Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 519.17

ВЫСОТА МАЛЫХ ГРАНЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Высота $h(f)$ грани f в 3-многограннике есть максимальная степень инцидентных грани f вершин. 4-Грань называется *пирамидальной*, если она инцидентна не менее чем трем 3-вершинам. Заметим, что в полуправильном $(3,3,3,n)$-многограннике каждая грань f является пирамидальной и имеет $h(f)=n$.

В 1940 г. Лебег доказал, что в каждом четыреангулированном 3-многограннике без пирамидальных граней найдется грань f с $h(f)\le 11$. В 1995 г. эта оценка была улучшена до 10 С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным. Недавно мы улучшили эту оценку до 8 и построили четыреангулированный 3-многогранник без пирамидальных граней, в котором $h(f)\ge 8$ для каждой грани f.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что в каждом 3-многограннике без треугольников и пирамидальных 4-граней найдется 4-грань с $h(f)\le 10$ или 5-грань с $h(f)\le 5$, причем оценки 10 и 5 неулучшаемы.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.502

Ключевые слова: плоская карта, планарный граф, 3-многогранник, структурные свойства, высота грани.

1. Введение

Под 3-*многогранником* мы понимаем конечный выпуклый трехмерный многогранник. Как доказал Штейниц [1], 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике M есть число инцидентных ей ребер. k*-Вершина* и k*-грань* суть вершина и грань степени k, k^+*-вершина* имеет степень не менее k, и т. д.

Высота $h(f)$ грани f в M есть максимальная степень вершин, инцидентных грани f. Через $h_i(f)$ обозначим высоту грани f степени i.

4-Грань называется *пирамидальной*, если она инцидентна не менее чем трем вершинам степени 3. Заметим, что в полуправильном $(3,3,3,n)$-многограннике для каждой грани f имеет место равенство $h(f)=n$.

Напомним несколько результатов о структуре 5^--граней в 3-многогранниках. Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в M соответственно. *Вес* грани в M есть сумма степеней ее граничных вершин, а $w(M)$, или просто w, — минимум весов 5^--граней в M.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00631, 15–01–05867) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1939.2014.1). Работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–98510).

Будем говорить, что f является *гранью типа* $(k_1, k_2, \dots)$, или просто $(k_1, k_2, \dots)$*-гранью*, если множество степеней инцидентных ей вершин мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

В 1940 г. Лебег [2] дал приближенное описание 5^--граней в нормальных плоских картах.

Теорема 1 [2]. *Каждая нормальная плоская карта содержит* 5^-*-грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\ (3,11,13),$$
$$(4,4,\infty),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (5,5,9),\ (5,6,7),$$
$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (3,4,4,5), (3,3,3,3,5).$$

Классическая теорема 1 наряду с другими идеями Лебега [2] имеет многочисленные приложения к проблемам раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [3–5]).

Некоторые параметры теоремы Лебега были улучшены для специальных классов плоских графов. В 1963 г. Коциг [6] доказал, что каждая плоская триангуляция с $\delta = 5$ удовлетворяет неравенству $w \le 18$, и предположил, что $w \le 17$. В 1989 г. эта гипотеза Коцига была подтверждена О. В. Бородиным [7] в более общем виде.

Теорема 2 [7]. *Каждая нормальная плоская карта с* $\delta = 5$ *содержит* $(5,5,7)$*-грань или* $(5,6,6)$*-грань, где все параметры точны.*

Теорема 2 также подтвердила гипотезу Грюнбаума [8] 1975 г. о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, удаление которых из графа позволяет получить две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не более 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [9] была получена оценка 13).

Заметим, что 3-многогранник с $(4,4,\infty)$-гранями имеет неограниченный вес, что следует из n-пирамиды, двойной n-пирамиды и аналогичной конструкции, в которой каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 4-вершине и n-вершине. Это же верно для $(3,3,3,\infty)$-граней: возьмем двойную $2n$-пирамиду, удалим все нечетные верхние и все четные нижние ребра и получим четыреангуляцию, содержащую только $(3,3,3,n)$-грани.

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [10] доказал, что $w \le 39$, а О. В. Бородин [11], подтвердив гипотезу Коцига [10], доказал, что $w \le 29$; эта оценка неулучшаема, как следует из конструкции, получаемой из икосаэдра двукратной вставкой 3-вершин во все грани. О. В. Бородин [12] далее показал, что $w \le 29$ для каждого триангулированного 3-многогранника без $(4,4,\infty)$-граней, а $w \le 37$ является точной оценкой для триангуляций без смежных 4-вершин.

Для произвольных 3-многогранников теорема 1 влечет $w \le \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорняк и Йендроль [13] усилили это следующим образом: если нет ни $(4,4,\infty)$-граней, ни $(3,3,3,\infty)$-граней, то $w \le 47$. О. В. Бородин и Вудал [14] доказали, что запрет $(3,3,3,\infty)$-граней влечет $w \le \max\{29, \Delta + 8\}$.

Для четыреангулированных 3-многогранников С. В. Августинович и О. В. Бородин [15] улучшили описание 4-граней, вытекающее из теоремы Лебега, следующим образом: $(3,3,3,\infty)$, $(3,3,4,10)$, $(3,3,5,7)$, $(3,4,4,5)$.

Другие результаты, связанные с теоремой Лебега, можно найти в уже упомянутых статьях, недавнем обзоре Йендроля и Фосса [16], а также в [17–26].

В 2002 г. О. В. Бородин [27] усилил теорему Лебега 1 следующим образом (параметры, помеченные звездочкой, наилучшие из возможных).

Теорема 3 [27]. *Каждая нормальная плоская карта содержит 5^--грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty^*),\ (3,8^*,22),\ (3,9^*,15),\ (3,10^*,13),\ (3,11^*,12),$$
$$(4,4,\infty^*),\ (4,5^*,17),\ (4,6^*,11),\ (4,7^*,8),\ (5,5^*,8),\ (5,6,6^*),$$
$$(3,3,3,\infty^*),\ (3,3,4^*,11),\ (3,3,5^*,7),\ (3,4,4,5^*),\ (3,3,3,3,5^*).$$

Недавно было получено точное описание структуры граней в 3-многогранниках с $\delta \geq 4$ и для триангулированных 3-многогранников.

Теорема 4 [28]. *Каждый 3-многогранник без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$(4,4,\infty),\ (4,5,14),\ (4,6,10),\ (4,7,7),\ (5,5,7),\ (5,6,6),$$

где все параметры неулучшаемы.

Теорема 5 [29]. *Каждый триангулированный 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3,4,31),\ (3,5,21),\ (3,6,20),\ (3,7,13),\ (3,8,14),\ (3,9,12),\ (3,10,12),$$
$$(4,4,\infty),\ (4,5,11),\ (4,6,10),\ (4,7,7),\ (5,6,6),\ (5,5,7),$$

где в каждом типе первые два параметра фиксированы, а третьи параметры неулучшаемы.

В 1940 г. Лебег [2] доказал, что каждый четыреангулированный 3-многогранник без пирамидальных граней содержит грань f с $h(f) \leq 11$. В 1995 г. эта оценка была понижена до 10 С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным [15].

Известная нижняя оценка 7 на высоту грани в четыреангуляциях получается из полуправильного $(3,4,4,4)$-многогранника (в котором, напомним, каждая 4-грань инцидентна 3-грани и трем 4-граням) добавлением в каждую 4-грань новой 4-вершины, а затем добавлением новой 3-вершины в каждую грань полученного 3-многогранника P и удалением всех ребер, принадлежащих P.

Недавно мы улучшили верхнюю оценку на высоту грани для четыреангуляций до 8 [30] и построили четыреангулированный 3-многогранник без пирамидальных граней, в котором $h(f) \geq 8$ для каждой грани f.

Долгое время не было известно, является ли точной оценка Лебега $h(f) \leq 11$ для высоты 5^--граней в классе всех 3-многогранников без треугольников и пирамидальных 4-граней. В настоящей статье дается ответ на этот вопрос.

Теорема 6. *Каждый 3-многогранник без треугольников и пирамидальных 4-граней содержит 4-грань высоты не более 10 или 5-грань высоты не более 5, где обе оценки 10 и 5 неулучшаемы.*

2. Доказательство теоремы 6

Для доказательства неулучшаемости оценки 10 достаточно вставить конфигурацию, показанную на рис. 1, в каждую грань икосаэдра, в результате чего получим 3-многогранник без треугольников и пирамидальных 4-граней, в котором каждая 4-грань имеет высоту 10. Неулучшаемость оценки 5 следует из полуправильного $(3,3,3,3,5)$-многогранника.

Теперь предположим, что M является контрпримером к верхним оценкам в теореме 6.

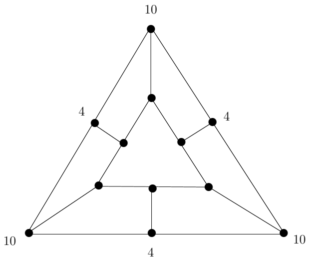

Рис. 1. Фрагмент экстремальной конструкции.

2.1. Перераспределение зарядов. Из формулы Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для M получаем

$$\sum_{x\in V\cup F}(d(x)-4)=-8, \tag{1}$$

где V, E и F — множества вершин, ребер и граней в M.

Определим *начальный заряд* для каждого $x\in V\cup F$ равенством $\mu(x)=d(x)-4$, так что только 3-вершины в V имеют отрицательный начальный заряд. Используя свойства M как контрпримера, мы локально перераспределим заряды вершин и граней, сохранив их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x\in V\cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов в соответствии с (1) равна -8.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (рис. 2).

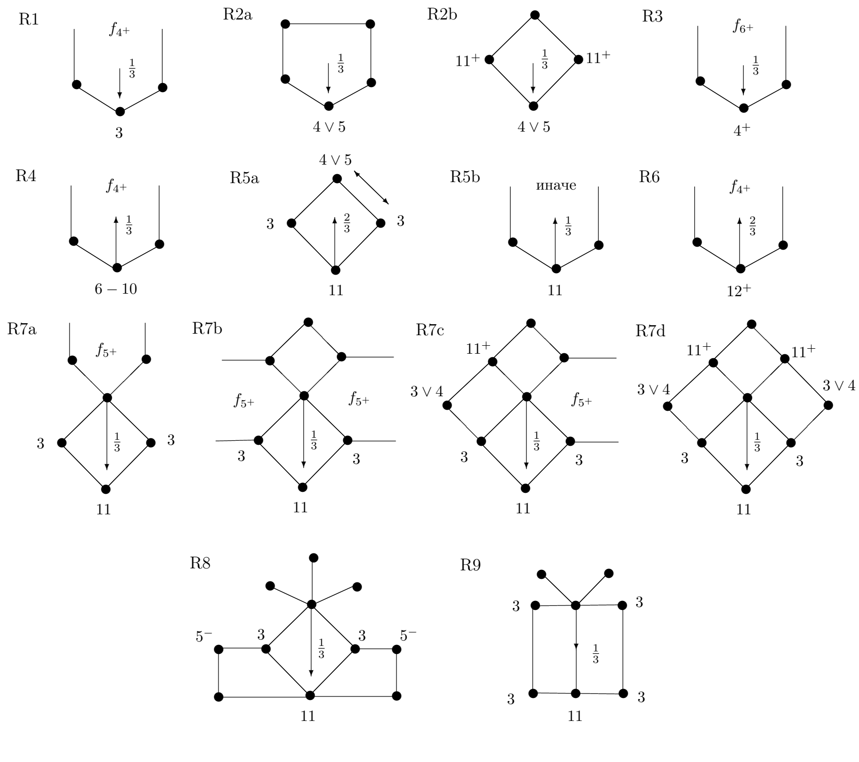

Рис. 2. Правила перераспределения зарядов.

R1. Каждая грань дает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной 3-вершине.

R2. Каждая вершина v с $4\le d(v)\le 5$ получает $\frac{1}{3}$ от каждой инцидентной грани $f=\dots v_1vv_2$, если

(a) $d(f)=5$;

(b) $d(f)=4$, $d(v_1)\ge 11$ и $d(v_2)\ge 11$.

R3. Каждая 6^+-грань дает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной 4^+-вершине.

R4. Каждая вершина степени от 6 до 10 дает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной грани.

R5. Каждая 11-вершина дает каждой инцидентной грани f:
(a) $\frac{2}{3}$, если $d(f) = 4$ и f инцидентна двум 3-вершинам и вершине степени 4 или 5;
(b) $\frac{1}{3}$ в остальных случаях.

R6. Каждая 12^+-вершина дает $\frac{2}{3}$ каждой инцидентной грани.

R7. Предположим, что 4-вершина x инцидентна граням $f_1 = \dots x_1xx_4$, $f_2 = xx_1vx_2$, $f_3 = \dots x_2xx_3$ и $f_4 = \dots x_3xx_4$, где $d(v) = 11$, $d(x_1) = d(x_2) = 3$. Тогда v получает $\frac{1}{3}$ от x в следующих случаях:
(a) $d(f_4) \geq 5$;
(b) $d(f_4) = 4$, $d(f_1) \geq 5$ и $d(f_3) \geq 5$;
(c) $d(f_4) = d(f_1) = 4$, $d(f_3) \geq 5$ и $d(x_1^*) \leq 4$, где $f_1 = x_1xx_4x_1^*$;
(d) $d(f_1) = d(f_3) = d(f_4) = 4$ и $d(x_i^*) \leq 4$, $1 \leq i \leq 2$, где $f_1 = x_1xx_4x_1^*$ и $f_3 = x_2xx_3x_2^*$.

R8. Если 11-вершина v инцидентна 4-граням vv_1xv_2, vv_2yv_3 и vv_1zv_{11}, где $d(v_1) = d(v_2) = 3$, а $d(x) = 5$, $d(y) \leq 5$ и $d(z) \leq 5$, то x дает $\frac{1}{3}$ вершине v.

R9. Если 5-вершина x инцидентна 4-граням $f_2 = xx_2yx_3$, $f_3 = xx_3zx_4$, где $d(x_3) = 11$, $d(x_2) = d(x_4) = d(y) = d(z) = 3$, то x дает $\frac{1}{3}$ вершине x_3.

2.2. Доказательство неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для $x \in V \cup F$.

Случай 1. $f \in F$. Если $d(f) \geq 6$, то f дает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной вершине по R1 и R3, откуда $\mu'(f) \geq d(f) - 4 - d(f) \times \frac{1}{3} = \frac{2(d(f)-6)}{3} \geq 0$.

Если $d(f) = 5$, то f получает $\frac{1}{3}$ от инцидентной 6^+-вершины, поскольку $h_5(f) \geq 6$ по предположению, и дает по $\frac{1}{3}$ не более чем четырем инцидентным вершинам по R1 и R2a, а значит, $\mu'(f) \geq 5 - 4 - 4 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

Предположим, что $d(f) = 4$. Напомним, что f инцидентна не более чем двум 3-вершинам в виду отсутствия пирамидальных 4-граней. Если f инцидентна двум 3-вершинам, то нам нечего доказывать, если применимы R5a или R6. В противном случае f получает $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ по R4 и R5b, поскольку $h(f_4) \geq 11$, и дает $2 \times \frac{1}{3}$ по R1, поэтому $\mu'(f) \geq 0$.

Пусть f инцидентна не более чем одной 3-вершине. Если применяется R2b, то имеем $\mu'(f) \geq 0 + 2 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$ по R1, R5b и R6. В противном случае f получает не менее $\frac{1}{3}$ по R5b, откуда $\mu'(f) \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Случай 2. $v \in V$.

Подслучай 2.1. $d(v) = 3$. Поскольку v получает $\frac{1}{3}$ от каждой инцидентной грани по R1, имеем $\mu'(v) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 4$. Заметим, что v получает $\frac{1}{3}$ по R3 и R2 и может давать $\frac{1}{3}$ только по R7. Если v участвует в R7a или R7c, то $\mu'(v) \geq 4-4+\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 0$ согласно R2a и R3. Если же v участвует в R7b, то $\mu'(v) \geq 2 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$ по R2a и R3. Пусть v участвует в R7d, тогда $\mu'(v) \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ по R2b.

Подслучай 2.3. $d(v) = 5$. Заметим, что v может отдавать заряд только по R8 и R9. Кроме того, передачу в $\frac{1}{3}$ вдоль ребра e можно рассматривать как две передачи в $\frac{1}{6}$ через грани, инцидентные ребру e. В результате v дает не более $\frac{1}{3}$ через каждую инцидентную грань.

Если v инцидентна 5^+-грани f, то v получает $\frac{1}{3}$ от f согласно R2a или R3, откуда $\mu'(v) \geq 5 - 4 + \frac{1}{3} - 4 \times \frac{1}{3} = 0$.

Предположим далее, что v окружена 4-гранями. Заметим, что v может участвовать в R8 не более одного раза, поскольку в этом случае v имеет двух 11^+-соседей поскольку $h_4(f) \geq 11$ для всех $f \in F$. Также отметим, что если v участвует в R9, то не более двух раз, поскольку v имеет двух 3-соседей. Отсюда $\mu'(v) \geq 5 - 4 - (1 + 2) \times \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.4. $6 \leq d(v) \leq 10$. Теперь v отдает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной грани в соответствии с R4 и не участвует в других правилах, отсюда $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - d(v) \times \frac{1}{3} = \frac{2(d(v)-6)}{3} \geq 0$.

Подслучай 2.5. $d(v) = 11$. Заметим, что v дает либо $\frac{1}{3}$, либо $\frac{2}{3}$ каждой инцидентной грани по R5. Если v дает $\frac{1}{3}$ хотя бы раз, то получаем $\mu'(v) \geq 11 - 4 - 10 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Поэтому предположим, что v дает $\frac{2}{3}$ каждой инцидентной грани, откуда согласно R5a получаем, что каждая инцидентная грань является 4-гранью, инцидентной двум 3-вершинам и одной вершине степени 4 или 5. Ввиду нечетности $d(v)$ можем считать, что существует 4-грань $f = vv_1v^*v_2$ с $d(v_1) = d(v_2) = 3$.

Если $d(v^*) = 5$, то v^* дает $\frac{1}{3}$ вершине v по R8, откуда следует, что $\mu'(v) \geq 11 - 4 - 11 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$. Наконец, пусть $d(v^*) = 4$; это значит, что снова v получает $\frac{1}{3}$ от v^* по одному из четырех пунктов в R7, что и требовалось.

Подслучай 2.6. $d(v) \geq 12$. Поскольку v дает не более $\frac{2}{3}$ каждой инцидентной грани согласно R6, получаем $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - d(v) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-12}{3} \geq 0$.

Таким образом доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит (1) и тем самым завершает доказательство теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. N 12. P. 1–139.
2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
4. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics (W. T. Tutte, ed.). New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
5. *Plummer M. D., Toft B.* Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.
6. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34.
7. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
8. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Studies in graph theory (D. R. Fulkerson, ed.). MAA Stud. Math. 1975. V. 12. P. 201–224.
9. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graph // Graph theory and appl. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.
10. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
11. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
12. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
13. *Horňák M., Jendrol' S.* Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.

14. *Бородин О. В., Вудал Д. Р.* Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. V. 6, N 5. P. 648–657.

15. *Августинович С. В., Бородин О. В.* Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 2–3. С. 3–9.

16. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.

17. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.

18. *Бородин О. В., Лопарев Д. В.* Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.

19. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Comb. 1999. V. 15. P. 267–277.

20. *Ferencová B., Madaras T.* Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.

21. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.

22. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.

23. *Madaras T., Škrekovski R.* Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.

24. *Madaras T., Soták R.* The 10-cycle C_{10} is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.

25. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.

26. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.

27. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.

28. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.

29. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.

30. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Вершинно-граневый вес ребер в 3-многогранниках // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 338–350.

Статья поступила 24 ноября 2014 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`shmgnanna@mail.ru`