Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 519.63+539.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЯВНО РАЗРЕШИМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ С КОНТРОЛИРУЕМЫМ ДИСБАЛАНСОМ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Н. Коновалов, Ю. П. Попов

Аннотация. Для динамических задач линейной теории упругости построены и обоснованы оптимальные явно разрешимые дискретные (сеточные) модели с контролируемым дисбалансом полной механической энергии и максимально возможной степенью параллелизма.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.509

Ключевые слова: динамические задачи линейной теории упругости, равновесные модели, аппроксимационная вязкость, неравновесные модели, управление дисбалансом полной механической энергии.

Математическое моделирование на ЭВМ изучаемого физического процесса связано с технологической цепочкой [1, гл. II], один из этапов которой можно представить следующим образом: $I \to I_h \to II \to III$. Здесь I — непрерывная математическая модель изучаемого процесса, I_h — дискретная модель, II — алгоритм реализации дискретной модели, III — программа для конкретной ЭВМ. Далее мы ограничимся оптимизацией этапа $I \to I_h \to II$ для динамических задач линейной теории упругости.

С изучаемым процессом свяжем фазовый объем $G = [0 \le t \le t_*] \times V$. Здесь t — время, а при лагранжевом описании в качестве $V = V(M)$ можно принять фиксированный пространственный объем $V(M)$ с границей $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \partial V$. Тем самым параметры процесса определяются как тензорные функции векторного аргумента (M, t), $M \in V$. Для динамической задачи векторы перемещений $u(M,t)$ и скорость $v(M,t)$ трактуются как элементы гильбертова пространства $H^1(t)$, а тензоры ранга два: деформаций $\varepsilon(M,t)$ и напряжений $\sigma(M,t)$ — как элементы гильбертова пространства $H^2(t)$. Скалярные произведения в $H^1(t)$, $H^2(t)$ задаются как свертка соответствующих элементов [2, гл. II]. Связь между параметрами динамической задачи задается: уравнением состояния, определяющими соотношениями и законом сохранения импульса в поле массовых сил. Положим (символ T означает транспонирование)

$$\sigma_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33})^T, \quad \sigma_2 = (\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)^T,$$

Работа выполнена в рамках Программы № 2 фундаментальных исследований Президиума РАН «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация». Поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (проект «Фундаментальные проблемы математического моделирования и вычислительной математики» ГК 14.740.11).

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})^T, \quad \varepsilon_2 = (2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T.$$

Тогда уравнение состояния

$$\sigma = K\varepsilon \leftrightarrow \sigma_{ij} = \mu 2\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \tag{1}$$

задается блочной матрицей $K : H^2 \to H^2$, где

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}, \; K_1 = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu) & \lambda & \lambda \\ \lambda & (\lambda+2\mu) & \lambda \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2\mu) \end{pmatrix}, \; K_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda(M) > 0$, $\mu(M) > 0$ — коэффициенты Ламе, $K = K^T > 0$, а уравнение состояния (1) можно записать так: $\sigma_1 = K_1\varepsilon_1$, $\sigma_2 = K_2\varepsilon_2$.

Пусть далее $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\partial u/\partial t = v$. Тогда

$$\varepsilon = Ru = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow 2\varepsilon_{ij} = \partial_j u_i + \partial_i u_j, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

и определен оператор $R : H^1 \to H^2$. Будем считать, что для $u \in H^1$, $\sigma \in H^2$ имеет место

$$u_{/\gamma_1} = 0, \quad \sigma_{ij} n_{j\,/\gamma_2} = 0, \tag{3}$$

где n_j — компоненты орта внешней нормали к γ_2. Для оператора $R^* : H^2 \to H^1$, сопряженного оператору R, по определению

$$(u, R^*\sigma)_{H^1} = (Ru, \sigma)_{H^2}, \quad u \in H^1, \; \sigma \in H^2.$$

Поэтому

$$R^*\sigma = -R^T\sigma = -\begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = -\operatorname{div}\sigma, \tag{4}$$

а с учетом (3) закон сохранения импульса можно записать следующим образом:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + R^*\sigma = \rho f. \tag{5}$$

Тем самым приходим к «непрерывной» замкнутой модели для линейной динамической задачи теории упругости:

$$\begin{gathered} \rho\frac{\partial v}{\partial t} + R^*\sigma = \rho f(M), \quad \varepsilon = Ru, \quad \sigma = K\varepsilon, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ u(M,t) = \varphi_1(M), \quad v(M,0) = \varphi_2(M). \end{gathered} \tag{6}$$

Краевые условия (3) следует учитывать при задании областей определения операторов R и R^*.

В (6) не предписан порядок определения искомых параметров и наряду с (6) могут рассматриваться также иные замкнутые модели изучаемой задачи, например, «в перемещениях». Тогда

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + R^*\sigma = \rho f \to \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R^*K\varepsilon = \rho f \to \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R^*KRu = \rho f. \tag{7}$$

Однако последний переход в (7) связан с молчаливым предположением о разрешимости операторного уравнения

$$Ru(M,t) = \varepsilon(M,t) \tag{8}$$

для любого $t > 0$. Условие разрешимости операторного уравнения (8) будем использовать в таком виде [3, гл. IV]:

$$(\varepsilon,\psi)_{H^2} = 0, \quad R^*\psi = 0. \tag{9}$$

Можно показать, что условия совместности (сплошности) Сен-Венана, равенство нулю тензора несовместности и (9) эквивалентны.

Лемма 1. *Если $\partial u/\partial t = v \in H^1$ и для $\varepsilon(M,t) \in H^2$ имеет место*

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - Rv = 0, \quad \varepsilon(M,0) = R\varphi_1(M), \tag{10}$$

то операторное уравнение (8) разрешимо для любого $t > 0$, а $u \in H^1$ определяется из (8) с точностью до ядра оператора R: $u = R^{-1}\varepsilon + u_*$, $Ru_* = 0$. Элемент u_* (вектор жесткого перемещения) фиксируется с помощью краевого условия на γ_1.

Использование определяющего соотношения (2) в форме (10) позволяет перейти от (6) к замкнутой модели

$$\begin{gathered} D\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = f_*, \quad w = (v,\sigma)^T, \quad f_* = (\rho f, 0)^T, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad \varepsilon = K^{-1}\sigma, \\ D = \begin{pmatrix} \rho E_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}E_2 \end{pmatrix},\ E_1 v = v \in H^1,\ E_2\sigma = \sigma \in H^2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & R^* \\ -R & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{11}$$

с кососимметричным оператором A, начальными данными из (6), (10) и краевыми условиями (3). В (11) первоначальному определению подлежит ковектор w и лишь затем параметры $u \in H^1$, $\varepsilon \in H^2$.

Теорема 1. *Базовая модель (11) обладает дополнительным законом сохранения*

$$\frac{\partial J(t)}{\partial t} = (\rho f, v)_{H^1}, \quad J(t) = J_1(t) + J_2(t) = 0{,}5(\rho v, v)_{H^1} + 0{,}5(\varepsilon,\sigma)_{H^2}. \tag{12}$$

Перепишем (12) следующим образом:

$$J(t+\Delta t) = J(t) + \int\limits_t^{t+\Delta t} \left(\rho f, \frac{\partial u}{\partial t}\right)_{H^1} dt = J(t) + Q(t+\Delta t). \tag{13}$$

Отметим, что $J_1(t)$ в (12) соответствует кинетической энергии упругой среды, $J_2(t)$ — потенциальной энергии упругих деформаций, отнесенных к объему V, Q в (13) — это работа массовых сил на приращениях Δu за время Δt. Поэтому о (12) обычно говорят как о законе сохранения полной механической энергии упругой среды в объеме V.

Обратимся к переходу $I \to I_h$. Используемые далее обозначения стандартны в теории разностных схем. Итак,

$$G \to G_h = [0,\tau,\dots,n\tau,\dots,k\tau = t_*] \times V_h,\ M_h \in V_h,\ w_h^n = w(M_h, n\tau) = \left(v_h^n, \sigma_h^n\right)^T,$$

$$\gamma \to \gamma_h = \gamma_{1h} \cup \gamma_{2h},\ u_{/\gamma_1} = 0 \to u^n_{h/\gamma_{1h}} = 0,\ \sigma_{ij} n_{j/\gamma_2} = 0 \to \left(\sigma^n_h\right)_{ij} n_{j_{/\gamma_{2h}}} = 0,$$

$$\tau(\cdot)^{n+1}_{\bar t} = (\cdot)^{n+1}_h - (\cdot)^n_h,\ \partial^+_j(\cdot)_h = (\cdot)_{x_j},\ \partial^-_j(\cdot)_h = (\cdot)_{\bar x_j},\ (\cdot)_\alpha = \alpha(\cdot)^{n+1}_h + (1-\alpha)(\cdot)^n_h.$$

При переходе $I \to I_h$ основным является требование сопряженно согласованной аппроксимации [4]:

$$(Ru, \sigma)_{H^2} = (u, R^*\sigma)_{H^1} \to (R_h u_h, \sigma_h)_{H^2_h} = (u_h, R^*_h \sigma_h)_{H^1_h}. \tag{14}$$

Это требование достаточно конструктивно, и если, например, в $R = R(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ для оператора ∂_j выбрана аппроксимация ∂^+_j, то для того же оператора ∂_j в $R^* = R^*(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ следует выбрать аппроксимацию ∂^-_j.

Основные вычислительные проблемы на переходе $I \to I_h$ связаны с качеством разностной схемы для задачи

$$D\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = f_*, \quad w(M,0) = (\varphi_2(M), KR\varphi_1(M))^T. \tag{15}$$

Непрерывной модели (15) поставим в соответствие дискретную, сопряженно согласованную двухпараметрическую модель

$$\rho_h v^{n+1}_{\bar t} + R^*_h \sigma_\alpha = \rho_h f_h, \quad K^{-1}_h \sigma^{n+1}_{\bar t} - R_h v_\beta = 0, \quad v^0_h = \varphi_{2h}, \quad \varepsilon^0_h = R_h \varphi_{1h},$$

для которой будем использовать операторную запись: $y = (v_h, \sigma_h)^T$,

$$B_h y^{n+1}_{\bar t} \equiv (D_h + \tau A_{\alpha,\beta}) y^{n+1}_{\bar t} = (f_*)_h - A_h y^n \equiv r^n, \quad \text{элемент } y^0 \text{задан}. \tag{16}$$

Здесь

$$D_h = \begin{pmatrix} \rho_h E_1 & 0 \\ 0 & K^{-1}_h E_2 \end{pmatrix}, \quad A_{\alpha,\beta} = A_\alpha + A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha R^*_h \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta R_h & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_h = A_{1,1}.$$

Общие принципы построения экономичных алгоритмов обращения оператора B_h в (16) при переходе $y^n \to y^{n+1}$ достаточно хорошо известны. Здесь воспользуемся методом приближенной факторизации и вместо (16) на переходе $y^n \to y^{n+1}$ будем использовать факторизованную дискретную модель [5, гл. XIV]

$$(B_*)_h y^{n+1}_{\bar t} = r^n, \quad (B_*)_h = (D_h + \tau A_\alpha) D^{-1}_h (D_h + \tau A_\beta), \tag{17}$$

элемент y^0 задан

Формальным основанием для такой замены является очевидное: $(B_*)_h = B_h + O(\tau^2)$. Реализация (17) осуществляется стандартным образом. Тогда

$$\begin{pmatrix} \rho_h E_1 & \alpha\tau R^* \\ 0 & K^{-1}_h E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_* \\ \sigma_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n_1 \\ r^n_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (D_h + \tau A_\alpha) y_* = r^n, \tag{17.1}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_h E_1 & 0 \\ -\beta\tau R & K^{-1}_h E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{n+1}_{\bar t} \\ \sigma^{n+1}_{\bar t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_h v_* \\ K^{-1}_h \sigma_* \end{pmatrix} \leftrightarrow (D_h + \tau A_\beta) y^{n+1}_{\bar t} = D_h y_* \tag{17.2}$$

и утверждение о явной разрешимости дискретной модели (17) становится очевидным. Столь же очевидно и утверждение о том, что степень распараллеливания дискретной модели (17) одна и та же для всех $0 \le \alpha, \beta \le 1$. Отметим также, что оператор $(D_h + \tau A_\alpha) = U$ в (17.1) верхний треугольный, оператор $(D_h + \tau A_\beta) = L$ в (17.2) нижний треугольный. Тем самым с помощью приближенной факторизации реализуется разложение

$$(D_h + A_{\alpha,\beta}) = U D^{-1}_h L + O(\tau^2). \tag{18}$$

Далее следует определиться с конкретным выбором параметров $0 \le \alpha, \beta \le 1$ в дискретной модели (16).

Теорема 2. *При $\alpha = \beta = 0{,}5$ дискретная модель (16) «наследует» закон сохранения полной механической энергии (12) [6]:*

$$(J_h)_{\bar{t}}^{n+1} = (\rho_h f_h, v_{0,5})_{H_h^1}, \tag{19}$$

где $(J_h)^n = \big(J_{1h}^n\big) + (J_{2h})^n = 0{,}5\big(\rho_h v_h^n, v_h^n\big)_{H_h^1} + 0{,}5\big(\varepsilon_h^n, \sigma_h^n\big)_{H_h^2}$.

При доказательстве теоремы 2 используется очевидное следствие из (16):

$$\big(\rho_h v_{\bar{t}}^{n+1}, v_\beta\big)_{H_h^1} + \big(K_h^{-1}\sigma_{\bar{t}}^{n+1}, \sigma_\alpha\big)_{H_h^2} = (\rho_h f_h, v_\beta)_{H_h^1},$$

что вместе с

$$\sigma_\alpha = \sigma_{0,5} + \tau(\alpha - 0{,}5)\sigma_{\bar{t}}^{n+1}, \quad v_\beta = v_{0,5} + \tau(\beta - 0{,}5)v_{\bar{t}}^{n+1}$$

дает

$$\begin{gathered}(J_h)_{\bar{t}}^{n+1} + \tau Q(\alpha,\beta) = (\rho_h f_h, v_\beta)_{H_h^1}, \quad Q(\alpha,\beta) = Q(\alpha) + Q(\beta),\\ Q(\alpha) = (\alpha - 0{,}5)(R_h^* K_h R_h v_\beta)_{H_h^1}, \quad Q(\beta) = (\beta - 0{,}5)\big(\rho_h v_{\bar{t}}^{n+1}, v_{\bar{t}}^{n+1}\big)_{H_h^1}\end{gathered} \tag{20}$$

Тем самым утверждение теоремы 2 становится следствием (20).

Появление слагаемого $\tau Q(\alpha,\beta)$ в законе сохранения (20) связывают, как правило, с «аппроксимационной вязкостью» разностной схемы (16). Обычно при этом в слово «вязкость» не вкладывается какой-либо физический смысл. Но тогда возникает следующий вопрос: какому физическому процессу соответствует дискретная модель (16) с законом сохранения (20)? При $\alpha = \beta = 0{,}5$ ответ на этот вопрос содержится в теореме 2. С другой стороны, если $\alpha \geq 0{,}5$, $\beta \geq 0{,}5$, то $Q(\alpha,\beta) \geq 0$ и при $f_h = 0$ из (20) вытекает

$$J_h^{n+1} \leq J_h^n \leq \cdots \leq J_h^1 \leq J_h^0, \tag{21}$$

что означает равномерную устойчивость по начальным данным в энергетической норме J_h со всеми вытекающими отсюда следствиями из [7, гл. II, III] относительно сходимости разностной схемы (16). Однако (21) предполагает наличие механизма диссипации, который отсутствует в непрерывной базовой модели (11).

В этой связи остановимся на достаточно содержательном случае (16) ($\alpha \geq 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$), для которого

$$(J_h)_{\bar{t}}^{n+1} + \tau(\alpha - 0{,}5)(R_h^* K_h R_h v_{0,5}, v_{0,5})_{H_h^1} = (\rho_h f_h, v_{0,5})_{H_h^1}, \tag{22}$$

и введем в рассмотрение динамическую задачу для вязкоупругой изотропной среды Кельвина (Кельвина — Фойгта). В отличие от (1) уравнение состояния в этом случае записывается следующим образом:

$$\sigma_1' = K_1\varepsilon_1 + \eta_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t}, \quad \sigma_2' = K_2\varepsilon_2 + \eta_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial t}. \tag{23}$$

Скалярные функции $\eta_1(M) > 0$, $\eta_2(M) > 0$ в (23) определяют объемную и сдвиговую вязкости рассматриваемой среды. Ради некоторых упрощений положим $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, и тогда

$$\sigma' = K\varepsilon + \eta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \sigma + \eta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \sigma + \eta R v.$$

Тем самым для задачи динамики изотропной вязкоупругой среды «типа Кельвина» приходим к непрерывной базовой модели

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + R^*\sigma + R^*\eta R v = \rho f, \quad K^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial t} - Rv = 0 \tag{24}$$

с законом сохранения

$$\frac{\partial J}{\partial t} + (R^*\eta R v, v)_{H^1} = (\rho f, v)_{H^1}. \tag{25}$$

Физические процессы, описываемые непрерывными базовыми моделями (11) и (24), принципиально различаются. В первом случае речь идет о равновесном (обратимом) процессе, во втором — о необратимом. Мерой необратимости процесса служит энтропия $s(t)$, отнесенная к заданному объему V. Для изотропной вязкоупругой модели (24) в [8, ч. 1, § 16]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi, \quad \Phi = (R^*\eta R v, v)_{H^1}, \tag{26}$$

где T — абсолютная температура, Φ — диссипативная функция, характеризующая изменение механической энергии $J(t)$ на переходе $t \to t + \Delta t$. С учетом (26) закон сохранения (25) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \rho T \frac{ds}{dt} = (\rho f, v)_{H^1} \leftrightarrow \frac{\partial J}{\partial t} + \Phi = (\rho f, v)_{H^1}, \tag{27}$$

откуда при $f = 0$ вытекает (сравни с (21)!)

$$J(t+\tau) \le J(t). \tag{28}$$

Наконец, отметим, что закон сохранения для дискретной упругой модели (16) при $\alpha \ge 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$ можно записать так:

$$\begin{gathered} (J_h)_{\bar t}^{n+1} + \Phi_h = (\rho_h f_h, v_{0,5})_{H_h^1}, \quad \Phi_h = (R_h^*(\eta_*)_h R_h v_{0,5}, v_{0,5})_{H_h^1}, \\ (\eta_*)_h = \tau(\alpha - 0{,}5)K_h. \end{gathered} \tag{29}$$

Вместе с (27) это приводит к следующему результату.

Теорема 3. *При* $\alpha > 0{,}5$, $\beta = 0{,}5$ *дискретная модель динамики упругой среды* (16) *и дискретная модель динамики изотропной вязкоупругой среды «типа Кельвина», вязкость* $(\eta_*)_h$ *которой определена в* (29), *эквивалентны.*

Факторизация оператора B_h в (16) приводит к явно разрешимой неравновесной модели (17). Поэтому неизбежен дисбаланс полной механической энергии, а после завершения расчета ($t = t_* = k\tau$) вместо $J_h^k = J_h^0$ будем иметь

$$J_h^k + 0{,}125\tau^2\big(L_h v_h^0, v_h^0\big)_{H_h^1} = J_h^0 + 0{,}125\tau^2(L_h v_h^k, v_h^k), \quad L_h = R_h^* K_h R_h. \tag{30}$$

Введем в рассмотрение спектральную задачу

$$L_h q_m = \nu_m \rho_h q_m, \quad q_m \in H_h^1, \quad 0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{N-1} < \nu_N = \nu_{\max}. \tag{31}$$

Оценка сверху для $\nu_{\max}$ известна: $h^2\nu_{\max} \le c^2(V_h)$, и областная константа $c^2(M_h)$ от h не зависит. Если в (30) $J_h^k < J_h^0$, то из (30), (31) следует

$$\big(1 - J_h^k/J_h^0\big) \le 0{,}25\omega_1 = \varepsilon_1. \tag{32}$$

Здесь и далее $\omega = c\tau/h$ — число Куранта. Если же в (30) $J_h^0 < J_h^k$, то вместо (32) будем иметь

$$\left(1 - J_h^0/J_h^k\right) \le 0{,}25\omega_1 = \varepsilon_1. \tag{33}$$

Оценки (32), (33) дают возможность с помощью параметра ω_1 «управлять» дисбалансом полной механической энергии, поскольку именно ε_1 в (32), (33) является относительной мерой дисбаланса.

Оценки (32), (33) имеют место и для явно разрешимых дискретных моделей $(17; 0{,}5 < \alpha \le 1,\ \beta = 0{,}5)$. При этом ε_1 из (32), (33) следует заменить на $\varepsilon_2 = 0{,}5\alpha^2\omega_2^2$. Если $\omega_1 = \omega_2$, то $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и относительная мера дисбаланса полной механической энергии для $(17; 0{,}5 < \alpha \le 1, \beta = 0{,}5)$ заведомо больше, чем для $(17; \alpha = \beta = 0{,}5)$.

Для базовой задачи (15) укажем здесь другой способ [9, гл. III] построения экономичных неравновесных моделей с контролируемым дисбалансом полной механической энергии. Как и выше, для упрощения записи будем считать $f_h = 0$. Итак, пусть задано $w_h^n = y^n = (v^n, \sigma^n)^T$. Переход $y^n \to y^{n+1}$ осуществим с помощью экономичной модели

$$\varepsilon_{\bar t}^{n+1} - R_h v_h^n = 0 \to \sigma_h^{n+1} = K_h \varepsilon_h^{n+1} = 0 \to \rho v_{\bar t}^{n+1} + R_h^* \sigma_h^{n+1} = 0, \tag{34}$$

для которой

$$J_h^{n+1} + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^n, v_h^n\right)_{H_h^1} = J_h^n + 0{,}5\tau^2\left(\Lambda_h \sigma_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}\right)_{H_h^2}, \quad \Lambda_h = R_h 1/\rho R_h^*. \tag{35}$$

Для перехода $y^{n+1} \to y^{n+2}$ будем использовать экономичную модель

$$\rho v_{\bar t}^{n+2} + R_h^* \sigma_h^{n+1} = 0 \to \varepsilon_{\bar t}^{n+2} - R_h v_h^{n+2} = 0, \tag{36}$$

для которой

$$J_h^{n+2} + 0{,}5\tau^2\left(\Lambda_h \sigma_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}\right)_{H_h^2} = J_h^{n+1} + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^{n+2}, v_h^{n+2}\right)_{H_h^1}. \tag{37}$$

В качестве следствия из (35), (37) будем иметь

$$J_h^{n+2} + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^n, v_h^n\right)_{H_h^1} = J_h^n + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^{n+2}, v_h^{n+2}\right)_{H_h^1} \tag{38}$$

и поэтому после завершения расчета при четном k получим

$$J_h^k + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^0, v_h^0\right)_{H_h^1} = J_h^0 + 0{,}5\tau^2\left(L_h v_h^k, v_h^k\right)_{H_h^1}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что оценки (32), (33) справедливы и для экономичной неравновесной модели (34), (36), где на этот раз в качестве ε_1 следует использовать $\varepsilon_3 = \omega_3^2$. Фиксация $\omega_i = c\tau_i/h$ фиксирует и меру дисбаланса полной механической энергии ε_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\varepsilon_1 = 0{,}25\omega_1^2, \quad \varepsilon_2 = 0{,}5\alpha\omega_2^2, \quad \varepsilon_3 = \omega_3^2. \tag{40}$$

Следовательно,

$$\text{если } \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \quad \text{то } \omega_1 > \omega_2 > \omega_3. \tag{41}$$

Поэтому если t_* — время завершения расчета, то

$$ht_*/c = k_1\omega_1 = k_2\omega_2 = k_3\omega_3, \tag{42}$$

что вместе с (41) дает $k_1 < k_2 < k_3$.

Увеличение k_i увеличивает число переходов $y^n \to y^{n+1}$, тем самым и общий объем «вычислительной работы» на переходе $y^0 \to y^{k_i}$. С этой точки зрения дискретная неравновесная модель $(17; \alpha = \beta = 0{,}5)$ более предпочтительна, чем $(17; 0{,}5\alpha \leq 1, \beta = 0{,}5)$ и (34), (36). Тем самым появляются достаточные основания для того, чтобы принять неравновесную дискретную модель $(17; \alpha = \beta = 0{,}5)$ в качестве базовой при численной реализации равновесной непрерывной базовой модели (15).

Вышесказанное означает также и то, что прикладное матобеспечение (ППП для конкретных линейных задач динамики упругого тела) следует строить на основе явно разрешимой дискретной модели $(17; \alpha = \beta = 0{,}5)$ в стандартной реализации (17.1), (17.2). Особо следует отметить, что именно свойство явной разрешимости рассмотренных алгоритмов позволяет в качестве базовых ЭВМ использовать многопроцессорные вычислительные комплексы различной архитектуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. М.: Наука; Физматлит, 1997.
2. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Коновалов А. Н.* Сопряженно согласованные аппроксимации и экономичные дискретные реализации для динамической задачи линейной теории упругости // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 1004–1010.
5. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, Физматлит, 1978.
6. *Коновалов А. Н.* Дискретные модели в динамической задаче линейной теории упругости и законы сохранения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 7. С. 990–996.
7. *Самарский А. А, Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. 2-е изд., испр. и доп. М.: УРСС, 2005.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
9. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. 4-е изд., испр. М.: УРСС, 2004.

Статья поступила 21 апреля 2915 г.

Коновалов Анатолий Николаевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
kan@sscc.ru

Попов Юрий Петрович
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, Москва 125047;
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
popov@keldysh.ru