Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 512.565

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МОДУЛЯРНОСТИ РЕШЕТКИ С ПОРОЖДАЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ, ОБЛАДАЮЩИМИ СВОЙСТВАМИ ТИПА МОДУЛЯРНОСТИ

А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов

Аннотация. Рассматриваются 3-порожденные решетки, порождающие элементы которых обладают свойствами, близкими в том или ином смысле к модулярности. К таким свойствам относятся свойства быть левомодулярным, правомодулярным или коправомодулярным элементом. Указаны все те комбинации этих свойств, которые достаточны, чтобы решетка была модулярной.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.407

Ключевые слова: модулярная решетка, модулярный элемент.

Исследование строения решетки нередко основывается на выделении в ней элементов, обладающих теми или иными хорошими свойствами, к примеру, быть дистрибутивным, стандартным или нейтральным элементом решетки. Отметим, что указанными свойствами элементы наделяются по одной и той же схеме: в равенстве, выражающем закон дистрибутивности, квантор всеобщности применяется только к двум элементам из трех и оставшийся свободным третий элемент, для которого сконструированное таким образом высказывание истинно, получает соответствующее название (см., например, [1]). Естественным представляется подход, когда свойство дистрибутивности заменяется модулярностью.

Определение 1. Элемент a решетки L называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x \leq y \to x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Определение 2. Элемент a решетки L называется *правомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x \leq a \to x \vee (y \wedge a) = (x \vee y) \wedge a.$$

Определение 3. Элемент a решетки L называется *коправомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : a \leq x \to x \wedge (y \vee a) = (x \wedge y) \vee a.$$

Легко проверить, что свойство элемента быть левомодулярным самодвойственно, а правомодулярность и коправомодулярность двойственны друг другу.

Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

Свойства этих элементов под разными наименованиями изучались, например, в [2–4]. Здесь мы придерживаемся терминологии, используемой в [4].

Исследовались также и различные комбинации этих свойств. Например, в [3] элемент, который левомодулярен и коправомодулярен одновременно, назван *полунормальным*, а в [5] элемент, обладающий всеми тремя свойствами, назван *вполне модулярным*. Естественно *кополунормальным* назвать элемент, который полунормален в двойственной решетке. Для оставшейся комбинации правомодулярности и коправомодулярности мы предлагаем название *вполне правомодулярный*. Для краткости будем говорить, что элемент обладает *свойством типа модулярности*, если он обладает каким-либо из семи указанных выше свойств.

В формулах, определяющих дистрибутивные, стандартные, нейтральные элементы, а также элементы с тем или иным свойством модулярности, фигурируют три переменные. Поэтому естествен интерес к 3-порожденным решеткам, среди порождающих элементов которых имеются такие, которые обладают теми или иными из перечисленных выше свойств. Одним из первых результатов в этом направлении является доказанное Г. Гретцером утверждение о равносильности свойства нейтральности элемента a в решетке L и дистрибутивности подрешетки, порожденной элементами a, x и y для любых элементов x и y решетки L. В [1, теорема 5] показано, что в любой решетке подрешетка, порожденная тремя элементами, два из которых стандартны, дистрибутивна. «Модулярным» аналогом этого утверждения является теорема 1 из [5], согласно которой в любой решетке подрешетка, порожденная тремя элементами, два из которых вполне модулярны, модулярна. Доказанная в данной работе теорема 1 ослабляет условие вполне модулярности для одного из порождающих элементов до левой модулярности. Теорема 2 в совокупности с другими ранее полученными результатами завершает перечисление всех комбинаций условий типа модулярности для порождающих элементов, достаточных для модулярности 3-порожденной решетки. Формулировке и доказательству основных результатов предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Если элемент a решетки L вполне модулярен, то для любых элементов x и y из L*

$$a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = a \vee (x \wedge (y \vee (a \wedge x))).$$

Если данное равенство имеет место для любых элементов x и y из L, то элемент a коправомодулярен.

Доказательство. С одной стороны, из коправомодулярности a и неравенства $a \leq a \vee y$ следует, что $a \vee (x \wedge (a \vee y)) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$. Поэтому

$$\begin{aligned}(a \vee (x \wedge (a \vee y))) &\wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))))\\ &= (a \vee x) \wedge (a \vee y) \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))))\\ &= a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))\end{aligned}$$

ввиду неравенства $a \vee x \geq a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))$, ибо $a \vee x \geq x \vee (a \wedge y)$, и аналогичного неравенства $a \vee y \geq a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))$.

С другой стороны, из правомодулярности элемента a и неравенства $a \leq a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))$ следует, что

$$\begin{aligned}(a \vee (x \wedge (a \vee y))) &\wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))))\\ &= a \vee (x \wedge (a \vee y) \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))))\\ &= a \vee (x \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))))),\end{aligned}$$

поскольку $a \vee y \geq a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))$. Далее,

$$\begin{aligned} &x \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \\ &\qquad = (x \wedge (x \vee (a \wedge y))) \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \\ &\qquad\qquad = x \wedge (((x \vee (a \wedge y)) \wedge a) \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \end{aligned}$$

в силу левомодулярности элемента a. Но из правомодулярности a и неравенства $a \wedge y \leq a$ следует, что $(x \vee (a \wedge y)) \wedge a = (a \wedge y) \vee (a \wedge x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &x \wedge (((x \vee (a \wedge y)) \wedge a) \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \\ &\qquad = x \wedge ((a \wedge y) \vee (a \wedge x) \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \\ &\qquad\qquad = x \wedge (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)), \end{aligned}$$

ибо $a \wedge y \leq x \vee (a \wedge y), a \wedge y \leq y \vee (a \wedge x)$ и $a \wedge x \leq x \vee (a \wedge y), a \wedge x \leq y \vee (a \wedge x)$.

Ясно, что $x \wedge (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)) = x \wedge (y \vee (a \wedge x))$. Поэтому $a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = a \vee (x \wedge (y \vee (a \wedge x)))$.

Пусть для любых элементов x и y из L выполняется равенство $a \vee ((y \vee (a \wedge x)) \wedge (x \vee (a \wedge y))) = a \vee (y \wedge (x \vee (a \wedge y)))$, которое эквивалентно равенству, указанному в формулировке леммы. Положим $x \geq a$. Тогда $y \vee (a \wedge x) = y \vee a$ и $x \vee (a \wedge y) = x$. Поэтому $(y \vee (a \wedge x)) \wedge (x \vee (a \wedge y)) = (y \vee a) \wedge x \geq a$. Значит, левая часть исходного равенства совпадает с $(y \vee a) \wedge x$, а правая — с $a \vee (y \wedge x)$, что и означает коправомодулярность элемента a.

Лемма 2. *Пусть a — кополунормальный элемент решетки L. Тогда для любых элементов x и y этой решетки эквивалентны соотношения*

$$a \vee (x \wedge y) \geq (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)),$$

$$(x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a).$$

Доказательство. Пусть выполнено первое соотношение. Тогда

$$(a \vee (x \wedge y)) \wedge ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)).$$

В то же время из левомодулярности a следует, что

$$\begin{aligned} &(a \vee (x \wedge y)) \wedge ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) \\ &\qquad = (a \wedge ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \vee (x \wedge y) \\ &\qquad\qquad = ((a \wedge (x \vee (a \wedge y))) \wedge (a \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

Но $a \wedge (x \vee (a \wedge y)) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ в силу правомодулярности элемента a и по той же причине $a \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (a \wedge y) \vee (a \wedge x)$. Следовательно, $(a \vee (x \wedge y)) \wedge ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$. Тем самым $(x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$.

Обратно, из равенства $(x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$ следует $a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = a \vee (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a) = a \vee (x \wedge y)$. Поэтому $a \vee (x \wedge y) \geq (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))$.

Лемма 3. *Пусть a — вполне модулярный элемент решетки L. Тогда для любых элементов x и y этой решетки эквивалентны соотношения*

(1) $x \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (x \wedge y) \vee (a \wedge x)$;

(2) $a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) = a \vee (x \wedge y)$;

(3) $(x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x)) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Ввиду леммы 1

$$\begin{aligned} a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) &= a \vee (x \wedge (y \vee (a \wedge x))) \\ &= a \vee (x \wedge y) \vee (a \wedge x) = a \vee (x \wedge y). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) По лемме 1

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee (a \wedge x)) &= x \wedge (y \vee (a \wedge x)) \wedge (a \vee (x \wedge (y \vee (a \wedge x)))) \\ &= x \wedge (y \vee (a \wedge x)) \wedge (a \vee ((x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))) \\ &= x \wedge (y \vee (a \wedge x)) \wedge (a \vee (x \wedge y)). \end{aligned}$$

Поскольку $x \wedge (y \vee (a \wedge x)) \geq x \wedge y$, из левомодулярности элемента a получаем $x \wedge (y \vee (a \wedge x)) \wedge (a \vee (x \wedge y)) = (a \wedge x \wedge (y \vee (a \wedge x))) \vee (x \wedge y) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) С очевидностью следует из леммы 2, поскольку данное равенство равносильно неравенству $a \vee (x \wedge y) \geq (x \vee (a \wedge y)) \wedge (y \vee (a \wedge x))$.

Теорема 1. *Решетка, порожденная тремя элементами, один из которых вполне модулярен, а другой левомодулярен, модулярна.*

Теорема 2. *Решетка, порожденная тремя элементами, модулярна, если один из порождающих элементов вполне модулярен, а среди двух других есть хотя бы один правомодулярный и хотя бы один коправомодулярный* (*возможно, один и тот же*).

Доказательство теорем 1 и 2. Обозначим через L решетку, порожденную тремя элементами a, b и c. Как показано в [6], для доказательства теорем достаточно проверить, что в решетке L для порождающих a, b и c выполняются перечисленные ниже соотношения:

$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c), \tag{1}$$

$$(b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee a) = (b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge a), \tag{2}$$

$$(c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b) = (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = ((a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge (c \vee a))) \\ \wedge ((b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge (a \vee b))) \wedge ((c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge (b \vee c))), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = ((a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee (c \wedge a))) \\ \vee ((b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee (a \wedge b))) \vee ((c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee (b \wedge c))), \end{aligned} \tag{5}$$

$$(a \vee b) \wedge (c \vee a) = a \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)), \tag{6}$$

$$(b \vee c) \wedge (a \vee b) = b \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)), \tag{7}$$

$$(c \vee a) \wedge (b \vee c) = c \vee ((a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge a) = a \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)), \tag{9}$$

$$(b \wedge c) \vee (a \wedge b) = b \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)), \tag{10}$$

$$(c \wedge a) \vee (b \wedge c) = c \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)). \tag{11}$$

Если это так, то решетка L — гомоморфный образ свободной модулярной решетки, т. е. модулярна.

Легко заметить, что посылки теорем самодвойственны и множество соотношений (1)–(11) также самодвойственно. Поэтому достаточно проверить выполнение только соотношений (1)–(3) и (5)–(8).

Пусть a вполне модулярен в L. Выполнение соотношения (1) для левомодулярного элемента a впервые отмечено в [3, с. 270]. Как показано в [2, теорема 2.9], соотношения (2) и (3) выполнены для вполне модулярного элемента a.

Равенство $b \wedge (c \vee (a \wedge b)) = (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$ выполнено как в случае левомодулярности c, так и в случае правомодулярности b, т. е. посылок теорем достаточно для выполнения этого равенства. Двойственное равенство выполняется при левомодулярном c или при коправомодулярном b. Поэтому лемма 3 дает равенство $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee (a \wedge b))$. Соотношения $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee (b \wedge c))$ и $(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \vee (c \wedge b)) \wedge (b \vee (c \wedge a))$ следуют из утверждения, двойственного к теореме 4 из [3]. Тем самым соотношение (5) выполняется.

Наконец, по лемме 3 из [5] выполняются соотношения (6)–(8).

Возникает естественный вопрос о справедливости утверждения, обратного к теореме 1: будет ли левомодулярным элемент решетки, порождающий вместе с любыми еще двумя элементами модулярную подрешетку, если при этом один из двух добавленных элементов вполне модулярен? Ответ отрицателен, соответствующий пример приведен на рис. 1, где элемент a вполне модулярен, каждая подрешетка, порожденная элементами a, b и произвольным элементом c этой решетки, дистрибутивна, однако элемент b не левомодулярен.

Рис. 1.

Нетрудно видеть, что элемент a не только вполне модулярен, но и стандартен, поэтому данная решетка показывает, что аналогичное обращение теоремы 5 из [1] также не имеет места.

Естественно интересоваться, будет ли модулярной 3-порожденная решетка с другим набором свойств типа модулярности для порождающих элементов. Еще один случай положительного ответа на этот вопрос содержится в [7], когда все три порождающих элемента левомодулярны (левомодулярный элемент в [7] назван модулярным). Оказывается, что перечисленными выше случаями исчерпываются все ситуации, когда 3-порожденная решетка, среди порождающих элементов которых имеются элементы со свойством типа модулярности, модулярна. Чтобы обосновать это, рассмотрим оставшиеся варианты наборов свойств типа модулярности для трех порождающих. Для их перечисления удобно использовать двойную нумерацию $(m.n)$, в которой первое число указывает количество вполне модулярных элементов среди порождающих, а второе – количество левомодулярных, но не вполне модулярных элементов. Случаи, рассмотренные в теореме 1 данной работы и в теореме 1 из [7], отвечают комбинациям (1.1) и (0.3). В этих случаях решетки модулярны, а значит, будут модулярными и все решетки, индексируемые номерами, которые больше указанных в смысле лексикографического порядка. Тем самым остается рассмотреть только случаи с номерами (0.0), (0.1), (0.2) и (1.0).

(0.0) Нет левомодулярных элементов среди порождающих.

Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

На рис. 2 изображена немодулярная решетка, порожденная элементами a, b и c. Легко проверить, что каждый из этих элементов вполне правомодулярен. Этот же пример обслуживает все иные комбинации свойств модулярности порождающих элементов при указанном условии.

(0.1) Ровно один порождающий элемент левомодулярен, вполне модулярных порождающих нет.

Немодулярная решетка, порожденная одним полунормальным элементом b и двумя вполне правомодулярными элементами a и c, изображена на рис. 3.

Легко видеть, что эта решетка также порождается и элементами a, d и c. Поэтому решетка, порожденная одним кополунормальным элементом и двумя вполне правомодулярными элементами, также не обязана быть модулярной.

Этими же примерами обслуживаются все другие комбинации свойств модулярности порождающих элементов при указанном условии.

(0.2) Ровно два порождающих элемента левомодулярны, вполне модулярных порождающих нет.

Примером немодулярной решетки, порожденной тремя элементами, один из которых полунормален, другой кополунормален, а третий вполне правомодулярен, является хорошо известный «пентагон» (см. рис. 1). Решетка на рис. 4 — пример немодулярной решетки, порожденной двумя одновременно кополунормальными элементами a и b и одним вполне правомодулярным элементом c.

Двойственная решетка показывает, что решетка, порожденная двумя полунормальными и одним вполне правомодулярным элементом, не обязана быть модулярной.

Этими же примерами обслуживаются все другие комбинации свойств типа модулярности для порождающих элементов при условии (0.2).

(1.0) Ровно один порождающий левомодулярен, он к тому же является вполне модулярным.

Теорема 2 утверждает, что решетка будет модулярной, если среди трех ее порождающих один элемент вполне модулярен, а другой вполне правомодулярен (свойства третьего элемента роли не играют) либо если один элемент вполне модулярен, другой правомодулярен, а третий коправомодулярен. В свою очередь, в [5] приведен пример немодулярной решетки, порожденной одним вполне модулярным и двумя правомодулярными элементами. Двойственная ей решетка — пример немодулярной решетки, порожденной вполне модулярным и двумя коправомодулярными элементами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gratzer G., Schmidt E. T.* Standard ideals in lattices // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. V. 12. P. 17–86.

2. *Bhatta S. P.* A characterization of neutral elements by the exclusion of sublattices // Discrete Math. 2009. V. 309. P. 1691–1702.
3. *Ore O.* On the theorem of Jordan–Holder // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. P. 266–275.
4. *Stern M.* Semimodular lattices. Theory and applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
5. *Гейн А. Г., Шушпанов М. П.* Конечнопорожденные решетки с вполне модулярными элементами среди порождающих // Алгебра и логика. 2014. Т. 52, № 6. С. 657–666.
6. *Гейн А. Г., Шушпанов М. П.* Об определяющих соотношениях свободной модулярной решетки ранга 3 // Изв. вузов. Математика. 2013. № 10. С. 69–72.
7. *Гейн А. Г., Шушпанов М. П.* О подрешетке, порожденной модулярными элементами // Междунар. конф. «Алгебра и линейная оптимизация», посвящ. 100-летию С. Н. Черникова: Тез. докл. (Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г.). Екатеринбург: изд-во «УМЦ-УПИ», 2012. С. 47.

Статья поступила 6 ноября 2014 г.

Гейн Александр Георгиевич, Шушпанов Михаил Павлович
Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
a.g.gein@urfu.ru, Mikhail.Shushpanov@gmail.com