Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.542

УДВОЕННЫЕ ГРУППЫ ФРОБЕНИУСА, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРОСТОЙ ГРУППЕ $U_3(3)$

В. Д. Мазуров

Аннотация. Описывается строение удвоенных групп Фробениуса, изоспектральных конечной простой группе $U_3(3)$, и строятся соответствующие примеры.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.615

Ключевые слова: спектр, распознаваемая группа, группа Фробениуса, простая унитарная группа.

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Поскольку множество $\omega(G)$ замкнуто по отношению делимости, оно однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, состоящим из максимальных по делимости элементов спектра.

Будем говорить, что G *распознаваема* (более точно, *распознаваема по спектру в классе конечных групп*), если любая конечная группа, изоспектральная G, изоморфна G. Группа G *нераспознаваема по спектру*, если существует бесконечно много попарно не изоморфных групп, изоспектральных G.

В [1] доказано, что группа нераспознаваема в том и только в том случае, когда она изоспектральна группе, содержащей нетривиальную абелеву нормальную подгруппу.

Удвоенной группой Фробениуса называется группа G, содержащая нормальную подгруппу Фробениуса B с ядром A такую, что G/A является группой Фробениуса с ядром B/A.

Графом простых чисел или *графом Грюнберга — Кегеля* $GK(G)$ группы G называется неориентированный граф, вершинами которого служат простые делители порядка G и два разных простых делителя p и q смежны, если G содержит элемент порядка pq.

В [2] доказано, что разрешимая группа G с несвязным графом $GK(G)$ является группой Фробениуса или удвоенной группой Фробениуса. М. Р. Алеева (Зиновьева) показала [3], что список простых групп, изоспектральных группам Фробениуса, исчерпывается группами $L_3(3)$ и $U_3(3)$, а простыми группами, изоспектральными удвоенным группам Фробениуса, могут быть только группы $U_3(3)$ и $S_4(3)$, но вопрос о существовании таких удвоенных групп Фробениуса оставался открытым. В [4] доказано, что простая группа, изоспектральная разрешимой, изоморфна одной из групп $L_3(3), U_3(3), S_4(3)$ или A_{10}.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14–21–00065).

А. М. Старолетов [5] описал группы, изоспектральные A_{10}. Все они неразрешимы. А. В. Заварницин [6] построил пример удвоенной группы Фробениуса порядка $5648590729620 = 2^2 \cdot 3^{24} \cdot 5$, изоспектральной $S_4(3)$.

В этой работе описана структура и даны примеры удвоенных групп Фробениуса, изоспектральных $U_3(3)$.

Теорема 1. *Пусть G — удвоенная группа Фробениуса, изоспектральная $U_3(3)$. Тогда $G = ABC$, где A — 2-группа и $H = BC$ — группа Фробениуса порядка 21 или 42. В первом случае $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^3 = b^c b^5\rangle$ и порядок каждого G-главного фактора V из A равен 8. Рассматриваемый как H-модуль, V обладает базисом, в котором b и c с точностью до замены b на b^{-1} представляются матрицами*

$$[b] = \begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ 1 & 1 & . \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & . & 1 \\ . & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, экспонента A равна 8, а экспонента $C_A(c)$ равна 4.

Во втором случае $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^6 = b^c b^4\rangle$ и порядок каждого G-главного фактора V из A равен 64. Рассматриваемый как H-модуль, V обладает базисом, в котором b и c представляются матрицами

$$[b] = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Оба случая реализуются.

Теорема 2. *Существует изоспектральная $U_3(3)$ удвоенная группа Фробениуса $G = ABC$, где BC — группа Фробениуса порядка 21 и A — порядка 2^{18}.*

Теорема 3. *Существует изоспектральная $U_3(3)$ удвоенная группа Фробениуса $G = ABC$, где BC — группа Фробениуса порядка 42 и A — порядка 2^{18}.*

Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть G — удвоенная группа Фробениуса. Тогда*

(1) $G = ABC$, где AB — нормальная подгруппа Фробениуса с ядром A и циклическим дополнением B нечетного порядка, а BC — группа Фробениуса с ядром B и циклическим дополнением C.

(2) A нильпотентна и для каждого простого делителя p числа $|A|$ и любого элемента $c \in C$ порядка n существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$, что c централизует a_1, а порядок a_2c равен pn.

Доказательство. Утверждение (1) — часть леммы 2 в [7], (2) — часть леммы 4 в [8].

Лемма 2. *Пусть $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^3 = b^c b^5\rangle$ и V — неприводимый H-модуль над полем F характеристики два, на котором $\langle b\rangle$ действует без нетривиальных неподвижных точек. Тогда V абсолютно неприводим размерности 3* *и обладает базисом, в котором b и c с точностью до замены b на b^{-1} представляются матрицами*

$$[b] = \begin{bmatrix} . & 1 & . \\ . & . & 1 \\ 1 & 1 & . \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & . & 1 \\ . & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим соответствующее полупрямое произведение $G = VH$. Очевидно, что G — удвоенная группа Фробениуса и по п. (2) леммы 1 $C_V(c) \neq 1$, т. е. существует ненулевой вектор v_1 в V такой, что $v_1c = v_1$. Теперь $(v_1b^i)c = (v_1c)(c^{-1}b^ic) = v_1b^{2i}$ для любого натурального i, откуда следует, что линейная оболочка W векторов v_1b^i, $i = 0, \dots, 6$, H-инвариантна, поэтому $W = V$. Поскольку $w = v + vb + \dots + vb^6 = v(1 + b + \dots + b^6)$ — неподвижный вектор для b при любом $v \in V$, то $w = 0$, стало быть,

$$V(1 + b + b^3)(1 + b^2 + b^3) = V(1 + b + \dots + b^6) = 0. \tag{1}$$

Так как $U = V(1 + b + b^3) = Vb(1 + b + b^3) = Ub$ и

$$\begin{aligned} Uc &= V(1 + b + b^3)c = Vc(1 + b + b^3)^c \\ &= Vc(1 + b^2 + b^6) = Vcb^6(1 + b + b^3) = V(1 + b + b^3) = U, \end{aligned}$$

U является H-подмодулем, значит, $U = 0$ или $U = V$. Во втором случае по п. (1) леммы 1 $V(1 + b^2 + b^3) = 0$ и после замены b на $d = b^{-1}$ получаем

$$0 = V(1 + d^{-2} + d^{-3}) = Vd^3(1 + d^{-2} + d^{-3}) = V(1 + d + d^3),$$

т. е. возвращаемся к первому случаю.

Итак, без потери общности можем считать, что $V(1 + b + b^3) = 0$. В частности, $v_1b^3 = v_1 + v_1b$, откуда следует, что $\dim(V) \leq 3$.

Пусть L — расширение F, содержащее нетривиальный корень полинома $x^7 - 1$, и $V^L = V \otimes_F L$. Тогда V^L содержит собственный вектор v элемента b, т. е. $v \neq 0$ и $vb = \mu b$, $\mu \neq 1$. Отсюда $vcb = vb^2c = \mu^2vc$, $vc^2b = vb^4c^2 = \mu^4vc^2$. Таким образом, v, vc, vc^2 линейно независимы как собственные векторы с различными собственными значениями, поэтому $\dim V = \dim V^L \geq 3$. Сравнив с предыдущим абзацем, получим, что $\dim(V) = 3$, V абсолютно неприводим и v_1, $v_2 = v_1b$, $v_3 = v_1b^2$ — базис V. Так как

$$v_1c = v_1, \quad v_2c = v_3,$$
$$v_3c = v_1b^2c = v_1c(b^2)^c = v_1b^4 = (v_1b^3)b = (v_1 + v_1b)b = v_2 + v_3,$$

матрицы b и c в этом базисы такие, как в заключении леммы, поэтому лемма доказана.

Следующий результат доказывается аналогично.

Лемма 3. *Пусть $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^6 = b^cb^4\rangle$ и V — неприводимый H-модуль над полем F характеристики два, на котором $\langle b\rangle$ действует без нетривиальных неподвижных точек. Тогда V абсолютно неприводим размерности 6 и обладает базисом, в котором b и c представляются матрицами*

$$[b] = \begin{bmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [c] = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 \\ . & 1 & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. По п. (1) леммы 1 $G = ABC$, где AB — нормальная подгруппа Фробениуса с ядром A и циклическим дополнением B нечетного порядка, а BC — группа Фробениуса с ядром B и циклическим дополнением C. По п. (2) леммы 1 $|A||C|$ не может делиться на 7, поэтому $|B|$ делится на 7. Поскольку B циклическая, она порядка 7. Отсюда следует, что порядок C равен 2, 3 или 6.

Предположим, что $|C| = 2$. Тогда $|A|$ делится на 3. Пусть c — инволюция из C. По п. (2) леммы 1 c централизует элемент $r \in A$ порядка 3. Так как A нильпотентна, r централизует силовскую 2-подгруппу из G, поэтому G содержит элемент порядка 24; противоречие.

Итак, порядок $C = \langle c \rangle$ равен 3 или 6 и $H = BC$ — группа Фробениуса порядка 21 или 42. В обоих случаях по п. (2) леммы 1 A является 2-группой. В первом случае $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^3 = b^c b^5 \rangle$ и заключение теоремы 1 вытекает из леммы 2. Во втором случае $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^6 = b^c b^4 \rangle$ и заключение следует из леммы 3.

Доказательство теоремы 2. Пусть A — группа, порожденная элементами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, со следующими соотношениями:

$$x_i^4 = y_i^4 = 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \tag{2}$$

$$[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \tag{3}$$

$$[x_i, y_i] = 1, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \tag{4}$$

$$[x_i, y_j][x_j, y_i] = 1, \quad 1 \le i < j \le 3, \tag{5}$$

$$[[x_i, y_j], x_k] = [[x_i, y_j], y_k] = 1, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \tag{6}$$

Лемма 4. (1) *Ступень нильпотентности A равна двум, и A — 2-группа.*

(2) *Подгруппы $X = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ и $Y = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ изоморфны прямому произведению трех циклических групп порядка 4 и $A = \langle X, Y \rangle$.*

(3) *Коммутант Z группы A порождается элементами $z_1 = [x_1, y_2]$, $z_2 = [x_1, y_3]$, $z_3 = [x_2, y_3]$ порядка 4 и изоморфен прямому произведению трех циклических групп порядка 4.*

(4) *Порядок A равен 2^{18}.*

(5) *Экспонента A равна 8.*

Доказательство. Проверка пп. (1)–(4) леммы не представляет труда. Докажем п. (5). Пусть $g \in A$. Тогда $g = xyz$ для некоторых $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ и $g^2 = (xy)^2 z^2 = x^2 [x, y^{-1}] y^2 z^2$. Так как по соотношениям (2), (3) и (5) $[x^2, y^2] = [x, y^2]^2 = [x, y]^4 = 1$, то $g^8 = (g^2)^4 = [x, y^{-1}]^4 x^8 y^8 z^8 = 1$, т. е. 8 является периодом A. С другой стороны, $\left(x_1 y_2^{-1}\right)^4 = x_1^4 y_2^{-4} [x_1, y_2]^2 = z_1^2 \neq 1$, поэтому экспонента A равна 8. Лемма доказана.

Пусть r_x и r_y — автоморфизмы групп X и Y такие, что их матрицы в базисах x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 этих групп равны матрице $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Эти автоморфизмы единственным образом продолжаются до автоморфизма r порядка 7 группы A. Матрица ограничения r на Z в базисе z_1, z_2, z_3 равна $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Автоморфизм r действует на A без неподвижных точек.

Пусть s_x и s_y — автоморфизмы групп X и Y, матрицы которых в базисах x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 этих групп равны $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Эти автоморфизмы однозначно продолжаются до автоморфизма s порядка 3 группы A. Матрица ограничения s на Z в базисе z_1, z_2, z_3 равна $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Группа неподвижных точек s в X равна $\langle x_1 \rangle$, группа неподвижных точек s в Y равна $\langle y_1 \rangle$, группа неподвижных точек s в Z равна $\langle z_1^2 z_2^2 z_3 \rangle$. Отсюда вытекает, что группа C неподвижных точек автоморфизма s в A порождается элементами $x_1, y_1, z_1^2 z_2^2 z_3$. По (3) и лемме 1 C — коммутативная группа экспоненты 4. Кроме того, $s^{-1} r s = r^2$, т. е. $F = \langle r, s \rangle$ — группа Фробениуса порядка 21.

Пусть теперь G — естественное полупрямое произведение A на F. Так как r действует на A без неподвижных точек, $A\langle r \rangle$ является группой Фробениуса с ядром A. Далее, G/A изоморфна группе Фробениуса F, поэтому G — удвоенная группа Фробениуса. Кроме того, это означает, что в G нет элементов порядка $7k$ для $k > 1$. Поскольку C — группа экспоненты 4, в G есть элемент порядка 12, но нет элементов порядка 24. Так как экспонента A равна 8, то $\mu(G) = \{7, 8, 12\} = \mu(U_3(3))$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $H \simeq \langle b, c \mid 1 = b^7 = c^6 = b^c b^4 \rangle$ — группа Фробениуса порядка 42 и V — абсолютно неприводимый H-модуль над $F = GF(8)$, на котором b действует без неподвижных точек. По лемме 3 $\dim(V) = 6$.

Пусть $v_1 \in V$ — собственный вектор элемента b. Тогда $v_1^b = \mu v_1$, $\mu^7 = 1$, $\mu \neq 1$. Положим $v_3 = v_1^c$, $v_2 = v_3^c$, $v_6 = v_2^c$, $v_4 = v_6^c$, $v_5 = v_4^c$. Тогда $v_3^b = v_1^{cb} = v_1^{b^3 c} = (\mu^3 v_1)^c = \mu^3 v_3$. Аналогично $v_i^b = \mu^i v_i$, $i = 1, \dots, 6$. Таким образом, v_i, $i = 1, \dots, 6$, — собственные векторы для b с различными собственными значениями, поэтому они составляют базис пространства V. Пусть $L = VH$ — соответствующее полупрямое произведение.

Пусть $W = V \wedge V$ — внешний квадрат модуля V, т. е. $W = V \otimes V/J$, где J — подмодуль, порожденный множеством $\{v \otimes v \mid v \in V\}$. Так как $v_1, \dots, v_6$ — базис V, то $\{ij = v_i \wedge v_j \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$ — базис W. В частности, $\dim(W) = 15$. Группа H действует на W по правилу: $(x \wedge y)^h = x^h \wedge y^h$, где $x, y \in V$, $h \in H$.

Пусть $U = V \oplus W$. Будем записывать элементы U как пары (v, w), где $v \in V$, $w \in W$. Определим действие L на U правилом $(u, w)^v = (u, w + u \wedge v)$, $(u, w)^h = (u^h, w^h)$, где $u, v \in V$, $w \in W$, $h \in H$. Легко проверить, что это определение корректно. Рассмотрим соответствующее полупрямое произведение UL.

Пусть N — подпространство W, натянутое на векторы $13, 15, 16, 23, 25, 26, 34, 45, 46$. Простая проверка показывает, что N является L-подмодулем, следовательно, N — нормальная подгруппа в UL. Положим $G = UL/N$ и докажем, что G — удвоенная группа Фробениуса и $\mu(G) = \mu(U_3(3))$. Поскольку $(ij)^b = \mu^{i+j}(ij)$, подпространство $C_W(b)$ неподвижных точек элемента b в W натянуто на $16, 25, 34$ и поэтому содержится в N. Отсюда вытекает, что $C_G(b) = \langle b \rangle$, стало быть, $G = AH$, где $A = (UV/N)$ — удвоенная группа Фробениуса. Таким образом, остается доказать, что $\mu(A\langle c \rangle) = \{8, 12\}$.

Положим $t = c^3$, $u = (v_1, 0) \in U$ и рассмотрим элемент $g = uv_2 t \in UL$. Тогда $g^2 = uv_2(uv_2)^t = uv_2 u^t v_5 = (v_1, 0)v_2(v_6, 0)v_5 = ((v_1, 0) + (v_6, 26))(v_2 + v_5)$ и $g^4 = (0, (v_1 + v_6) \wedge (v_2 + v_5)) = (0, 12 + 15 + 26 + 56) \in U \setminus N$. Значит, порядок образа g в G равен 8. Так как $1 < U < UV < UV\langle t\rangle$ — нормальный ряд в $UV\langle t\rangle$ с элементарными абелевыми факторами и $UV\langle t\rangle$ — силовская 2-подгруппа в UL, группа G не содержит элементов порядка 16.

Пусть $r = c^2$. Тогда $C_A(r) = C_{UV}(r)/N$ и подгруппа $C = C_{UV}(r)$ порождена $v_1 + v_2 + v_4$, $v_3 + v_5 + v_6$ и $C_U(r)$. Поскольку C порождена инволюциями и

$$\begin{aligned}[C, C] &= \langle (v_1 + v_2 + v_4) \wedge (v_3 + v_5 + v_6)\rangle \\ &= \langle 13 + 15 + 16 + 23 + 25 + 26 + 34 + 45 + 46\rangle \le N,\end{aligned}$$

образ C в G — элементарная абелева группа, поэтому экспонента $C_G(r)$ равна 12. Следовательно, G содержит элемент порядка 12, но не может содержать элементов порядка 24. Стало быть, $\mu(G) = \{7, 8, 12\} = \mu(U_3(3))$. Теорема 3 доказана.

Замечание. Можно было бы доказать теорему 3, основываясь на H-модуле V над полем порядка 2, описанном в лемме 3, вместо H-модуля V из доказательства теоремы 3, и получить пример удвоенной группы Фробениуса, изоспектральной группе $U_3(3)$ и имеющей вид $2^{12} : 2^6 : 7 : 6$.

Опишем этот пример, опуская подробности построения.

Пусть W — векторное пространство размерности 12 над полем порядка 2, B — базис W и a_1, b, c — линейные преобразования W, матрицы которых в B имеют вид

$$[a_1] = \begin{bmatrix} 1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&1&.&1&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&1&.&.&.&1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1 \end{bmatrix}, \quad [b] = \begin{bmatrix} .&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&1&.&.&.&.&.&. \\ 1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&1 \\ .&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&. \\ .&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&. \\ .&.&.&.&.&.&1&1&.&.&1&1 \\ .&.&.&.&.&.&1&1&.&1&1&. \end{bmatrix},$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&.&.&.&.&. \\ 1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&1&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&1&1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&1&1&.&.&1&. \\ .&.&.&.&.&.&1&1&.&.&1&1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $L = \langle a_1, b, c\rangle$.

Проверка в GAP [9] показывает, что имеют место следующие утверждения.

1. Порядки b, c и $b^c b^4$ равны соответственно 7, 6 и 1, т. е. $K = \langle b, c\rangle$ — группа Фробениуса порядка 42.

2. Подгруппа $A = \left\langle a_1^K \right\rangle$ является элементарной абелевой группой порядка 64, на которой b действует без неподвижных точек, т. е. L — удвоенная группа Фробениуса порядка 2688.

3. L содержит 448 элементов порядка 12, и для каждого элемента $x \in L$ порядка 12 выполняется равенство $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{12} = 0$. Это означает,

что естественное полупрямое произведение $G = WL$ не содержит элементов порядка 24.

4. Если $t = a_1^b c^3$, то порядок t равен четырем, $t + t^2 + t^3 + t^4 \neq 0$, поэтому G содержит элемент порядка 8.

5. Элемент b действует на W без неподвижных точек.

Итак, G — удвоенная группа Фробениуса, $|G| = 2688|W| = 2^{18}42$ и $\mu(G) = \{7, 8, 12\} = \mu(U_3(3))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д., Ши В. Дж.* Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.

2. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.

3. *Алеева М. Р.* О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.

4. *Lucido M. S., Moghaddamfar A. R.* Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. V. 73, N 3. P. 373–384.

5. *Старолетов А. М.* Неразрешимость конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10 // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 20–24.

6. *Заварницин А. В.* Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$ // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 26–31.

7. *Зиновьева М. Р., Мазуров В. Д.* О конечных группах с несвязным графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 99–105.

8. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.

9. GAP: Groups, algorithms, and programming (http://www/gap-system.org).

Статья поступила 8 июля 2015 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
mazurov@math.nsc.ru