_0\|_C,$$

подставляя которую в (7.2), находим оценку (7.1).

Для доказательства существования и единственности ограниченного решения системы n нелинейных векторных интегральных уравнений (6.6) применим обобщенный принцип сжимающих отображений [8; 9, гл. 13, п. 13.1; 10, 11].

Введем в рассмотрение банахово пространство $C^n = \underbrace{C \times \cdots \times C}_{n \text{ раз}}$ с элементами $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\}$, где $\mathbf{x}_j \in C$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. В этом пространстве рассмотрим нелинейный оператор $\mathbf{F} : C^n \to C^n$, положив $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{F}_0(\mathbf{x}), \mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{x})\}$, где $\mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ есть правая часть формулы (6.6) для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда система (6.6) коротко запишется в виде операторного уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{7.3}$$

Превратим C^n в обобщенное банахово пространство, взяв в качестве обобщенной нормы n-мерный неотрицательный вектор

$$\lvert \mathbf{x} \rvert = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_0\|_C \\ \|\mathbf{x}_1\|_C \\ \cdots \\ \|\mathbf{x}_{n-1}\|_C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{7.4}$$

Из j-го уравнения системы (6.6) в силу оценки (2.9) и условия Липшица (6.2) имеем

$$\|\mathbf{F}_j(\mathbf{x})-\mathbf{F}_j(\mathbf{y})\|_C \le \varkappa_j \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\|_C, \quad j=0,1,\dots,n-1. \tag{7.5}$$

Видим, что согласно (7.4)

$$\boldsymbol{|}\mathbf{F}(\mathbf{x})-\mathbf{F}(\mathbf{y})\boldsymbol{|} \le \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\mathbf{x}-\mathbf{y}\boldsymbol{|}, \tag{7.6}$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{Q} = (\varkappa_j l_k), \quad \operatorname{spr}\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j l_j < 1. \tag{7.7}$$

Встречающиеся в формуле (7.6), как и в формулах (7.9)–(7.11), оценки понимаются покомпонентно; то же самое замечание относится к формуле (7.7), в которой неравенство следует понимать поэлементно. Неотрицательная матрица $\mathbf{Q}$ в силу $\varkappa$-условия (6.9) имеет спектральный радиус меньше единицы. Согласно обобщенному принципу сжимающих отображений оператор $\mathbf{F}$ имеет в C^n единственную неподвижную точку, т. е. уравнение (7.3) имеет единственное решение. $\square$

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *ограниченное решение и его производные до* $(n-1)$*-го порядка включительно могут быть получены методом последовательных приближений* (6.7) *или* (6.8), *при этом погрешности приближений характеризуются следующими оценками:*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}-\mathbf{x}^{[k](j)}\|_C \le \frac{q^{k-1}}{1-q}\varkappa_j \sum_{i=0}^{n-1} l_i \|\mathbf{x}^{[1](i)}-\mathbf{x}^{[0](i)}\|_C, \quad j=0,1,\dots,n-1,\ k=1,2,\dots. \tag{7.8}$$

Доказательство. Метод последовательных приближений (6.8) коротко может быть записан так:

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{[k-1]}), \quad k=1,2,\dots. \tag{7.9}$$

В терминах обобщенной нормы (7.4) оценка погрешности имеет вид

$$\boldsymbol{|}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{[k]}\boldsymbol{|} \le \mathbf{Q}^k(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\boldsymbol{|}\mathbf{x}^{[1]}-\mathbf{x}^{[0]}\boldsymbol{|}, \quad k=1,2,\dots. \tag{7.10}$$

Так как

$$\mathbf{Q}^k = q^{k-1}\mathbf{Q}, \quad (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{I}+\frac{1}{1-q}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q}^k(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} = \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q},$$

оценка (7.10) принимает вид

$$\boldsymbol{|}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{[k]}\boldsymbol{|} \le \frac{q^{k-1}}{1-q}\mathbf{Q}\boldsymbol{|}\mathbf{x}^{[1]}-\mathbf{x}^{[0]}\boldsymbol{|}, \tag{7.11}$$

покомпонентная запись которой в точности приводит к оценкам (7.8). $\square$

Теорема 7.3. *Если в условиях теоремы* 7.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1})$ *по* t *почти периодическая, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (6.1) *также почти периодическое, причем*

$$\text{группа частот } \mathbf{x}(t) \text{ содержится в группе частот } \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}). \tag{7.12}$$

Доказательство. Почти периодичность решения $\mathbf{x}(t)$ вытекает из теоремы Америо [3, дополнение: почти периодические функции, § 21]. Выпишем ряд Фурье

$$\mathbf{x}(t) \sim \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\lambda_k t}. \tag{7.13}$$

Показатели Фурье λ_k иначе называются *частотами*, совокупность всех частот образует *спектр* $\lambda = \{\lambda_k\}$ векторной функции $\mathbf{x}(t)$, а наименьшая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$, содержащая весь спектр λ, называется *группой частот* почти периодической функции $\mathbf{x}(t)$ и обозначается через (λ). Она состоит из всех конечных линейных целочисленных комбинаций частот [12, гл. I, § 5] (ср. с [13, гл. II, § 6], где группа частот именуется *модулем*).

В условиях теоремы 7.3 можно указать такое конечное или счетное множество частот $\mu = \{\mu_k\}$, что

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \sim \sum_k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) e^{i\mu_k t}. \tag{7.14}$$

Множество μ называется *спектром* рассматриваемой почти периодической функции, а (μ) обозначает ее *группу частот.*

Чтобы доказать включение (7.12), несколько изменим ход доказательства теоремы 7.1. Вместо пространства C возьмем пространство $P_{(\mu)}$ — банахово пространство всех векторных почти периодических функций, спектр которых лежит в (μ), с обычной sup-нормой. Опираясь на теорему аппроксимации теории почти периодических функций и на теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций на компактном множестве в конечномерном пространстве многочленами, можно показать, что нелинейный оператор $\mathbf{F}$ действует в банаховом пространстве $P^n_{(\mu)} = \underbrace{P_{(\mu)} \times \dots \times P_{(\mu)}}_{n \text{ раз}}$. Рассматривая $P^n_{(\mu)}$ как обобщенное банахово пространство с обобщенной нормой типа (7.4), видим, что уравнение (7.3) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$, где $\mathbf{x}_j \in P_{(\mu)}$ для $j = 0, 1, \dots, n-1$. Включение (7.12) установлено. $\square$

Теорема 7.4. *Пусть для уравнения* (6.1) *матричный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *линейной части уравнения гурвицев и тем самым выполнено нерезонансное условие* (1.6). *Пусть также выполнены все остальные предположения теоремы* 7.1.

Тогда справедливы все утверждения теоремы 7.1 *и существующее в условиях этой теоремы единственное ограниченное решение уравнения* (6.1) *асимптотически устойчиво в целом.*

Последнее означает, что если $\mathbf{x}(t)$ — единственное ограниченное решение уравнения (6.1), а $\mathbf{y}(t)$ — любое другое решение уравнения того же самого уравнения, то [3, гл. IV, § 7]

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t)\| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty \text{ для } j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{7.15}$$

Доказательство проводится по той схеме, что и в статье [1] для скалярного дифференциального уравнения n-го порядка. Теорема 7.4 может рассматриваться как некоторый признак конвергентности [14, гл. I, § 7].

8. Теорема существования. Принцип неподвижной точки Тихонова

Несколько ослабив условия п. 7, придем к теореме существования ограниченного решения, в которой уже ничего не говорится ни о его единственности, ни о сходимости к нему метода последовательных приближений. Принцип сжимающих отображений здесь уже не годится — его место занимает принцип неподвижной точки Тихонова [7, п. 3.6; 15; 16, гл. XII].

В этом пункте рассматривается уравнение (6.1), в котором векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет *условию типа Липшица*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})\| \le \sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}_j\| + a, \tag{8.1}$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ — неотрицательные липшицевы постоянные, а $a > 0$.

Теорема 8.1. *Пусть выполнено нерезонансное условие* (1.6) *и нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию типа Липшица* (8.1). *Пусть также выполнено интегральное условие* (6.9).

Тогда нелинейное уравнение (6.1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение; для любого ограниченного решения все его производные до* $(n-1)$*-го порядка включительно также ограниченные и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_C \le \frac{\varkappa_j}{1-q} a, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8.2}$$

Доказательство. Здесь так же, как и в условиях теоремы 7.1, имеет место теорема Эсклангона, согласно которой ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (6.1) всегда имеет ограниченные производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$. При установлении этого факта важную роль играет условие типа Липшица (8.1), в то время как интегральное условие (6.9) не играет никакой роли. После этого замечания оценки (8.2) устанавливаются таким же образом, как и при доказательстве теоремы 7.1.

Перейдем к доказательству существования ограниченного решения уравнения (6.1). Обозначим через S совокупность всех $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in C^n$ вида $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_{n-1}(t)\}$, где $\mathbf{x}_0(t)$ — произвольная непрерывная и ограниченная векторная функция, имеющая непрерывные и ограниченные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно, а $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_0^{(j)}(t)$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и подчиненная оценкам (8.2). Нетрудно видеть, что S есть ограниченное замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве C^n. На множестве S рассмотрим уравнение

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \tag{8.3}$$

Покажем, что

$$\mathbf{F}S \subseteq S. \tag{8.4}$$

Действительно, если $\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$, то, во-первых, если $\mathbf{y}(t) = \{\mathbf{y}_0(t), \mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_{n-1}(t)\}$, то $\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{y}_0^{(j)}(t)$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и, во-вторых, из условия (8.1) и интегрального условия (6.9) имеем

$$\|\mathbf{F}_j(\mathbf{x})\|_C \le \varkappa_j\left(\sum_{k=0}^{n-1} l_k\|\mathbf{x}^{(k)}\| + a\right) \le \varkappa_j\left(\sum_{k=0}^{n-1} l_k\frac{\varkappa_k}{1-q}a + a\right)$$
$$= \varkappa_j\left(\frac{q}{1-q}+1\right) = \frac{\varkappa_j}{1-q}a,$$

и включение (8.4) установлено.

Однако непрерывный нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ не является компактным в банаховом пространстве C^n. Поэтому здесь неприменим принцип Шаудера. Выход состоит в том, чтобы превратить C^n в линейное локально выпуклое топологическое пространство, в котором оператор $\mathbf{F}$, оставаясь по-прежнему непрерывным, становится таким, что множество $\mathbf{F}S$ имеет компактное замыкание, а это позволяет для доказательства существования неподвижной точки оператора $\mathbf{F}$ применить принцип Тихонова [16, гл. XII].

Проверим, что множество $\mathbf{F}S$ имеет компактное замыкание, т. е. множество $\overline{\mathbf{F}S}$ компактно в линейном локально выпуклом топологическом пространстве C^n (для обозначения нового пространства используем старое обозначение). Для этого достаточно установить, что множество функций $\mathbf{y}(t) = \{\mathbf{y}_0(t), \mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{n-1}(t)\}$, где $\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{F}_j[\mathbf{x}(t)]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $\mathbf{x}(t) \in S$, компактно в смысле равномерной сходимости на любом отрезке $[a, b]$, т. е. в метрике пространства $C^n[a, b]$. По построению имеем

$$\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{y}_0^{(j)}(t), \quad \bigl\|\mathbf{y}_0^{(j)}\bigr\|_C \le \alpha_j \equiv \frac{\varkappa_j}{1-q}a, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{8.5}$$

По теореме Арцела — Асколи каждое семейство функций $\bigl\{\mathbf{y}_0^{(j)}(t)\bigr\}$, $j = 0, 1, \dots, n-2$, компактно в смысле метрики пространства $C[a, b]$, поскольку оценка $\bigl\|\mathbf{y}_0^{(j)}(t)\bigr\|_C \le \alpha_j$ гарантирует равномерную ограниченность этого семейства функций, а оценка $\bigl\|\mathbf{y}_0^{(j+1)}(t)\bigr\|_C \le \alpha_{j+1}$ — его равностепенную непрерывность. Для доказательства компактности семейства $\bigl\{\mathbf{y}_0^{(n-1)}(t)\bigr\}$ заметим, что из оценки (8.5) при $j = n-1$ вытекает его равномерная ограниченность, а оценка

$$\bigl\|\mathbf{y}_0^{(n)}\bigr\|_C \le \bigl\|A_0^{-1}\bigr\|\left(\sum_{j=0}^{n-1}(l_j + \|A_{n-j}\|)\alpha_j + a\right) \equiv \alpha_n, \tag{8.6}$$

которая выводится из уравнения (6.1) в силу условия типа Липшица (8.1) и оценки (8.5), гарантирует равностепенную непрерывность изучаемого семейства функций; ссылка на теорему Арцела — Асколи завершает наши рассуждения. □

Указанием на то, что при изучении ограниченных решений можно опираться на принцип Тихонова, авторы обязаны П. П. Забрейко, которому приносится искренняя благодарность.

Будем искать решение уравнения (8.8) методом последовательных приближений

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}[\mathbf{x}^{[k-1]}], \quad k = 1, 2, \dots, \tag{8.7}$$

начиная с произвольного $\mathbf{x}^{[0]}$ из C^n. Так как о сходимости приближений говорить не приходится, ограничимся следующим утверждением, которое приведем без доказательства.

Теорема 8.2. *В условиях теоремы* 8.1 *имеют место оценки*

$$\|\mathbf{x}^{[k](j)}\|_C \le q^{k-1}\varkappa_j \sum_{i=0}^{n-1} l_i \|\mathbf{x}^{[0](i)}\|_C + \frac{\varkappa_j}{1-q}a, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{8.8}$$

Теорема 8.3. *Если в условиях теоремы* 8.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$ *почти периодическая по* t, *то среди ограниченных решений уравнения* (6.1) *есть по крайней мере одно* $\mathbf{x}(t)$, *которое также почти периодическое, причем*

$$\text{группа частот } \mathbf{x}(t) \text{ содержится в группе частот } \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}). \tag{8.9}$$

Эта теорема (без включения (8.9)) приведена без доказательства в [1] для случая $d = 1$.

Доказательство. В периодическом случае, когда

$$\mathbf{f}(t + \omega, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \tag{8.10}$$

при некотором $\omega > 0$, соответствующий переход к системе нелинейных интегральных уравнений с помощью периодической функции Грина приводит к нелинейному интегральному оператору F_ω, который является компактным. В этом случае для доказательства существования периодического решения применим принцип Шаудера.

В почти периодическом случае доказательство теоремы 8.3 проводится, как в теореме 8.1, но только вместо пространства C^n рассматривается пространство $P^n_{(\mu)}$ (относительно используемых обозначений см. доказательство теоремы 7.3) и используется принцип Тихонова. ☐

Теорема 8.4. *Пусть для уравнения* (6.1) *матричный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *линейной части уравнения гурвицев и тем самым выполнено нерезонансное условие* (1.6). *Пусть также выполнены все остальные предположения теоремы* 8.1.

Тогда справедливы все утверждения теоремы 8.1 *и нелинейное дифференциальное уравнение* (6.1) *диссипативно, причем ядро диссипативности лежит в параллелепипеде*

$$D = \left\{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{nd} : \|\mathbf{x}_j\| \le \frac{\varkappa_j}{1-q}a, \ j = 0, 1, \ldots, n-1\right\}. \tag{8.11}$$

По поводу диссипативности дифференциальных уравнений см., например, [14, гл. I, § 2–5]. *Ядром диссипативности* называется наименьшее ограниченное замкнутое множество K, лежащее в пространстве $\underbrace{\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d}_{n \text{ раз}}$, к которому притягиваются при $t \to +\infty$ все решения системы

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{x}_1,\\
\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2,\\
&\ldots\\
\dot{\mathbf{x}}_{n-2} &= \mathbf{x}_{n-1},\\
\dot{\mathbf{x}}_{n-1} &= -\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_n\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{n-1}) + \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}).
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Теорема 8.4 может рассматриваться как некоторый признак диссипативности.

9. Экспоненциальная дихотомия

В этом пункте рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (6.1) или, что то же самое, систему (8.12) в предположении, что скалярное характеристическое уравнение (1.4), не имея корней на мнимой прямой (считается, что выполнено нерезонансное условие (1.6)), имеет их как в левой, так и в правой полуплоскостях. В этом случае решение однородного уравнения (1.1) обладает свойством экспоненциальной дихотомии.

Согласно теореме 7.1, условия которой предполагаются выполненными, нелинейное дифференциальное уравнение (6.1) имеет единственное ограниченное решение, которое здесь обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}(t)$. Пусть p — число корней скалярного характеристического уравнения (1.4), лежащих в левой полуплоскости, $0 < p < nd$. Покажем, что в рассматриваемом случае в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{nd}$ существует такое p-мерное нелинейное многообразие S_+, что если для решения $\mathbf{x}(t)$ уравнения (6.1)

$$(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(0)) \in S_+, \tag{9.1}$$

то $\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Многообразие S_+ называется *многообразием условной устойчивости* [3, гл. IV, § 22].

Для доказательства существования и единственности нелинейного многообразия с описанными выше свойствами вновь прибегнем к методу интегральных уравнений. Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение нелинейного дифференциального уравнения (6.1), для которого $\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \tilde{\mathbf{x}}^{(j)}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, т. е. имеет место соотношение (9.1) для $j = 0$. Тогда разность $\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ является ограниченной векторной функцией на неотрицательной полупрямой $\mathbb{R}_+$: $0 \le t < +\infty$ и, значит, $\mathbf{x}(t)$ также ограничена на $\mathbb{R}_+$.

По теореме Эсклангона, а она здесь также имеет место по тем же соображениям, которые были приведены выше при доказательстве теоремы 7.1, на $\mathbb{R}_+$ ограничена не только $\mathbf{x}(t)$, но и все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$. Таким образом, можно считать, что решение $\mathbf{x}(t)$ нелинейного уравнения (6.1), ограниченное на $\mathbb{R}_+$, также является решением линейного неоднородного уравнения (2.1), в котором $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t))$ — ограниченная на $\mathbb{R}_+$ непрерывная векторная функция. Поэтому (см., например, [4, гл. II, § 4]) для $\mathbf{x}(t)$ получаем интегральное уравнение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{h}(t) + \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{G}(t-s)\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(s))\, ds, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{h}(t)$ — некоторое решение однородного уравнения (1.1), стремящееся к нулю при $t \to +\infty$ вместе со своими производными вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно (совокупность всех таких решений образуют p-мерное линейное многообразие), а $\mathbf{G}(t)$, как обычно, есть ограниченная матричная функция Грина, построенная для неоднородного уравнения (2.1).

Дополним уравнение (9.2) уравнениями для производных искомого решения и запишем соответствующую систему нелинейных интегральных уравнений:

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \mathbf{h}^{(j)}(t) + \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(s))\, ds,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.3}$$

Полагая $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}^{(j)}(t)$ и $\mathbf{h}_j(t) = \mathbf{h}^{(j)}(t)$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$, перейдем от системы (9.3) к новой системе n нелинейных векторных интегральных уравнений

$$\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{h}_j(t) + \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_0(s), \mathbf{x}_1(s), \ldots, \mathbf{x}_{n-1}(s))\, ds, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.4}$$

Введем в рассмотрение банахово пространство $C_+ = C_+[0, +\infty)$ всех непрерывных и ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, положив

$$\|\mathbf{f}\|_+ = \sup_{0 \le t < +\infty} \|\mathbf{f}\|. \tag{9.5}$$

Теорема 9.1. *Пусть для нелинейного дифференциального уравнения* (6.1) *выполнено нерезонансное условие* (1.6), *причем характеристический многочлен имеет p корней в левой полуплоскости. Пусть также выполнены все остальные предположения теоремы* 7.1.

Тогда для любого решения $\mathbf{h}(t)$ *с описанными выше свойствами система интегральных уравнений* (9.3) *имеет единственное решение* $\mathbf{x}(t)$, *которое является ограниченным на неотрицательной полупрямой* $\mathbb{R}_+$ *вместе со своими производными до порядка* $n-1$ *включительно, причем имеют место следующие оценки:*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_+ \le \|\mathbf{h}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)}\|_+ + \frac{\varkappa_j}{1-q} \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{h}^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\|_+, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9.6}$$

где

$$\mathbf{u}(t) = \int\limits_0^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}_0(s)\, ds, \tag{9.7}$$

и справедливы соотношения (9.1).

Доказательство. Прежде всего докажем оценки (9.6). Пусть $\mathbf{x}(t)$ — решение системы нелинейных интегральных уравнений (9.3), ограниченное на $\mathbb{R}_+$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно. Из (9.3) получаем

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_+ \le \|\mathbf{h}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)}\|_+ + \varkappa_j \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_+, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.8}$$

Умножив j-е неравенство на l_j и сложив почленно все полученные таким образом неравенства, придем к следующему неравенству:

$$\sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_+ \le \sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{h}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)}\|_+ + q \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_+,$$

из которого в силу интегрального условия (6.9) вытекает промежуточная оценка

$$\sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_+ \le \frac{1}{1-q} \sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{h}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)}\|_+.$$

Используя этот результат в первоначальном неравенстве (9.8), приходим к требуемым оценкам (9.6).

Для доказательства существования и единственности ограниченного на неотрицательной полупрямой решения системы n интегральных уравнений (9.4) применим обобщенный принцип сжимающих отображений [8; 9, гл. 13, п. 13.1; 10, 11]. Обозначим через C_+^n банахово пространство $\underbrace{C^n \times \cdots \times C^n}_{n \text{ раз}}$ элементов $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1})$, где $\mathbf{x}_j \in C_+$ для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. В этом пространстве рассмотрим нелинейный оператор $\mathbf{F} : C_+^n \to C_+^n$, положив $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{F}_0(\mathbf{x}), \mathbf{F}_1(\mathbf{x})_1,\ \ldots, \mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{x})\}$, где $\mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ есть правая часть формулы (9.4) для $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда система (9.4) коротко запишется в виде операторного уравнения

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{9.9}$$

Превратим C_+^n в обобщенное банахово пространство, взяв в качестве обобщенной нормы n-мерный неотрицательный вектор

$$\left|\mathbf{x}\right|_+ = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_0\|_+ \\ \|\mathbf{x}_1\|_+ \\ \cdots \\ \|\mathbf{x}_{n-1}\|_+ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{9.10}$$

Из j-го уравнения системы (9.4), проводя обычные оценки, в силу условия Липшица (6.2)

$$\|\mathbf{F}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_j(\mathbf{y})\|_+ \le \varkappa_j \sum_{k=0}^{n-1} l_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|_+, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.11}$$

Видим, что согласно (9.10)

$$\left|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\right|_+ \le \mathbf{Q}\left|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|_+, \tag{9.12}$$

где

$$\mathbf{0} \le \mathbf{Q} = (\varkappa_j l_k), \quad \operatorname{spr} \mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{n-1} \varkappa_j l_j < 1. \quad \square \tag{9.13}$$

10. Иллюстративный пример

Нахождение интегральных и частотных постоянных возможно в исключительных случаях. Приведем пример, в котором частотные постоянные удалось получить в явном виде. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 x^{(n)} + a_n x = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}),$$

в котором $a_0 \ne 0$, $a_n \ne 0$ — вещественные постоянные, а правая часть непрерывна по переменной t. Предположим, что выполнено условие Липшица

$$|f(t, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)| \le \sum_{i=0}^{n} l_i |x_i - y_i|,$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные. Предположим еще, что непрерывная функция $f(t, 0, 0, \ldots, 0, 0)$ ограничена. Пусть при четном n выполнено условие

$$l_0 \frac{1}{|a_n|} + \sum_{j=1}^{n-1} l_j \left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{1-\frac{j}{n}} \frac{1}{|a_n|^{1-\frac{j}{n}} |a_0|^{\frac{j}{n}}} + l_n \frac{1}{|a_0|} < 1,$$

а при нечетном n — другое условие

$$l_0\frac{1}{|a_n|}+\sum_{j=1}^{n-1} l_j \sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{j}{n}}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{1-\frac{j}{n}}}\,\frac{1}{|a_n|^{1-\frac{j}{n}}|a_0|^{\frac{j}{n}}}+l_n\frac{1}{|a_0|}<1.$$

Тогда нелинейное уравнение имеет единственное ограниченное решение, у которого оказываются ограниченными все производные до n-го порядка включительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перов А. И.* Об ограниченных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 9. С. 1228–1244.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.
6. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1971.
7. *Эдвардс Ф.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
8. *Перов А. И.* О задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1964. Вып. 2. С. 115–134.
9. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
10. *Перов А. И.* Обобщенный принцип сжимающих отображений // Вестн. ВГУ. 2005. № 1. С. 196–207.
11. *Zabrejko P. P.* K-metric and K-normed linear spaces: survey // Collect. Math. 1997. V. 48, N 4–6. P. 825–859.
12. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
13. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
14. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.; Л.: Наука, 1964.
15. *Тихонов А. Н.* Ein Fixpunktsatz // Math. Ann. 1935. N 111. P. 767–776.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила 22 сентября 2015 г.

Перов Анатолий Иванович, Коструб Ирина Дмитриевна
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
`anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru`