Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 512.57, 512.579

ДИМОНОИДЫ И БАР–ЕДИНИЦЫ

А. В. Жучок

Аннотация. А. П. Пожидаев доказал, что любую диалгебру можно вложить в диалгебру с бар-единицей. Как известно, диалгебра — это векторное пространство, снабженное двумя бинарными операциями, удовлетворяющими аксиомам димоноида. Естественной в этой ситуации является постановка задач о возможности присоединения бар-единиц к димоноидам заданного класса и о вложении димоноидов в димоноиды с бар-единицами.

В настоящей статье указанные задачи решены для некоторых классов димоноидов. В частности, показано, что к свободному димоноиду невозможно присоединить множество бар-единиц, и решена проблема вложения произвольного димоноида в димоноид с бар-единицами.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.505

Ключевые слова: димоноид, бар-единица, присоединение множества бар-единиц, свободный димоноид, свободный прямоугольный димоноид, свободный коммутативный димоноид, свободный n-(ди)нильпотентный димоноид, полугруппа, группа автоморфизмов.

1. Введение. Одной из классических задач алгебры является задача вложения одной алгебраической системы в другую. Известно, например, что коммутативная полугруппа вложима в группу тогда и только тогда, когда она есть полугруппа с сокращениями, а область целостности может быть вложена в поле. А. И. Мальцевым были получены необходимые и достаточные условия вложимости произвольной полугруппы в группу, а Оре доказал, что любое реверсивное справа кольцо без делителей нуля вложимо в тело.

Димоноиды впервые были введены Лодэ [1] и использованы для построения свободных диалгебр и когомологий диалгебр. В последнее время появились работы (см., например, [2–6]), посвященные изучению свойств димоноидов и диалгебр — линейных аналогов димоноидов. Так, в частности, в [5] показано, что любую диалгебру можно вложить в диалгебру с бар-единицей. Гомологии диалгебр с бар-единицей изучались в [6]. В теории димоноидов важное место занимают относительно свободные димоноиды, поскольку любой димоноид является гомоморфным образом некоторого относительно свободного димоноида. Поэтому, изучая свойства относительно свободных димоноидов (см., например, [7–11]), можно иметь неплохое представление о тех или иных свойствах любого конкретного димоноида.

Данная работа посвящена исследованию вопросов о присоединении бар-единиц к димоноидам заданного класса и о вложении димоноидов в димоноиды с бар-единицами. В ней решены проблемы присоединения множества бар-единиц к димоноиду левых и правых нулей [8], свободному прямоугольному димоноиду [8], димоноиду S_f [12], а также проблема вложения произвольного димоноида в димоноид с бар-единицами. Доказано, что множество бар-единиц невозможно присоединить к свободному димоноиду [1], свободному коммутативному димоноиду [9], свободному n-нильпотентному ($n > 1$) димоноиду [10] и свободному n-динильпотентному ($n > 1$) димоноиду [11]. Кроме того, установлено, что полугруппы свободного прямоугольного димоноида, свободного димоноида, свободного n-нильпотентного димоноида и свободного n-динильпотентного димоноида антиизоморфны, полугруппы свободного коммутативного димоноида изоморфны, а группы автоморфизмов свободного прямоугольного димоноида, свободного димоноида, свободного коммутативного димоноида, свободного n-нильпотентного димоноида и свободного n-динильпотентного димоноида изоморфны симметрической группе.

Полученные результаты могут быть применены к диалгебрам, а некоторые из них могут быть полезны в дальнейшем при рассмотрении общей задачи вложения димоноида в дигруппу [13]. Основные результаты пп. 3–6 были анонсированы в [14].

2. Предварительные сведения. Напомним, что непустое множество D с определенными на нем бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$, удовлетворяющими аксиомам:

$$
\begin{gathered}
(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),\\
(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),\\
(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),\\
(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),\\
(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)
\end{gathered}
$$

для всех $x, y, z \in D$, называется *димоноидом.* В случае, когда операции димоноида совпадают, он превращается в полугруппу, т. е. димоноиды являются обобщением полугрупп. Существуют многочисленные примеры димоноидов с различными операциями (см., например, [1, 2, 7–12]).

Элемент e димоноида $(D, \dashv, \vdash)$ называется *бар-единицей* [1], если $x \dashv e = x = e \vdash x$ для любого $x \in D$. Отметим, что в отличие от моноидов димоноид может иметь не обязательно только лишь одну бар-единицу, а множество всех его бар-единиц (если оно непустое) образует поддимоноид. Если димоноид имеет единицу, то операции в нем совпадают, что следует из аксиом димоноида. Наличие бар-единицы в диалгебре играет важную роль при исследованиях гомологий диалгебры [6].

Следующие две леммы дают новые примеры димоноидов с бар-единицами, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть S — произвольная полугруппа, $\varepsilon \notin S$ — произвольный символ. Через $U = U_\varepsilon^S$ обозначим множество всех слов в алфавите $S \cup \{\varepsilon\}$ вида $w\varepsilon v$, где $w, v \in S \cup \{\omega\}$ (ω — пустое слово, $\omega \notin S \cup \{\varepsilon\}$). Рассмотрим далее моноид $(S \cup \{\omega\}, *)$, полученный из полугруппы S присоединением к ней символа ω в качестве единицы. На множестве U определим операции $\dashv$ и $\vdash$, полагая

$$w_1\varepsilon v_1 \dashv w_2\varepsilon v_2 = w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2), \quad w_1\varepsilon v_1 \vdash w_2\varepsilon v_2 = (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon v_2$$

для всех $w_1\varepsilon v_1, w_2\varepsilon v_2 \in U$.

Лемма 1. *Алгебра $(U, \dashv, \vdash)$ является димоноидом с бар-единицей ε.*

Доказательство. Пусть $w_1\varepsilon v_1$, $w_2\varepsilon v_2$, $w_3\varepsilon v_3 \in U$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(w_1\varepsilon v_1 \dashv w_2\varepsilon v_2) \dashv w_3\varepsilon v_3 &= w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2) \dashv w_3\varepsilon v_3 = w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2 * w_3 * v_3)\\
&= w_1\varepsilon v_1 \dashv w_2\varepsilon(v_2 * w_3 * v_3) = w_1\varepsilon v_1 \dashv (w_2\varepsilon v_2 \dashv w_3\varepsilon v_3),
\end{aligned}
$$

$$w_1\varepsilon v_1 \dashv (w_2\varepsilon v_2 \vdash w_3\varepsilon v_3) = w_1\varepsilon v_1 \dashv (w_2 * v_2 * w_3)\varepsilon v_3 = w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2 * w_3 * v_3),$$

$$\begin{aligned}(w_1\varepsilon v_1 \vdash w_2\varepsilon v_2) \dashv w_3\varepsilon v_3 &= (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon v_2 \dashv w_3\varepsilon v_3 = (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon(v_2 * w_3 * v_3)\\ &= w_1\varepsilon v_1 \vdash w_2\varepsilon(v_2 * w_3 * v_3) = w_1\varepsilon v_1 \vdash (w_2\varepsilon v_2 \dashv w_3\varepsilon v_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w_1\varepsilon v_1 \vdash w_2\varepsilon v_2) \vdash w_3\varepsilon v_3 &= (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon v_2 \vdash w_3\varepsilon v_3 = (w_1 * v_1 * w_2 * v_2 * w_3)\varepsilon v_3\\ &= w_1\varepsilon v_1 \vdash (w_2 * v_2 * w_3)\varepsilon v_3 = w_1\varepsilon v_1 \vdash (w_2\varepsilon v_2 \vdash w_3\varepsilon v_3),\end{aligned}$$

$$(w_1\varepsilon v_1 \dashv w_2\varepsilon v_2) \vdash w_3\varepsilon v_3 = w_1\varepsilon(v_1 * w_2 * v_2) \vdash w_3\varepsilon v_3 = (w_1 * v_1 * w_2 * v_2 * w_3)\varepsilon v_3.$$

Таким образом, алгебра $(U, \dashv, \vdash)$ удовлетворяет аксиомам димоноида. Из определений операций следует, что ε — бар-единица.

Лемма доказана.

Полученный димоноид будем обозначать через $S[\varepsilon]$.

Пусть далее $\{S[\varepsilon_i]\}_{i\in I}$ — семейство димоноидов $S[\varepsilon_i]$ с бар-единицами ε_i, $i \in I$. На множестве $\bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i]$ определим операции $\dashv$ и $\vdash$, полагая

$$w_1\varepsilon_i v_1 \dashv w_2\varepsilon_j v_2 = w_1\varepsilon_i(v_1 * w_2 * v_2), \quad w_1\varepsilon_i v_1 \vdash w_2\varepsilon_j v_2 = (w_1 * v_1 * w_2)\varepsilon_j v_2$$

для всех $w_1\varepsilon_i v_1, w_2\varepsilon_j v_2 \in \bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i]$.

Лемма 2. *Алгебра* $\big(\bigcup\limits_{i\in I} S[\varepsilon_i], \dashv, \vdash\big)$ *является димоноидом с бар-единицами* ε_i, $i \in I$.

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 1 можно показать, что указанная алгебра есть димоноид. Из определений операций следует, что каждый элемент ε_i, $i \in I$, является бар-единицей.

Лемма доказана.

Полученный димоноид будем обозначать через $S[\varepsilon_i]_{i\in I}$.

Следствие 1. *Пусть* S *— конечная полугруппа, а* I *— конечное непустое множество. Тогда* $|S[\varepsilon_i]_{i\in I}| = |S|^2 + |I|(2|S| + 1)$.

Пусть $(D, \dashv, \vdash)$ — произвольный димоноид и Y — произвольное непустое множество такое, что $D \cap Y = \varnothing$. Если можно распространить бинарные операции $\dashv$ и $\vdash$, заданные на D, на множество $D \cup Y$ так, что $x \dashv' e = x = e \vdash' x$ при любых $x \in D \cup Y$, $e \in Y$ и алгебра $(D \cup Y, \dashv', \vdash')$ является димоноидом, то будем называть переход от $(D, \dashv, \vdash)$ к $(D \cup Y, \dashv', \vdash')$ *присоединением множества бар-единиц* Y к $(D, \dashv, \vdash)$. В противном случае будем говорить, что к $(D, \dashv, \vdash)$ *невозможно присоединить множество бар-единиц* Y.

Хорошо известно, что к произвольной полугруппе можно присоединить единицу и любую полугруппу можно вложить в полугруппу с единицей.

Напомним, что диалгебра [1] — это векторное пространство, снабженное двумя бинарными операциями, удовлетворяющими аксиомам димоноида. Определение бар-единицы диалгебры совпадает с определением бар-единицы димоноида. В [5] доказано, что любую диалгебру можно вложить в диалгебру с бар-единицей. Естественной в этой ситуации является постановка вопроса о возможности присоединения множества бар-единиц к димоноидам заданного класса.

Через $\Im[X]$ будем обозначать симметрическую группу на множестве X, а через $\mathrm{Aut}(D,\dashv,\vdash)$ — группу автоморфизмов димоноида $(D,\dashv,\vdash)$. Символом $\mathbb{N}$ обозначаем множество всех натуральных чисел.

3. Димоноид левых и правых нулей. В этом пункте решена проблема присоединения множества бар-единиц к димоноиду левых и правых нулей.

Полугруппа называется *полугруппой левых* (*правых*) *нулей*, если она удовлетворяет тождеству $xy = x$ ($xy = y$). Димоноид $(D,\dashv,\vdash)$ называется *димоноидом левых и правых нулей* [8], если $(D,\dashv)$ — полугруппа левых нулей, а $(D,\vdash)$ — полугруппа правых нулей. Димоноид левых и правых нулей $(D,\dashv,\vdash)$ обозначается через $D_{\ell z,rz}$. Известно, что всякий димоноид левых и правых нулей свободный [8]. Легко заметить, что каждый элемент димоноида $D_{\ell z,rz}$ является бар-единицей, а его полугруппы антиизоморфны. При этом полугруппа эндоморфизмов (группа автоморфизмов) димоноида $D_{\ell z,rz}$ изоморфна симметрической полугруппе (симметрической группе) на множестве D (см. [8]).

Пусть D и Y — произвольные непустые множества, причем $D\cap Y=\varnothing$.

Лемма 3. *К димоноиду левых и правых нулей $D_{\ell z,rz}$ можно присоединить множество бар-единиц Y.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что к димоноиду $D_{\ell z,rz}$ можно присоединить множество бар-единиц Y, полагая

$$x\dashv' y = x,\quad x\vdash' y = y,\quad z\dashv'\varepsilon = z = \varepsilon\vdash' z,\quad z\vdash'\varepsilon=\varepsilon=\varepsilon\dashv' z$$

для всех $x, y \in D$, $z\in D\cup Y$ и $\varepsilon\in Y$.

Лемма доказана.

Таким образом, задача присоединения множества бар-единиц Y к произвольному димоноиду $(D,\dashv,\vdash)$ (см. п. 2) сводится к определению на множестве $D\cup Y$ димоноида, содержащего димоноиды $(D,\dashv,\vdash)$ и $Y_{\ell z,rz}$ в качестве поддимоноидов.

4. Свободный прямоугольный димоноид. В этом пункте решена проблема присоединения множества бар-единиц к свободному прямоугольному димоноиду. Показано, что полугруппы свободного прямоугольного димоноида антиизоморфны, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе.

Рассмотрим свободный прямоугольный димоноид [8].

Пусть X — произвольное непустое множество, $X^3 = X\times X\times X$. На множестве X^3 определим операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам

$$(x_1,x_2,x_3)\dashv(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,y_3),\quad (x_1,x_2,x_3)\vdash(y_1,y_2,y_3)=(x_1,y_2,y_3)$$

для всех (x_1,x_2,x_3), $(y_1,y_2,y_3)\in X^3$. Алгебра $(X^3,\dashv,\vdash)$ обозначается через $\mathrm{FRct}(X)$.

Теорема 1 [8, теорема 1]. $\mathrm{FRct}(X)$ — *свободный прямоугольный димоноид.*

Прямоугольные димоноиды использовались при решении задачи о декомпозиции димоноидов в дисвязки поддимоноидов [8].

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между полугруппами свободного прямоугольного димоноида.

Лемма 4. *Полугруппы $(X^3,\dashv)$ и $(X^3,\vdash)$ антиизоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\mu : (X^3,\dashv)\to(X^3,\vdash)$, полагая

$$(a,b,c)\mu=(c,b,a)$$

для всех $(a,b,c)\in X^3$. Непосредственная проверка показывает, что μ — анти-изоморфизм.

Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что множество $\{(a,a,a)\mid a\in X\}$ порождающее для $\mathrm{FRct}(X)$. Отсюда получаем такое описание группы автоморфизмов свободного прямоугольного димоноида.

Лемма 5. $\mathrm{Aut}\,\mathrm{FRct}(X)\cong\Im[X]$.

Пусть B — произвольное непустое множество, причем $\mathrm{FRct}(X)\cap B=\varnothing$.

Теорема 2. *К свободному прямоугольному димоноиду* $\mathrm{FRct}(X)$ *можно присоединить множество бар-единиц* B.

Доказательство. Зафиксируем $d\in X$. На множестве $\mathrm{FRct}(X)\cup B$ определим операции $\dashv'$ и $\vdash'$, полагая

$$w_1\dashv' w_2=w_1\dashv w_2,\quad w_1\vdash' w_2=w_1\vdash w_2,$$

$$w\dashv'\varepsilon=w=\varepsilon\vdash' w,\quad \varepsilon\dashv'(a,b,c)=(a,d,c)=(a,b,c)\vdash'\varepsilon$$

для всех $w_1,w_2,(a,b,c)\in\mathrm{FRct}(X)$, $w\in\mathrm{FRct}(X)\cup B$ и $\varepsilon\in B$. Докажем, что алгебра $(\mathrm{FRct}(X)\cup B,\dashv',\vdash')$ является димоноидом, содержащим множество бар-единиц B.

Для доказательства достаточно показать, что выполняются аксиомы димоноида, в каждую часть которых элементы из B входят один или два раза. Остальные случаи очевидны.

Пусть (a,b,c), (x,y,z) — произвольные элементы из $\mathrm{FRct}(X)$, а ε,e — из B. Используя определения операций $\dashv'$ и $\vdash'$, получаем

$$\begin{aligned}(\varepsilon\dashv'(a,b,c))\dashv'(x,y,z)&=\varepsilon\dashv'((a,b,c)\dashv'(x,y,z))\\&=\varepsilon\dashv'((a,b,c)\vdash'(x,y,z))=(a,d,z),\end{aligned}$$

$$(\varepsilon\vdash'(a,b,c))\dashv'(x,y,z)=\varepsilon\vdash'((a,b,c)\dashv'(x,y,z))=(a,b,z),$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon\vdash'(a,b,c))\vdash'(x,y,z)&=\varepsilon\vdash'((a,b,c)\vdash'(x,y,z))\\&=(\varepsilon\dashv'(a,b,c))\vdash'(x,y,z)=(a,y,z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a,b,c)\dashv'\varepsilon)\dashv'(x,y,z)&=(a,b,c)\dashv'(\varepsilon\dashv'(x,y,z))\\&=(a,b,c)\dashv'(\varepsilon\vdash'(x,y,z))=(a,b,z),\end{aligned}$$

$$((a,b,c)\vdash'\varepsilon)\dashv'(x,y,z)=(a,b,c)\vdash'(\varepsilon\dashv'(x,y,z))=(a,d,z),$$

$$\begin{aligned}((a,b,c)\vdash'\varepsilon)\vdash'(x,y,z)&=(a,b,c)\vdash'(\varepsilon\vdash'(x,y,z))\\&=((a,b,c)\dashv'\varepsilon)\vdash'(x,y,z)=(a,y,z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a,b,c)\dashv'(x,y,z))\dashv'\varepsilon&=(a,b,c)\dashv'((x,y,z)\dashv'\varepsilon)\\&=(a,b,c)\dashv'((x,y,z)\vdash'\varepsilon)=(a,b,z),\end{aligned}$$

$$((a,b,c)\vdash'(x,y,z))\dashv'\varepsilon=(a,b,c)\vdash'((x,y,z)\dashv'\varepsilon)=(a,y,z),$$

$$\begin{aligned}((a,b,c)\vdash'(x,y,z))\vdash'\varepsilon&=(a,b,c)\vdash'((x,y,z)\vdash'\varepsilon)\\&=((a,b,c)\dashv'(x,y,z))\vdash'\varepsilon=(a,d,z),\end{aligned}$$

$$(\varepsilon \dashv' e) \dashv' (x,y,z) = \varepsilon \dashv' (e \dashv' (x,y,z)) = \varepsilon \dashv' (e \vdash' (x,y,z)) = (x,d,z),$$
$$(\varepsilon \vdash' e) \dashv' (x,y,z) = \varepsilon \vdash' (e \dashv' (x,y,z)) = (x,d,z),$$
$$(\varepsilon \vdash' e) \vdash' (x,y,z) = \varepsilon \vdash' (e \vdash' (x,y,z)) = (\varepsilon \dashv' e) \vdash' (x,y,z) = (x,y,z),$$
$$((x,y,z) \dashv' \varepsilon) \dashv' e = (x,y,z) \dashv' (\varepsilon \dashv' e) = (x,y,z) \dashv' (\varepsilon \vdash' e) = (x,y,z),$$
$$((x,y,z) \vdash' \varepsilon) \dashv' e = (x,y,z) \vdash' (\varepsilon \dashv' e) = (x,d,z),$$
$$((x,y,z) \vdash' \varepsilon) \vdash' e = (x,y,z) \vdash' (\varepsilon \vdash' e) = ((x,y,z) \dashv' \varepsilon) \vdash' e = (x,d,z),$$
$$(\varepsilon \dashv' (x,y,z)) \dashv' e = \varepsilon \dashv' ((x,y,z) \dashv' e) = \varepsilon \dashv' ((x,y,z) \vdash' e) = (x,d,z),$$
$$(\varepsilon \vdash' (x,y,z)) \dashv' e = \varepsilon \vdash' ((x,y,z) \dashv' e) = (x,y,z),$$
$$(\varepsilon \vdash' (x,y,z)) \vdash' e = \varepsilon \vdash' ((x,y,z) \vdash' e) = (\varepsilon \dashv' (x,y,z)) \vdash' e = (x,d,z).$$

Таким образом, $(\mathrm{FRct}(X) \cup B, \dashv', \vdash')$ — димоноид, содержащий множество бар-единиц B.

Теорема доказана.

5. Димоноид S_f. В этом пункте решена проблема присоединения множества бар-единиц к димоноиду S_f, построенному в [12], а также изучаются эндоморфизмы димоноида S_f.

Рассмотрим димоноид S_f. Пусть S — полугруппа и f — ее идемпотентный эндоморфизм. На S определим умножения по правилам

$$x \dashv y = x(yf), \quad x \vdash y = (xf)y$$

для всех $x, y \in S$.

Предложение 1 [12, предложение 1]. *$(S, \dashv, \vdash)$ — димоноид.*

Подобная конструкция имеет место при построении диалгебр и естественно возникает на дифференциальной ассоциативной алгебре, градуированной супералгебре и A-бимодуле (см. [1]).

Рассмотренный только что димоноид обозначается через S_f.

Следующая лемма характеризует эндоморфизмы и автоморфизмы димоноида S_f в случае, когда S есть полугруппа с левым (или правым, или двусторонним) сокращением.

Лемма 6. *Пусть S — полугруппа с левым (или правым, или двусторонним) сокращением. Тогда эндоморфизм (соответственно автоморфизм) τ полугруппы S является эндоморфизмом (соответственно автоморфизмом) димоноида S_f тогда и только тогда, когда $\tau f = f\tau$.*

Доказательство. Пусть эндоморфизм τ полугруппы S с левым сокращением является эндоморфизмом димоноида S_f. Для всех $x, y \in S$ имеем

$$(x \dashv y)\tau = (x(yf))\tau = x\tau(yf\tau), \quad x\tau \dashv y\tau = x\tau(y\tau f),$$

откуда $x\tau(yf\tau) = x\tau(y\tau f)$. В силу левой сократимости S из последнего равенства получаем $yf\tau = y\tau f$ для всех $y \in S$, т. е. $f\tau = \tau f$.

Обратно, пусть τ — эндоморфизм полугруппы S такой, что $\tau f = f\tau$. Для всех $x, y \in S$ получаем

$$(x \dashv y)\tau = (x(yf))\tau = x\tau(yf\tau) = x\tau(y\tau f) = x\tau \dashv y\tau,$$

$$(x \vdash y)\tau = ((xf)y)\tau = (xf\tau)y\tau = (x\tau f)y\tau = x\tau \vdash y\tau.$$

Аналогично доказываются случаи, когда S есть полугруппа с правым или двусторонним сокращением, а также случай, когда τ — автоморфизм полугруппы S.

Лемма доказана.

Пусть S — произвольная полугруппа, f — ее идемпотентный эндоморфизм, отличный от тождественного автоморфизма, а B — произвольное непустое множество, причем $S \cap B = \varnothing$.

Теорема 3. *К димоноиду S_f можно присоединить множество бар-единиц B.*

Доказательство. Пусть $\dashv'$ и $\vdash'$ — бинарные операции на множестве $S \cup B$, заданные правилами

$$x \dashv' y = x \dashv y, \quad x \vdash' y = x \vdash y,$$

$$z \dashv' \varepsilon = z = \varepsilon \vdash' z, \quad \varepsilon \dashv' x = xf = x \vdash' \varepsilon$$

для всех $x, y \in S$, $z \in S \cup B$ и $\varepsilon \in B$. Для доказательства того, что алгебра $(S \cup B, \dashv', \vdash')$ является димоноидом, содержащим множество бар-единиц B, достаточно показать выполнение аксиом димоноида, в каждую часть которых элементы из B входят один или два раза. Остальные два случая очевидны.

Пусть x, y — произвольные элементы из S, а ε, e — из B. Используя определения операций $\dashv'$ и $\vdash'$, а также свойства идемпотентного эндоморфизма f, получаем

$$(\varepsilon \dashv' x) \dashv' y = \varepsilon \dashv' (x \dashv' y) = \varepsilon \dashv' (x \vdash' y) = (xf)(yf),$$

$$(\varepsilon \vdash' x) \dashv' y = \varepsilon \vdash' (x \dashv' y) = x(yf),$$

$$(\varepsilon \vdash' x) \vdash' y = \varepsilon \vdash' (x \vdash' y) = (\varepsilon \dashv' x) \vdash' y = (xf)y,$$

$$(x \dashv' \varepsilon) \dashv' y = x \dashv' (\varepsilon \dashv' y) = x \dashv' (\varepsilon \vdash' y) = x(yf),$$

$$(x \vdash' \varepsilon) \dashv' y = x \vdash' (\varepsilon \dashv' y) = (xf)(yf),$$

$$(x \vdash' \varepsilon) \vdash' y = x \vdash' (\varepsilon \vdash' y) = (x \dashv' \varepsilon) \vdash' y = (xf)y,$$

$$(x \dashv' y) \dashv' \varepsilon = x \dashv' (y \dashv' \varepsilon) = x \dashv' (y \vdash' \varepsilon) = x(yf),$$

$$(x \vdash' y) \dashv' \varepsilon = x \vdash' (y \dashv' \varepsilon) = (xf)y,$$

$$(x \vdash' y) \vdash' \varepsilon = x \vdash' (y \vdash' \varepsilon) = (x \dashv' y) \vdash' \varepsilon = (xf)(yf),$$

$$(\varepsilon \dashv' e) \dashv' x = \varepsilon \dashv' (e \dashv' x) = \varepsilon \dashv' (e \vdash' x) = xf,$$

$$(\varepsilon \vdash' e) \dashv' x = \varepsilon \vdash' (e \dashv' x) = xf,$$

$$(\varepsilon \vdash' e) \vdash' x = \varepsilon \vdash' (e \vdash' x) = (\varepsilon \dashv' e) \vdash' x = x,$$

$$(x \dashv' \varepsilon) \dashv' e = x \dashv' (\varepsilon \dashv' e) = x \dashv' (\varepsilon \vdash' e) = x,$$

$$(x \vdash' \varepsilon) \dashv' e = x \vdash' (\varepsilon \dashv' e) = xf,$$

$$(x \vdash' \varepsilon) \vdash' e = x \vdash' (\varepsilon \vdash' e) = (x \dashv' \varepsilon) \vdash' e = xf,$$

$$(\varepsilon \dashv' x) \dashv' e = \varepsilon \dashv' (x \dashv' e) = \varepsilon \dashv' (x \vdash' e) = xf,$$

$$(\varepsilon \vdash' x) \dashv' e = \varepsilon \vdash' (x \dashv' e) = x,$$

$$(\varepsilon \vdash' x) \vdash' e = \varepsilon \vdash' (x \vdash' e) = (\varepsilon \dashv' x) \vdash' e = xf.$$

Таким образом, $(S \cup B, \dashv', \vdash')$ — димоноид, содержащий множество бар-единиц B.

Теорема доказана.

Отметим, что если f — тождественный автоморфизм, то S_f — полугруппа. В этом случае, применяя указанный в доказательстве теоремы 3 способ присоединения бар-единиц, приходим к тому, что $B = \{\varepsilon\}$ и $(S \cup B, \dashv', \vdash')$ становится полугруппой с единицей ε.

6. Свободный димоноид. В этом пункте доказано, что к свободному димоноиду невозможно присоединить множество бар-единиц. Показано, что полугруппы свободного димоноида антиизоморфны, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе.

Рассмотрим свободный димоноид, построенный в [1].

Пусть X — произвольное непустое множество, $n \in \mathbb{N}$. Через Y_n обозначим объединение n разных копий множества X^n и положим $D(X) = \bigcup_{n \geq 1} Y_n$. Обозначая через $x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_n$ элемент в i-й компоненте Y_n, на множестве $D(X)$ определим операции:

$$(x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k) \dashv (x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l) = x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_l,$$

$$(x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k) \vdash (x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l) = x_1 \dots \breve{x}_j \dots x_l$$

для всех $x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k,\ x_{k+1} \dots \breve{x}_j \dots x_l \in D(X)$. Тогда $(D(X), \dashv, \vdash)$ является свободным димоноидом на множестве X (см. [1, с. 15]).

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между полугруппами свободного димоноида.

Лемма 7. *Полугруппы $(D(X), \dashv)$ и $(D(X), \vdash)$ антиизоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\pi : (D(X), \dashv) \to (D(X), \vdash)$, полагая

$$(x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k)\pi = x_k \dots \breve{x}_i \dots x_1$$

для всех $x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k \in D(X)$. Непосредственная проверка показывает, что π — антиизоморфизм.

Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что свободный димоноид однозначно с точностью до изоморфизма определяется мощностью множества X. Отсюда получаем следующее описание группы автоморфизмов свободного димоноида.

Лемма 8. $\mathrm{Aut}(D(X), \dashv, \vdash) \cong \Im[X]$.

Пусть Y — произвольное непустое множество такое, что $D(X) \cap Y = \varnothing$.

Теорема 4. *К свободному димоноиду $(D(X), \dashv, \vdash)$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.*

Доказательство. Для каждого $w = x_1 \dots \breve{x}_i \dots x_k \in D(X)$ положим $\widetilde{w} = x_1 \dots x_i \dots x_k$. Пусть далее $\dashv'$ и $\vdash'$ — бинарные операции на множестве $D(X) \cup Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w_1 \dashv' w_2 = w_1 \dashv w_2, \quad w_1 \vdash' w_2 = w_1 \vdash w_2, \quad w \dashv' \varepsilon = w = \varepsilon \vdash' w$$

для всех $w_1, w_2 \in D(X)$, $w \in D(X) \cup Y$ и $\varepsilon \in Y$. Докажем, что алгебра $(D(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ не является димоноидом.

Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что $(D(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ — димоноид. Пусть $\varepsilon \dashv' w = t$, $w \vdash' \varepsilon = t'$ для некоторых $\varepsilon \in Y$, $w \in D(X)$. Имеем

$$(w \dashv' \varepsilon) \dashv' w = w \dashv' w = w \dashv' (\varepsilon \dashv' w) = w \dashv' t. \tag{1}$$

Для элемента t существуют следующие три случая:

1) $t = e \in Y$; 2) $t \in D(X)$, $t \neq w$; 3) $t = w$.

Рассмотрим случай 1. Используя (1), имеем

$$w \dashv' w = w \dashv w = w \dashv' t = w \dashv' e = w,$$

откуда w — идемпотент полугруппы $(D(X), \dashv)$. Последнее противоречит тому факту, что $(D(X), \dashv)$ не содержит идемпотентов. Следовательно, $\varepsilon \dashv' w \neq e$ для всех $\varepsilon \in Y$, $w \in D(X)$.

Рассмотрим случай 2. Из (1) получаем

$$w \dashv' w = w \dashv w = w\widetilde{w} = w\tilde{t} = w \dashv t = w \dashv' t,$$

откуда

$$\widetilde{w} = \tilde{t}. \tag{2}$$

Далее, имеем

$$w \vdash' (\varepsilon \dashv' w) = w \vdash' t = w \vdash t = \widetilde{w}t, \tag{3}$$

$$(w \vdash' \varepsilon) \dashv' w = t' \dashv' w. \tag{4}$$

Для элемента t' существуют следующие три случая:

(а) $t' = e \in Y$; (б) $t' \in D(X)$, $t' \neq w$; (в) $t' = w$.

В случае (а) имеем

$$(w \vdash' \varepsilon) \vdash' w = e \vdash' w = w, \quad w \vdash' (\varepsilon \vdash' w) = w \vdash' w = w \vdash w,$$

откуда $w \vdash w = w$, что неверно, так как $(D(X), \vdash)$ не содержит идемпотентов. Следовательно, $t' \neq e$.

Рассмотрим случай (б). Из (4) получаем $(w \vdash' \varepsilon) \dashv' w = t' \dashv' w = t' \dashv w = t'\widetilde{w}$. Тогда, учитывая (3), имеем $\widetilde{w}t = t'\widetilde{w}$. Последнее равенство является ложным, так как согласно (2) $\widetilde{w} \neq t$. Таким образом, случай (б) не имеет места.

Перейдем к случаю (в). Из (4) получаем $(w \vdash' \varepsilon) \dashv' w = w \dashv' w = w \dashv w = w\widetilde{w}$, откуда, принимая во внимание (3), выводим $\widetilde{w}t = w\widetilde{w}$, что неверно, так как согласно (2) $\widetilde{w} \neq t$. Следовательно, случай (в) не имеет места.

Таким образом, условие 2 неверно.

Из предыдущих рассуждений следует, что имеет место условие 3, т. е. $\varepsilon \dashv' w = w$ для всех $\varepsilon \in Y$, $w \in D(X)$. Поскольку по предположению $(D(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ есть димоноид, то $\varepsilon \dashv' (w_1 \dashv' w_2) = \varepsilon \dashv' (w_1 \vdash' w_2)$ для всех $w_1, w_2 \in D(X)$, откуда

$$w_1 \dashv' w_2 = w_1 \vdash' w_2 = w_1 \dashv w_2 = w_1 \vdash w_2.$$

Это означает, что операции свободного димоноида совпадают, что противоречит его определению. Следовательно, условие 3 также неверно.

Подводя итоги, приходим к выводу, что наше предположение о том, что алгебра $(D(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ есть димоноид, неверно. Таким образом, $(D(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ не димоноид. Отсюда следует, что к свободному димоноиду $(D(X), \dashv, \vdash)$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.

Теорема доказана.

7. Свободный коммутативный димоноид. В этом пункте доказано, что к свободному коммутативному димоноиду невозможно присоединить множество бар-единиц. Показано, что полугруппы свободного коммутативного димоноида изоморфны, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе.

Рассмотрим свободный коммутативный димоноид [9].

Пусть $F^*[X]$ — свободная коммутативная полугруппа на множестве X, G — множество неупорядоченных пар (p, q), $p, q \in X$. На множестве $F^*[X] \cup G$ определим операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам

$$a_1 \dots a_m \dashv b_1 \dots b_n = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n,$$

$$a_1 \dots a_m \vdash b_1 \dots b_n = \begin{cases} a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n, & mn > 1, \\ (a_1, b_1), & m = n = 1, \end{cases}$$

$$a_1 \dots a_m \dashv (p, q) = a_1 \dots a_m \vdash (p, q) = a_1 \dots a_m pq,$$

$$(p, q) \dashv a_1 \dots a_m = (p, q) \vdash a_1 \dots a_m = pqa_1 \dots a_m,$$

$$(p, q) \dashv (r, s) = (p, q) \vdash (r, s) = pqrs$$

для всех $a_1 \dots a_m$, $b_1 \dots b_n \in F^*[X]$, $(p, q), (r, s) \in G$.

Теорема 5 [9, теорема 3]. $(F^*[X] \cup G, \dashv, \vdash)$ — *свободный коммутативный димоноид.*

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между полугруппами свободного коммутативного димоноида.

Лемма 9. *Полугруппы* $(F^*[X] \cup G, \dashv)$ *и* $(F^*[X] \cup G, \vdash)$ *изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\lambda : (F^*[X] \cup G, \dashv) \to (F^*[X] \cup G, \vdash)$, полагая

$$w\lambda = \begin{cases} (a, b), & \text{если } w = ab,\ a, b \in X, \\ ab, & \text{если } w = (a, b) \in G, \\ w & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что λ — изоморфизм.

Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что свободный коммутативный димоноид однозначно с точностью до изоморфизма определяется мощностью множества X. Отсюда получаем следующее описание группы автоморфизмов свободного коммутативного димоноида.

Лемма 10. $\mathrm{Aut}(F^*[X] \cup G, \dashv, \vdash) \cong \Im[X]$.

Пусть Y — произвольное непустое множество такое, что $(F^*[X] \cup G) \cap Y = \varnothing$.

Теорема 6. *К свободному коммутативному димоноиду* $(F^*[X] \cup G, \dashv, \vdash)$ *невозможно присоединить множество бар-единиц* Y.

Доказательство. Пусть $\dashv'$ и $\vdash'$ — бинарные операции на множестве $F^*[X] \cup G \cup Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w_1 \dashv' w_2 = w_1 \dashv w_2, \quad w_1 \vdash' w_2 = w_1 \vdash w_2, \quad w \dashv' \varepsilon = w = \varepsilon \vdash' w$$

для всех $w_1, w_2 \in F^*[X] \cup G$, $w \in F^*[X] \cup G \cup Y$ и $\varepsilon \in Y$. Используя метод от противного, докажем, что алгебра $(F^*[X] \cup G \cup Y, \dashv', \vdash')$ не является димоноидом.

Допустим, что $(F^*[X]{\cup}G{\cup}Y, \dashv', \vdash')$ — димоноид. Пусть $\varepsilon \dashv' x = t$, $x \vdash' \varepsilon = t'$ для некоторых $\varepsilon \in Y$, $x \in X$. Для элемента t существуют такие четыре случая:

1) $t = e \in Y$; 2) $t = (a, b) \in G$; 3) $t = a_1 \dots a_m \in F^*[X], m > 1$; 4) $t = c \in X$.

В случае 1 получаем

$$(x \dashv' \varepsilon) \dashv' x = x \dashv' x = xx, \quad x \dashv' (\varepsilon \dashv' x) = x \dashv' e = x,$$

откуда $xx = x$, что неверно. Следовательно, $\varepsilon \dashv' x \neq e$ для всех $\varepsilon \in Y$, $x \in X$.

Рассмотрим случай 2:

$$\varepsilon \vdash' (x \vdash' x) = x \vdash' x = (x, x), \quad (\varepsilon \dashv' x) \vdash' x = (a, b) \vdash' x = abx,$$

откуда $(x, x) = abx$, что неверно. Следовательно, $\varepsilon \dashv' x \neq (a, b)$ для всех $\varepsilon \in Y$, $x \in X$.

Перейдем к случаю 3. Имеем

$$\varepsilon \vdash' (x \vdash' x) = (x, x), \quad (\varepsilon \dashv' x) \vdash' x = a_1 \dots a_m \vdash' x = a_1 \dots a_m x,$$

откуда $(x, x) = a_1 \dots a_m x$, что неверно. Следовательно, $\varepsilon \dashv' x \neq a_1 \dots a_m$ для всех $\varepsilon \in Y$, $x \in X$, $m > 1$.

Из предыдущих рассуждений получаем, что имеет место случай 4. Аналогично можно показать, что $t' = d \in X$.

Далее,

$$(x \vdash' \varepsilon) \dashv' x = d \dashv' x = dx, \quad x \vdash' (\varepsilon \dashv' x) = x \vdash' c = (x, c),$$

откуда $dx = (x, c)$, что снова неверно. Это означает, что случай 4 не имеет места.

Таким образом, наше предположение о том, что алгебра $(F^*[X]{\cup}G{\cup}Y, \dashv', \vdash')$ есть димоноид, неверно. Поэтому $(F^*[X] \cup G \cup Y, \dashv', \vdash')$ не димоноид. Отсюда следует, что к свободному коммутативному димоноиду $(F^*[X] \cup G, \dashv, \vdash)$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.

Теорема доказана.

8. Свободный n-нильпотентный димоноид. В этом пункте доказано, что к свободному n-нильпотентному димоноиду ($n > 1$) невозможно присоединить множество бар-единиц. Показано, что полугруппы свободного n-нильпотентного димоноида антиизоморфны, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе.

Рассмотрим свободный n-нильпотентный димоноид произвольного ранга [10].

Пусть X — алфавит, $F[X]$ — свободная полугруппа на X. Через l_w обозначим длину слова $w \in F[X]$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим

$$FN_n = \{(w, m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid m \leq l_w \leq n\} \cup \{0\}.$$

Определим на множестве FN_n операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам

$$(w_1, m_1) {\dashv} (w_2, m_2) = \begin{cases} (w_1 w_2, m_1), & l_{w_1 w_2} \leq n, \\ 0, & l_{w_1 w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1, m_1) {\vdash} (w_2, m_2) = \begin{cases} (w_1 w_2, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1 w_2} \leq n, \\ 0, & l_{w_1 w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1, m_1) * 0 = 0 * (w_1, m_1) = 0 * 0 = 0$$

для всех $(w_1, m_1), (w_2, m_2) \in FN_n \backslash \{0\}$ и $* \in \{\dashv, \vdash\}$. Алгебра $(FN_n, \dashv, \vdash)$ обозначается через $FN_n(X)$.

Теорема 7 [10, теорема 1]. *$FN_n(X)$ — свободный n-нильпотентный димоноид.*

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между полугруппами свободного n-нильпотентного димоноида.

Лемма 11. *Полугруппы $(FN_n, \dashv)$ и $(FN_n, \vdash)$ антиизоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $\chi : (FN_n, \dashv) \to (FN_n, \vdash)$, полагая

$$w\chi = \begin{cases} (x_m x_{m-1} \dots x_1, m-s+1), & \text{если } \begin{array}{l} w = (x_1x_2\dots x_m, s) \in FN_n \backslash \{0\}, \\ x_i \in X,\ 1 \le i \le m, \end{array} \\ 0, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что χ — антиизоморфизм.

Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что свободный n-нильпотентный димоноид однозначно с точностью до изоморфизма определяется мощностью множества X. Отсюда получаем следующее описание группы автоморфизмов свободного n-нильпотентного димоноида.

Лемма 12. $\operatorname{Aut} FN_n(X) \cong \Im[X]$.

Пусть Y — произвольное непустое множество такое, что $FN_n(X) \cap Y = \varnothing$.

Теорема 8. *К свободному n-нильпотентному димоноиду $FN_n(X)$ $(n > 1)$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.*

Доказательство. Пусть $\dashv'$ и $\vdash'$ — бинарные операции на множестве $FN_n(X) \cup Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$w_1 \dashv' w_2 = w_1 \dashv w_2, \quad w_1 \vdash' w_2 = w_1 \vdash w_2, \quad w \dashv' \varepsilon = w = \varepsilon \vdash' w$$

для всех $w_1, w_2 \in FN_n(X)$, $w \in FN_n(X) \cup Y$ и $\varepsilon \in Y$. Докажем методом от противного, что алгебра $(FN_n(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ не является димоноидом.

Допустим, что $(FN_n(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ — димоноид. Пусть $\varepsilon \dashv' (x, 1) = t$, $(x, 1) \vdash' \varepsilon = t'$ для некоторых $\varepsilon \in Y$, $(x, 1) \in FN_n \backslash \{0\}$, где $x \in X$. Для элемента t существуют такие три случая:

1) $t = 0$; 2) $t = e \in Y$; 3) $t \in FN_n \backslash \{0\}$.

Рассмотрим случай 1. Пусть $(y, 1) \in FN_n \backslash \{0\}$, где $y \in X$. Имеем

$$\varepsilon \vdash' ((x, 1) \vdash' (y, 1)) = (x, 1) \vdash' (y, 1) = (xy, 2),$$

$$(\varepsilon \dashv' (x, 1)) \vdash' (y, 1) = 0 \vdash' (y, 1) = 0,$$

откуда $(xy, 2) = 0$, что неверно. Следовательно, $\varepsilon \dashv' (x, 1) \neq 0$ для всех $\varepsilon \in Y$, $(x, 1) \in FN_n \backslash \{0\}$.

В случае 2 получаем

$$((x, 1) \dashv' \varepsilon) \dashv' (x, 1) = (x, 1) \dashv' (x, 1) = (xx, 1),$$

$$(x, 1) \dashv' (\varepsilon \dashv' (x, 1)) = (x, 1) \dashv' e = (x, 1),$$

откуда $(xx, 1) = (x, 1)$, что неверно. Следовательно, $\varepsilon \dashv' (x, 1) \neq e$ для всех $\varepsilon \in Y$, $(x, 1) \in FN_n \backslash \{0\}$.

По аналогии со случаем 2 в случае 3 имеем

$$((x, 1) \dashv' \varepsilon) \dashv' (x, 1) = (xx, 1), \quad (x, 1) \dashv' (\varepsilon \dashv' (x, 1)) = (x, 1) \dashv' t,$$

откуда $(xx,1) = (x,1) \dashv' t$. Из последнего равенства следует, что $t = (x,1)$. Таким образом, $\varepsilon \dashv' (x,1) = (x,1)$. Аналогично можно показать, что $t' = (x,1)$.

Далее,

$$((x,1) \vdash' \varepsilon) \dashv' (x,1) = (x,1) \dashv' (x,1) = (xx,1),$$
$$(x,1) \vdash' (\varepsilon \dashv' (x,1)) = (x,1) \vdash' (x,1) = (xx,2),$$

откуда $(xx,1) = (xx,2)$, что снова неверно. Это означает, что случай, при котором $t \in FN_n \backslash \{0\}$, не имеет места.

Таким образом, наше предположение о том, что алгебра $(FN_n(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ есть димоноид, неверно. Значит, $(FN_n(X) \cup Y, \dashv', \vdash')$ не димоноид. Отсюда следует, что к свободному n-нильпотентному димоноиду $FN_n(X)$ при $n > 1$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.

Теорема доказана.

9. Свободный n-динильпотентный димоноид. В этом пункте установлено, что к свободному n-динильпотентному димоноиду $(n > 1)$ невозможно присоединить множество бар-единиц. Показано, что полугруппы свободного n-динильпотентного димоноида антиизоморфны, а его группа автоморфизмов изоморфна симметрической группе.

Рассмотрим свободный n-динильпотентный димоноид произвольного ранга [11]. Будем использовать обозначения п. 8.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и на множестве

$$FD_n = \{(w,m) \in F[X] \times \mathbb{N} \mid m \leq l_w,\ m \leq n,\ l_w - m + 1 \leq n\} \cup \{0\}$$

определим операции $\dashv$ и $\vdash$ по правилам

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = \begin{cases} (w_1w_2, m_1), & l_{w_1w_2} - m_1 + 1 \leq n, \\ 0, & l_{w_1w_2} - m_1 + 1 > n, \end{cases}$$

$$(w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = \begin{cases} (w_1w_2, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + m_2 \leq n, \\ 0, & l_{w_1} + m_2 > n, \end{cases}$$

$$(w_1,m_1) * 0 = 0 * (w_1,m_1) = 0 * 0 = 0$$

для всех $(w_1,m_1), (w_2,m_2) \in FD_n \backslash \{0\}$ и $* \in \{\dashv, \vdash\}$. Алгебра $(FD_n, \dashv, \vdash)$ обозначается через $FD_n(X)$.

Теорема 9 [11, теорема 1.1]. *$FD_n(X)$ — свободный n-динильпотентный димоноид.*

Следующие две леммы доказываются аналогично леммам 11 и 12.

Лемма 13. *Полугруппы $(FD_n, \dashv)$ и $(FD_n, \vdash)$ антиизоморфны.*

Лемма 14. $\operatorname{Aut} FD_n(X) \cong \Im[X]$.

Пусть Y — произвольное непустое множество такое, что $FD_n(X) \cap Y = \varnothing$.

Теорема 10. *К свободному n-динильпотентному димоноиду $FD_n(X)$ $(n > 1)$ невозможно присоединить множество бар-единиц Y.*

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 8.

10. Вложение произвольного димоноида в димоноид с бар-единицами. Теоремы 4, 6, 8 и 10 показывают, что существуют димоноиды, к которым невозможно присоединить множество бар-единиц. В связи с этим представляет большой интерес вопрос о том, всегда ли произвольный димоноид можно вложить в димоноид с бар-единицами. Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос, а также показывает, что теорема 3 из [5] имеет аналог в классе димоноидов.

Для заданного отношения ρ на димоноиде $(D, \dashv, \vdash)$ конгруэнцией, порожденной ρ, служит наименьшая конгруэнция на $(D, \dashv, \vdash)$, содержащая ρ. Она будет обозначаться через ρ^* и может характеризоваться как пересечение всех конгруэнций на $(D, \dashv, \vdash)$, содержащих ρ. Если α — конгруэнция на димоноиде $(D, \dashv, \vdash)$ такая, что операции фактор-димоноида $(D, \dashv, \vdash)/\alpha$ совпадают и сам он есть полугруппа, то будем говорить, что α — *полугрупповая конгруэнция.*

Пусть $(D, \dashv_1, \vdash_1)$ — произвольный димоноид и $\rho = \{(x \vdash_1 y, x \dashv_1 y) \mid x, y \in D\}$. Очевидно, что ρ^* — наименьшая полугрупповая конгруэнция на димоноиде $(D, \dashv_1, \vdash_1)$. Класс конгруэнции ρ^*, содержащий элемент $a \in D$, будем обозначать через $\bar{a}$, а фактор-димоноид $(D, \dashv_1, \vdash_1)/\rho^*$ — через $\overline{D}$.

Рассмотрим далее моноиды $(D \cup \{\theta\}, \dashv_2)$ и $(D \cup \{\theta\}, \vdash_2)$, полученные из полугрупп $(D, \dashv_1)$ и соответственно $(D, \vdash_1)$ присоединением к ним символа θ в качестве единицы.

Используя переход от операций $\dashv_2, \vdash_2$ к операциям $\dashv_1, \vdash_1$ и аксиомы димоноида, можно доказать следующую лемму.

Лемма 15. *Имеют место следующие равенства:*
(i) $(b \dashv_2 c \dashv_2 d) \dashv_1 x = b \dashv_1 (c \vdash_2 d \vdash_2 x)$, $b, x \in D, c, d \in D \cup \{\theta\}$;
(ii) $(b \dashv_2 c \dashv_2 d) \vdash_1 x = b \vdash_1 (c \vdash_2 d \vdash_2 x)$, $b, x \in D, c, d \in D \cup \{\theta\}$;
(iii) $(b \vdash_1 c) \dashv_2 d \dashv_2 x = b \vdash_1 (c \dashv_2 d \dashv_2 x)$, $b, c \in D, d, x \in D \cup \{\theta\}$;
(iv) $(b \vdash_2 c \vdash_2 d) \dashv_1 x = b \vdash_2 c \vdash_2 (d \dashv_1 x)$, $d, x \in D, b, c \in D \cup \{\theta\}$;
(v) $(b \vdash_2 c \vdash_2 d) \dashv_2 x \dashv_2 y = b \vdash_2 c \vdash_2 (d \dashv_2 x \dashv_2 y)$, $d \in D, b, c, x, y \in D \cup \{\theta\}$;
(vi) $b \vdash_2 (c \dashv_2 d \dashv_2 x) \vdash_2 y = b \vdash_2 c \vdash_2 d \vdash_2 x \vdash_2 y$, $y \in D, b, c, d, x \in D \cup \{\theta\}$;
(vii) $b \dashv_2 c \dashv_2 d \dashv_2 x \dashv_2 y = b \dashv_2 (c \vdash_2 d \vdash_2 x) \dashv_2 y$, $b \in D, c, d, x, y \in D \cup \{\theta\}$.

Пусть ε — произвольный символ, не являющийся элементом из $\overline{D}$. Рассмотрим множество всех слов в алфавите $\overline{D} \cup \{\varepsilon\}$ вида $\bar{a}\varepsilon\bar{b}$, где $a, b \in D \cup \{\theta\}$ ($\overline{\theta}$ — пустое слово, $\overline{\theta} \notin \overline{D} \cup \{\varepsilon\}$), и моноид $(\overline{D} \cup \{\overline{\theta}\}, *)$, полученный из полугруппы $\overline{D}$ присоединением к ней символа $\overline{\theta}$ в качестве единицы. Ясно, что

$$\bar{a} * \bar{b} = \overline{a \dashv_2 b} = \overline{a \vdash_2 b} \tag{5}$$

для всех $a, b \in D \cup \{\theta\}$, и если $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$, то

$$\overline{a_1}\varepsilon\overline{b_1} = \overline{a_2}\varepsilon\overline{b_2} \Longleftrightarrow (a_1, a_2) \in \rho^* \wedge (b_1, b_2) \in \rho^*.$$

Кроме того, согласно лемме 1 $\overline{D}[\varepsilon]$ — димоноид с бар-единицей ε.

Используя равенства (5) и ассоциативность операций $\dashv_2$, $\vdash_2$, нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 16. *Имеют место следующие равенства:*
(i) $\overline{(b \dashv_1 c) \vdash_2 d} = \overline{b \vdash_2 (c \vdash_2 d)}$, $b, c \in D, d \in D \cup \{\theta\}$;
(ii) $\overline{(b \dashv_2 c) \dashv_2 d} = \overline{b \dashv_2 (c \vdash_1 d)}$, $c, d \in D, b \in D \cup \{\theta\}$;
(iii) $\overline{b \dashv_2 c \dashv_2 d \dashv_2 x} = \overline{b \dashv_2 (c \vdash_2 d) \dashv_2 x} = \overline{b \dashv_2 (c \vdash_2 d \vdash_2 x)}$, $b, c, d, x \in D \cup \{\theta\}$;
(iv) $\overline{b \vdash_2 c \vdash_2 d \vdash_2 x} = \overline{b \vdash_2 (c \dashv_2 d) \vdash_2 x} = \overline{(b \dashv_2 c \dashv_2 d) \vdash_2 x}$, $b, c, d, x \in D \cup \{\theta\}$.

Теорема 11. *Для любого димоноида $(D, \dashv_1, \vdash_1)$ существует димоноид $V_{\varepsilon_i}^{D,I}$ с множеством бар-единиц $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$, содержащий $(D, \dashv_1, \vdash_1)$ в качестве поддимоноида.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{\overline{D}[\varepsilon_i]\}_{i\in I}$ димоноидов $\overline{D}[\varepsilon_i]$ с бар-единицами ε_i, $i \in I$. На множестве $(D, \dashv_1, \vdash_1) \cup \overline{D}[\varepsilon_i]_{i\in I}$ (см. п. 2) определим операции $\dashv_3$ и $\vdash_3$, полагая

$$t \dashv_3 g = t \dashv_1 g, \quad t \vdash_3 g = t \vdash_1 g,$$

$$t \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = t \dashv_2 c \dashv_2 d, \quad t \vdash_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = \overline{t \vdash_2 c}\varepsilon_j \bar{d},$$

$$\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 t = \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 t}, \quad \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \vdash_3 t = c \vdash_2 d \vdash_2 t,$$

$$\bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 c \dashv_2 d}, \quad \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \vdash_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = \overline{a \vdash_2 b \vdash_2 c}\varepsilon_j \bar{d}$$

для всех $t, g \in D$, $\bar{a}\varepsilon_i \bar{b}$, $\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \in \overline{D}[\varepsilon_i]_{i\in I}$. Используя определение конгруэнции ρ^* на $(D, \dashv_1, \vdash_1)$ и аксиомы димоноида, можно показать, что для всех $t, g \in D$, $z \in \bar{g}$ выполняются равенства $t \dashv_1 g = t \dashv_1 z$, $g \vdash_1 t = z \vdash_1 t$. Отсюда получаем, что операции $\dashv_3$ и $\vdash_3$ корректно определены. Построенную алгебру обозначим через $V_{\varepsilon_i}^{D,I}$.

Покажем, что $V_{\varepsilon_i}^{D,I}$ — димоноид. Из леммы 2 следует, что $\overline{D}[\varepsilon_i]_{i\in I}$ — димоноид. Поэтому достаточно проверить аксиомы димоноида только в том случае, когда в них элементы из D входят один или два раза. Имеем

$$\begin{aligned} t \dashv_3 (\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 g) &= t \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 g} = t \dashv_2 c \dashv_2 d \dashv_2 g \\ &= (t \dashv_2 c \dashv_2 d) \dashv_1 g = (t \dashv_2 c \dashv_2 d) \dashv_3 g = (t \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) \dashv_3 g, \end{aligned}$$

$$t \dashv_3 (\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \vdash_3 g) = t \dashv_3 (c \vdash_2 d \vdash_2 g) = t \dashv_1 (c \vdash_2 d \vdash_2 g) \overset{\text{лемма 15(i)}}{=} (t \dashv_2 c \dashv_2 d) \dashv_1 g,$$

$$\begin{aligned} t \dashv_3 (g \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) &= t \dashv_3 (g \dashv_2 c \dashv_2 d) = t \dashv_1 (g \dashv_2 c \dashv_2 d) = t \dashv_2 (g \dashv_2 c \dashv_2 d) \\ &= (t \dashv_1 g) \dashv_2 c \dashv_2 d = (t \dashv_1 g) \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = (t \dashv_3 g) \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}, \end{aligned}$$

$$t \dashv_3 (g \vdash_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) = t \dashv_3 \overline{g \vdash_2 c}\varepsilon_j \bar{d} = t \dashv_2 (g \vdash_2 c) \dashv_2 d \overset{\text{лемма 15(vii)}}{=} t \dashv_2 g \dashv_2 c \dashv_2 d,$$

$$\begin{aligned} \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 (t \dashv_3 g) &= \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 (t \dashv_1 g) = \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 (t \dashv_1 g)} = \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 (t \dashv_2 g)} \\ &= \bar{c}\varepsilon_j \overline{(d \dashv_2 t) \dashv_2 g} = \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 t} \dashv_3 g = (\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 t) \dashv_3 g, \end{aligned}$$

$$\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 (t \vdash_3 g) = \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 (t \vdash_1 g) = \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 (t \vdash_1 g)} \overset{\text{лемма 16(ii)}}{=} \bar{c}\varepsilon_j \overline{(d \dashv_2 t) \dashv_2 g},$$

$$\begin{aligned} \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (t \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) &= \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (t \dashv_2 c \dashv_2 d) = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 (t \dashv_2 c \dashv_2 d)} \\ &= \bar{a}\varepsilon_i \overline{(b \dashv_2 t) \dashv_2 c \dashv_2 d} = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 t} \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d} = (\bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 t) \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}, \end{aligned}$$

$$\bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (t \vdash_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) = \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 \overline{t \vdash_2 c}\varepsilon_j \bar{d} = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 (t \vdash_2 c) \dashv_2 d} \overset{\text{лемма 16(iii)}}{=} \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 t \dashv_2 c \dashv_2 d},$$

$$\begin{aligned} \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \dashv_3 t) &= \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \overline{d \dashv_2 t} = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 c \dashv_2 (d \dashv_2 t)} \\ &= \bar{a}\varepsilon_i \overline{(b \dashv_2 c \dashv_2 d) \dashv_2 t} = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 c \dashv_2 d} \dashv_3 t = (\bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 \bar{c}\varepsilon_j \bar{d}) \dashv_3 t, \end{aligned}$$

$$\bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (\bar{c}\varepsilon_j \bar{d} \vdash_3 t) = \bar{a}\varepsilon_i \bar{b} \dashv_3 (c \vdash_2 d \vdash_2 t) = \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 (c \vdash_2 d \vdash_2 t)} \overset{\text{лемма 16(iii)}}{=} \bar{a}\varepsilon_i \overline{b \dashv_2 c \dashv_2 d \dashv_2 t},$$

$$\begin{aligned} t\dashv_3(\bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}) &= t\dashv_3\bar{a}\varepsilon_i\overline{b\dashv_2 c\dashv_2 d} = t\dashv_2 a\dashv_2(b\dashv_2 c\dashv_2 d) \\ &= (t\dashv_2 a\dashv_2 b)\dashv_2 c\dashv_2 d = (t\dashv_2 a\dashv_2 b)\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} = (t\dashv_3\bar{a}\varepsilon_i\bar{b})\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}, \end{aligned}$$

$$t\dashv_3(\bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}) = t\dashv_3\overline{a\vdash_2 b\vdash_2 c}\varepsilon_j\bar{d} = t\dashv_2(a\vdash_2 b\vdash_2 c)\dashv_2 d \overset{\text{лемма 15(vii)}}{=} t\dashv_2 a\dashv_2 b\dashv_2 c\dashv_2 d.$$

Проверим, например, еще аксиому $(x\vdash y)\dashv z = x\vdash(y\dashv z)$:

$$(t\vdash_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d})\dashv_3 g = \overline{t\vdash_2 c}\varepsilon_j\bar{d}\dashv_3 g = \overline{t\vdash_2 c}\varepsilon_j\overline{d\dashv_2 g} = t\vdash_3\bar{c}\varepsilon_j\overline{d\dashv_2 g} = t\vdash_3(\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}\dashv_3 g),$$

$$\begin{aligned} (t\vdash_3 g)\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} &= (t\vdash_1 g)\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} = (t\vdash_1 g)\dashv_2 c\dashv_2 d \\ &\overset{\text{лемма 15(iii)}}{=} t\vdash_1(g\dashv_2 c\dashv_2 d) = t\vdash_3(g\dashv_2 c\dashv_2 d) = t\vdash_3(g\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}\vdash_3 t)\dashv_3 g &= (c\vdash_2 d\vdash_2 t)\dashv_3 g = (c\vdash_2 d\vdash_2 t)\dashv_1 g \\ &\overset{\text{лемма 15(iv)}}{=} c\vdash_2 d\vdash_2(t\dashv_1 g) = \bar{c}\varepsilon_j\bar{d}\vdash_3(t\dashv_1 g) = \bar{c}\varepsilon_j\bar{d}\vdash_3(t\dashv_3 g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3 t)\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} &= (a\vdash_2 b\vdash_2 t)\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} = (a\vdash_2 b\vdash_2 t)\dashv_2 c\dashv_2 d \\ &\overset{\text{лемма 15(v)}}{=} a\vdash_2 b\vdash_2(t\dashv_2 c\dashv_2 d) = \bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3(t\dashv_2 c\dashv_2 d) = \bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3(t\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d})\dashv_3 t &= \overline{a\vdash_2 b\vdash_2 c}\varepsilon_j\bar{d}\dashv_3 t = \overline{a\vdash_2 b\vdash_2 c}\varepsilon_j\overline{d\dashv_2 t} \\ &= \bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3\bar{c}\varepsilon_j\overline{d\dashv_2 t} = \bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\vdash_3(\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}\dashv_3 t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (t\vdash_3\bar{a}\varepsilon_i\bar{b})\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} &= \overline{t\vdash_2 a}\varepsilon_i\bar{b}\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d} = \overline{t\vdash_2 a}\varepsilon_i\overline{b\dashv_2 c\dashv_2 d} \\ &= t\vdash_3\bar{a}\varepsilon_i\overline{b\dashv_2 c\dashv_2 d} = t\vdash_3(\bar{a}\varepsilon_i\bar{b}\dashv_3\bar{c}\varepsilon_j\bar{d}). \end{aligned}$$

Оставшиеся две аксиомы проверяются аналогично. Отметим, что при их проверке используются леммы 15(ii),(vi) и 16(i),(iv). Таким образом, $V_{\varepsilon_i}^{D,I}$ — димоноид. Из определений операций следует, что каждый элемент ε_i, $i\in I$, есть бар-единица. Значит, димоноид $(D,\dashv_1,\vdash_1)$ содержится в димоноиде $V_{\varepsilon_i}^{D,I}$ с множеством бар-единиц $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ в качестве поддимоноида.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{A}$ — диалгебра. Тогда существует диалгебра с множеством бар-единиц, содержащая $\mathscr{A}$ в качестве поддиалгебры.*

Из приведенных в статье результатов следует, что существуют димоноиды, к которым можно присоединить множество бар-единиц (лемма 3, теоремы 2 и 3), а также такие, к которым невозможно присоединить бар-единицы (теоремы 4, 6, 8 и 10). В связи с этим, естественно, на наш взгляд, возникает вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых к произвольному димоноиду можно присоединить множество бар-единиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 7–66. (Lect. Notes Math.; N 1763).
2. *Жучок А. В.* Димоноиды // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 471–496.
3. *Bokut L. A., Chen Y., Liu C.* Gröbner–Shirshov bases for dialgebras // Int. J. Algebra Comput. 2010. V. 20, N 3. P. 391–415.

4. *Колесников П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 322–339.
5. *Пожидаев А. П.* 0-диалгебры с бар-единицей и неассоциативные алгебры Рота — Бакстера // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1356–1369.
6. *Frabetti A.* Dialgebra (co)homology with coefficients // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 67–103. (Lect. Notes Math.; V. 1763).
7. *Zhuchok A. V.* Free dimonoids // Ukrainian Math. J. 2011. V. 63, N 2. P. 196–208.
8. *Zhuchok A. V.* Free rectangular dibands and free dimonoids // Algebra Discrete Math. 2011. V. 11, N 2. P. 92–111.
9. *Zhuchok A. V.* Free commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. 2010. V. 9, N 1. P. 109–119.
10. *Zhuchok A. V.* Free n-nilpotent dimonoids // Algebra Discrete Math. 2013. V. 16, N 2. P. 299–310.
11. *Zhuchok A. V.* Free n-dinilpotent dimonoids // Probl. Phys., Math. Techn. 2013. V. 17, N 4. P. 43–46.
12. *Zhuchok A. V.* Commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. 2009. N 3. P. 116–127.
13. *Phillips J. D.* A short basis for the variety of digroups // Semigroup Forum. 2005. V. 70. P. 466–470.
14. *Zhuchok A. V.* Adjoining bar-units to dimonoids // Intern. algebraic conf. dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Abstracts. Kyiv, 2014. P. 100.

Статья поступила 25 августа 2014, окончательный вариант — 25 мая 2015 г.

Жучок Анатолий Владимирович
Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко,
кафедра алгебры и системного анализа,
пл. Гоголя, 1, Старобельск 92703, Украина
zhuchok_a@mail.ru