Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.956.8:517.956.328:517.958:535.4

ЛАКУНЫ В СПЕКТРЕ ВОЛНОВОДА, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ОБЛАСТЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

Ф. Л. Бахарев, С. А. Назаров

Аннотация. Рассмотрен акустический волновод (задача Неймана для уравнения Гельмгольца) в форме периодического семейства идентичных бусин, нанизанных на тонкую цилиндрическую спицу. При незначительных ограничениях на геометрию бусин и спицы путем асимптотического анализа установлено раскрытие спектральных лакун и найдены их геометрические характеристики, а основную техническую трудность составляет обоснование асимптотических формул для собственных чисел модельной задачи на ячейке периодичности ввиду произвольности ее формы.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.402

Ключевые слова: задача Неймана, сочленение тел различных предельных размерностей, периодический волновод, спектральные лакуны, асимптотика.

1. Введение

Отличительная особенность периодических волноводов — возникновение спектральных лакун, т. е. зон торможения, препятствующих распространению волн в соответствующих частотных диапазонах, — используется в инженерии чересполосного спектра[1)] (см. [1, 2] и др.) для создания волновых фильтров и демпферов, а также деталей приборов иного назначения. Основной вопрос этой дисциплины требует определение формы волновода, у которого в предписанном месте спектра имеется лакуна заданной ширины. В данной статье частично дается ответ на этот вопрос при рассмотрении акустического (краевые условия Неймана для уравнения Гельмгольца) волновода, полученного нанизыванием идентичных бусин на тонкую бесконечную спицу (рис. 1), а именно, устанавливается раскрытие лакун и изучается их положение в спектре при вариации расстояния между бусинами, форма которых считается фиксированной.

Рис. 1. Периодический волновод Π_ε.

Математическая постановка задачи сводится к асимптотическому анализу собственных чисел модельной краевой задачи с условиями квазипериодичности на сочленении областей с различающимися предельными размерностями типа 3 : 1. Подобные задачи давно привлекают внимание математиков, и опубликовано множество разнообразных результатов в этом направлении (см. [3–9] для скалярных задач и, например, [10] для теории упругости). К

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта 0.38.237.2014 СПбГУ и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–02175).

[1)]Band-gap engineering — в английской терминологии.

сожалению, непосредственное использование известных формул затруднено по двум причинам. Во-первых, в соответствующей модельной задаче присутствуют дополнительный параметр Флоке $\eta \in [0, 2\pi\ell^{-1})$, т. е. двойственная переменная преобразования Гельфанда, и при изучении лакун зависимости асимптотических членов от η приобретают первостепенное значение. Во-вторых, упомянутые публикации предоставляют результаты двух типов: либо доказывается сходимость собственных чисел, не дающая важной информации о поправочных членах (именно в них проявляется зависимость от η), либо строятся и обосновываются полные асимптотические разложения, но «для простоты» граница массивного тела около зоны присоединения тонкого стержня предполагается уплощенной. В то же время для поставленных целей нужны явные формулы для основных поправок в асимптотике собственных чисел, но при достаточно произвольной форме бусин. Именно вывод и обоснование таких формул составляет предмет первых разделов статьи, а в последних разделах изучаются собственно геометрические характеристики лакун, причем проверка оценок малости асимптотических остатков составляют основную трудность. Раскрытие лакун достигается путем разъединения спектров двух предельных задач — трехмерной и одномерной. Поэтому далее мы не занимаемся числами, оказывающимися собственными для обеих предельных задач одновременно: основные особенности асимптотических конструкций прослеживаются и без громоздкого анализа общего случая.

2. Постановка задачи

Пусть ограниченная область $\varpi_0 \subset \mathbb{R}^3$ лежит в слое

$$\{x = (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ -H < z < 0\},$$

а ее граница содержит начало координат O и точку $P_- = (0, 0, -H)$ вместе с соединяющим их отрезком (рис. 2,a)).

Пусть $\Omega_\varepsilon = \theta_\varepsilon \times \mathbb{R}$ — тонкий цилиндр, причем $\varepsilon > 0$ — малый параметр,

$$\theta_\varepsilon = \varepsilon\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^{-1} y \in \theta\}, \tag{1}$$

Рис. 2. Предельная область φ_0 и ячейка периодичности $\varphi(\varepsilon)$.

а θ — область на плоскости, охваченная контуром $\partial\theta$ и содержащая начало координат $y = 0$. Зависящий от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$, волновод Π_ε задан формулой

$$\Pi_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cup \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \varpi_j \tag{2}$$

и состоит из тонкой «спицы» Ω_ε и ℓ-периодического семейства «бусин»

$$\varpi_j = \{x : (y, z - \ell j) \in \varpi_0\}, \quad j \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},\ \ell > H. \tag{3}$$

Ячейкой периодичности для волновода (2) служит область (рис. 2,b))

$$\varpi(\varepsilon) = \varpi_0 \cup (\theta_\varepsilon \times (-H, \ell - H)). \tag{4}$$

Ввиду ℓ-периодичности отождествляем точки P_- и $P_+ = (0, 0, L) := (0, 0, \ell - H)$, а также сечения $\theta_\varepsilon^- = \theta_\varepsilon \times \{-H\}$ и $\theta_\varepsilon^+ = \theta_\varepsilon \times \{L\}$, попадающие на края ячейки (4). Границы $\partial\varpi_0$ и $\partial\theta$ считаем гладкими и предполагаем, что в окрестностях точек O и P_- область ϖ_0 выпуклая. Как станет понятно в разд. 3 и 6, это ограничение не принципиально, но удобно при обосновании асимптотики, а отказ от него требует лишь «косметической» правки формул.

Рассмотрим спектральную задачу Неймана для оператора Лапласа в волноводе (2)

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x),\ x \in \Pi_\varepsilon, \quad \partial_n u^\varepsilon(x) = 0,\ x \in \partial\Pi_\varepsilon. \tag{5}$$

Здесь Δ_x — оператор Лапласа по переменным x, ∂_n — производная вдоль внешней нормали, определенная почти везде на поверхности $\partial\Pi_\varepsilon$, и λ^ε — спектральный параметр. Задача (5) допускает вариационную постановку

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v)_{\Pi_\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v)_{\Pi_\varepsilon}, \quad v \in H^1(\Pi_\varepsilon), \tag{6}$$

где $(\ ,\ )_{\Pi_\varepsilon}$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi_\varepsilon)$, а $H^1(\Pi_\varepsilon)$ — пространство Соболева. Билинейная форма в левой части (6) положительна и замкнута, а значит, задача (6) может быть переформулирована как абстрактное уравнение

$$T^\varepsilon u^\varepsilon = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в } H^1(\Pi_\varepsilon)$$

с неограниченным положительным самосопряженным оператором T^ε в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi_\varepsilon)$. Его спектр лежит на замкнутой вещественной положительной полуоси $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$ и содержит компоненту существенного спектра $\wp^\varepsilon_{ess}$, непустую в силу отсутствия компактности вложения $H^1(\Pi_\varepsilon) \subset L^2(\Pi_\varepsilon)$.

Теория Флоке — Блоха — Гельфанда (см., например, [11–13]) показывает, что спектр имеет чересполосную структуру, а именно, в формуле

$$\wp^\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^\varepsilon_n \tag{7}$$

фигурируют спектральные сегменты

$$B^\varepsilon_n = \left\{\lambda = \Lambda^\varepsilon_n(\eta) : \eta \in [0, 2\pi\ell^{-1})\right\}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \tag{8}$$

где $\Lambda^\varepsilon_j(\eta)$ — члены монотонной неограниченной последовательности

$$0 \le \Lambda^\varepsilon_1(\eta) \le \Lambda^\varepsilon_2(\eta) \le \dots \le \Lambda^\varepsilon_j(\eta) \le \dots \to +\infty \tag{9}$$

собственных чисел модельной спектральной задачи на ячейке (4). Собственные числа включены в список (9) при учете кратностей, а сама задача принимает вид

$$-\Delta_x U^\varepsilon(x, \eta) = \Lambda^\varepsilon(\eta) U^\varepsilon(x, \eta), \quad x \in \varpi(\varepsilon), \tag{10}$$

$$\partial_n U^\varepsilon(x, \eta) = 0, \quad x \in \partial\varpi(\varepsilon) \setminus (\overline{\theta^-_\varepsilon} \cup \overline{\theta^+_\varepsilon}), \tag{11}$$

$$U^\varepsilon|_{\theta^+_\varepsilon} = e^{i\eta} U^\varepsilon|_{\theta^-_\varepsilon}, \tag{12}$$

$$\partial_z U^\varepsilon|_{\theta^+_\varepsilon} = e^{i\eta} \partial_z U^\varepsilon|_{\theta^-_\varepsilon}. \tag{13}$$

Ее вариационная постановка сводится к интегральному тождеству

$$(\nabla U^\varepsilon(\cdot, \eta), \nabla V)_{\varpi(\varepsilon)} = \Lambda^\varepsilon(\eta) (U(\cdot, \eta), V)_{\varpi(\varepsilon)}, \quad V \in \mathscr{H}^\varepsilon(\eta), \tag{14}$$

в котором $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ — подпространство функций $U \in H^1(\varpi(\varepsilon))$, удовлетворяющих устойчивому условию квазипериодичности (12). Задаче (14) также отвечает самосопряженный оператор $\mathscr{T}^\varepsilon(\eta)$, только теперь уже с дискретным спектром (вложение $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta) \subset L^2(\varpi(\varepsilon))$ компактно в ограниченной области $\varpi(\varepsilon)$). Ясно, что функции $\eta \mapsto \Lambda^\varepsilon(\eta)$ непрерывны и $2\pi\ell^{-1}$-периодичны, т. е. множества (8), образующие спектр (7), являются отрезками (связными компактными подмножествами прямой).

3. Теорема о сходимости

Покажем, что в случае $\Lambda_k^\varepsilon(\eta) \to \Lambda_k^0(\eta)$ при $\varepsilon \to +0$ предел $\Lambda_k^0 = \Lambda_k^0(\eta)$, во-первых, не зависит от параметра η и, во-вторых, оказывается собственным числом одной из двух предельных задач: одномерной спектральной задачи Дирихле на отрезке $\Upsilon := (0, L)$

$$-\partial_z^2 w(z) = \mu w(z),\ z \in \Upsilon, \quad w(0) = w(L) = 0 \tag{15}$$

или пространственной спектральной задачи Неймана на теле ϖ_0

$$-\Delta_x v(x) = \nu v(x),\ x \in \varpi_0, \quad \partial_n v(x) = 0,\ x \in \partial\varpi_0. \tag{16}$$

Разумеется, эти задачи допускают вариационную формулировку в виде интегральных тождеств (см. [14]) и порождают операторы $\mathscr{A}^\Upsilon$ в $\mathring{H}^1(\Upsilon) = \{w \in H^1(0, L) : w(0) = w(L) = 0\}$ и $\mathscr{A}^\varpi$ в $H^1(\varpi_0)$ соответственно. Введем блочно-диагональный оператор $\mathscr{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = \mathring{H}^1(0, L) \oplus H^1(\varpi_0)$, имеющий в качестве блоков операторы $\mathscr{A}^\Upsilon$ и $\mathscr{A}^\varpi$. Его собственные числа запишем при учете кратностей в виде неубывающей последовательности

$$0 = \Lambda_1^0 < \Lambda_2^0 \le \Lambda_3^0 \le \dots \le \Lambda_j^0 \le \dots, \tag{17}$$

которая является объединением последовательностей $\wp_\Upsilon = \{\mu_j = \pi^2 L^{-2} j^2\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\wp_\varpi = \{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ собственных чисел задач (15) и (16) соответственно. Последовательность собственных функций $\mathscr{Y}_j = \big(\mathscr{Y}_j^{(1)}, \mathscr{Y}_j^{(2)}\big)$, отвечающих собственным числам Λ_j^0, ортонормируем в пространстве $L^2(0, L) \oplus L^2(\varpi_0)$.

Основным инструментом при локализации собственных чисел является следующий вариант классической леммы о «почти собственных значениях».

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{T}$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с чисто точечным спектром. Если нашлись такие числа $b > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in (0, 1/k)$ и элементы $\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_k \in \mathscr{H}$, что $|(\mathscr{W}_i, \mathscr{W}_j)_{\mathscr{H}} - \delta_{i,j}| \le a$ и $\|\mathscr{T}\mathscr{W}_j - b\mathscr{W}_j; \mathscr{H}\| \le \tau \in (0, b)$, то отрезок $[b - t, b + t]$ содержит хотя бы k (при учете кратностей) собственных чисел оператора $\mathscr{T}$, где величина t вычисляется по формуле $t = \tau k^{1/2}(1 - ka)^{-1/2}$.*

Доказательство. Предположим, что полная кратность спектра оператора $\mathscr{T}$ на отрезке $[b-t, b+t]$ строго меньше k. Наложенное на число a условие и «почти ортонормированность» функций $\mathscr{W}_1, \dots, \mathscr{W}_k$ гарантируют, что последние линейно независимы и существует линейная комбинация

$$w = \alpha_1 \mathscr{W}_1 + \dots + \alpha_k \mathscr{W}_k, \quad \|w; \mathscr{H}\| = 1,$$

ортогональная всем собственным функциям, которые отвечают собственным числам из промежутка $[b - t, b + t]$. Тогда в силу максиминимального принципа

$$t^2 < \|\mathscr{T}w - bw\|^2 \le \tau^2 \left|\sum_{j=1}^k \alpha_j\right|^2 \le \tau^2 k \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2 \le \tau^2 k (1 - ak)^{-1}.$$

Последнее неравенство обеспечено «почти ортонормированностью» и равенством $\|w; \mathscr{H}\| = 1$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda = \Lambda_k^0 = \Lambda_{k+1}^0 = \dots = \Lambda_{k+m-1}$ — *собственное число оператора* $\mathscr{A}$ *с кратностью* m. *Существуют такие величины* $C_k > 0$ *и* $\varepsilon_k > 0$, *что для всех* $\eta \in [0, 2\pi)$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_k]$ *в промежутке* $(\lambda - C_k\sqrt{\varepsilon}, \lambda + C_k\sqrt{\varepsilon})$ *содержится не менее* m *собственных чисел из последовательности* (9), *в частности*, $\Lambda_k^\varepsilon(\eta) \le \Lambda_k^0 + C_k\sqrt{\varepsilon} \le C_\Lambda(k)$.

Доказательство. Для каждой вектор-функции $\mathscr{Y}_j$ определим функции $Y_j \in L^2(\varpi(\varepsilon))$ и $Y_j^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ следующими формулами:

$$Y_j(x) = \begin{cases} |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\mathscr{Y}_j^{(1)}(z), & x \in \Theta_\varepsilon, \\ \mathscr{Y}_j^{(2)}(x), & x \in \varpi_0, \\ 0, & x \notin (\Theta_\varepsilon \cup \varpi_0), \end{cases} \qquad Y_j^\varepsilon(x) = \begin{cases} |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\mathscr{Y}_j^{(1)}(z), & x \in \Theta_\varepsilon, \\ \mathscr{X}^\varepsilon(x)\mathscr{Y}_j^{(2)}(x), & x \in \varpi_0, \\ 0, & x \notin (\Theta_\varepsilon \cup \varpi_0). \end{cases}$$

Здесь $\Theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon \times (0, L)$, $\mathscr{X}^\varepsilon(x) = 1 - \mathscr{X}(\varepsilon^{-1}x) - \mathscr{X}(\varepsilon^{-1}(x - P_-))$, причем гладкая финитная функция $\mathscr{X}$ равна единице в окрестности множества $\theta \times \{0\}$, и $|\theta_\varepsilon| = \varepsilon^2|\theta|$ — площадь сечения θ_ε. Поскольку функции Y_j образуют ортонормированную систему в $L^2(\varpi(\varepsilon))$, получаем при $i, j = k, k+1, \dots, k+m-1$, что

$$\bigl|\bigl(Y_j^\varepsilon, Y_i^\varepsilon\bigr)_{\varpi(\varepsilon)} - \delta_{j,i}\bigr| = \biggl|\int\limits_{\varpi_0} \mathscr{X}^\varepsilon(x)^2\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\mathscr{Y}_i^{(2)}(x)\,dx - \delta_{j,i}\biggr|$$
$$\le \biggl|\int\limits_{\varpi_0} (\mathscr{X}^\varepsilon(x)^2 - 1)\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\mathscr{Y}_i^{(2)}(x)\,dx\biggr| \le c_k\varepsilon^3.$$

Интеграл по стержню Θ_ε равен нулю потому, что ненулевые функции $\mathscr{Y}_j^{(1)}$ образуют ортонормированную систему в $L^2(\Theta_\varepsilon)$. В последней оценке учтено, что объем носителя разности $|\mathscr{X}^\varepsilon|^2 - 1$ равен $O(\varepsilon^3)$ и на нем функции $Y_j^{(2)}$ ограничены. Аналогично проверяем, что

$$\bigl|\bigl(\nabla_x Y_j^\varepsilon, \nabla_x Y_i^\varepsilon\bigr)_{\varpi(\varepsilon)} - \lambda\delta_{j,i}\bigr| \le c_k\varepsilon.$$

Для применения леммы 1 оценим величину

$$\tau = \sup\bigl|\bigl(\nabla_x Y_j^\varepsilon, \nabla_x Z\bigr)_{\varpi(\varepsilon)} - \lambda\bigl(Y_j^\varepsilon, Z\bigr)_{\varpi(\varepsilon)}\bigr|,$$

где супремум вычисляется по всем функциям $Z \in \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ с единичной нормой. Неравенство $\tau \le c_k\varepsilon^{1/2}$ проверяется выкладкой

$$\bigl|\bigl(\nabla_x Y_j^\varepsilon, \nabla_x Z\bigr)_{\varpi(\varepsilon)} - \lambda\bigl(Y_j^\varepsilon, Z\bigr)_{\varpi(\varepsilon)}\bigr|$$
$$= \biggl|\int\limits_{\varpi_0} \nabla_x\mathscr{X}^\varepsilon(x)\bigl(\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\overline{\nabla_x Z(x)} - \overline{Z(x)}\nabla_x\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\bigr)\,dx\biggr|$$
$$\le \biggl(\int\limits_{\operatorname{supp}|\nabla_x\mathscr{X}^\varepsilon|} |\nabla_x\mathscr{X}^\varepsilon(x)|^2\bigl(\bigl|\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\bigr|^2 + \bigl|\nabla_x\mathscr{Y}_j^{(2)}(x)\bigr|^2\bigr)\,dx\biggr)^{1/2}\|Z; \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\|$$
$$\le c_k\varepsilon^{1/2}. \quad \square$$

Согласно лемме 2 величины $\Lambda_k^\varepsilon(\eta)$ равномерно ограничены относительно $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Выделим бесконечно малую последовательность $\{\varepsilon_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, вдоль которой имеет место сходимость

$$\Lambda_k^{\varepsilon_p}(\eta) \to \Lambda^0(\eta), \quad p \to +\infty. \tag{18}$$

Далее для краткости не будем писать индекс p у членов ε_p.

Поставим в соответствие нормированному в $L^2(\varpi(\varepsilon))$ решению U_k^ε задачи (10)–(13) функцию $v_k^\varepsilon = U_k^\varepsilon|_{\varpi_0}$ и функцию w_k^ε, определенную формулой

$$w_k^\varepsilon(z) = |\theta_\varepsilon|^{-1/2} \int\limits_{\theta_\varepsilon} U_k^\varepsilon(y,z,\eta)\,dy, \quad z \in [-H, L]. \tag{19}$$

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$\big\|v_k^\varepsilon; L^2(\varpi_0)\big\|^2 + \big\|w_k^\varepsilon; L^2(0,L)\big\|^2 = 1 + O(\varepsilon). \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно убедиться в том, что

$$\big\||\theta_\varepsilon|^{-1/2} w_k^\varepsilon - U_k^\varepsilon; L^2(\Theta_\varepsilon)\big\| = O(\varepsilon),$$

и заметить, что $|\theta_\varepsilon|^{-1/2}\big\|w_k^\varepsilon; L^2(\Theta_\varepsilon)\big\| = \big\|w_k^\varepsilon; L^2(0,L)\big\|$. Из неравенства Пуанкаре и формулы (19) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_0^L \int\limits_{\theta_\varepsilon} \big|U_k^\varepsilon(x,\eta) - |\theta_\varepsilon|^{-1/2} w_k^\varepsilon(z)\big|^2\,dydz &\le C_\theta \varepsilon^2 \int\limits_0^L \int\limits_{\theta_\varepsilon} \big|\nabla_y U_k^\varepsilon(x)\big|^2\,dydz \\ &\le C_\theta\varepsilon^2 \big\|\nabla U_k^\varepsilon; L^2(\Theta_\varepsilon)\big\|^2 \le C_\theta C_\Lambda(k)\varepsilon^2. \quad \square\end{aligned}$$

Укажем еще одну формулу

$$\begin{aligned}\big\|v_k^\varepsilon; H^1(\varpi_0)\big\|^2 + \big\|w_k^\varepsilon; H^1(0,L)\big\|^2 &\le \big\|U_k^\varepsilon; H^1(\varpi(\varepsilon))\big\|^2 \\ &= \big(1 + \Lambda_k^\varepsilon(\eta)\big)\big\|U_k^\varepsilon; L^2(\varpi(\varepsilon))\big\|^2 \le 1 + C_\Lambda(k)\end{aligned} \tag{21}$$

и введем гладкую срезающую функцию χ^ε формулами

$$\begin{gathered}\chi^\varepsilon(z) = 1 \text{ при } z \in [2\varepsilon, L - 2\varepsilon], \quad \chi^\varepsilon(z) = 0 \text{ при } z \notin (\varepsilon, L-\varepsilon), \\ 0 \le \chi^\varepsilon(z) \le 1, \quad |\partial_z \chi^\varepsilon(z)| \le C_\chi \varepsilon^{-1}.\end{gathered} \tag{22}$$

Лемма 4. *Для функции* (19) *справедливо неравенство*

$$\varepsilon^{-2}\big\|(1-\chi^\varepsilon) w_k^\varepsilon; L^2(0,L)\big\|^2 + \big\|\chi^\varepsilon w_k^\varepsilon; H^1(0,L)\big\|^2 \le C\big\|U_k^\varepsilon; H^1(\varpi(\varepsilon))\big\|^2. \tag{23}$$

Доказательство. Поскольку $\chi^\varepsilon(z) \ne 1$ только при $z \in [0, 2\varepsilon] \cup [L - 2\varepsilon, L]$, имеем

$$\big\|\chi^\varepsilon w_k^\varepsilon - w_k^\varepsilon; L^2(0,L)\big\|^2 \le \int\limits_0^{2\varepsilon} \big|w_k^\varepsilon(z)\big|^2\,dz + \int\limits_{L-2\varepsilon}^{L} \big|w_k^\varepsilon(z)\big|^2 dz. \tag{24}$$

Оценим первый интеграл (со вторым поступаем аналогично). В равенстве

$$w_k^\varepsilon(z) = w_k^\varepsilon(z - 2\varepsilon) + \int\limits_{z-2\varepsilon}^{z} \partial_z w_k^\varepsilon(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in [0, 2\varepsilon], \tag{25}$$

интеграл обрабатываем следующим образом:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{z-2\varepsilon}^{z} \partial_z w_k^\varepsilon(\zeta)\,d\zeta\right| &= |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\left|\int\limits_{z-2\varepsilon}^{z}\int\limits_{\theta_\varepsilon} \partial_z U_k^\varepsilon(y,\zeta,\eta)\,dyd\zeta\right| \\ &\le (2\varepsilon)^{1/2}\big\|\nabla_x U_k^\varepsilon; L^2(\varpi(\varepsilon))\big\| \le 2C_\Lambda(k)\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

После возведения равенства (25) в квадрат и интегрирования по $[0, 2\varepsilon]$ находим

$$\int_0^{2\varepsilon} \bigl|w_k^\varepsilon(z)\bigr|^2\,dz \le 2\int_{-2\varepsilon}^{0}\int_{\theta_\varepsilon} \bigl|U_k^\varepsilon(x,\eta)\bigr|^2\,dx + C\varepsilon^2.$$

Пространство $H^1(\varpi_0)$ непрерывно вкладывается в $L^6(\varpi_0)$, т. е. по неравенству Гёльдера

$$\bigl\|U_k^\varepsilon; L^2(\theta_\varepsilon\times(-2\varepsilon,0))\bigr\|^2 \le C\varepsilon^2\bigl\|U_k^\varepsilon; L^6(\varpi_0)\bigr\|^2 \le C\varepsilon^2 C(\varpi_0)\bigl\|U_k^\varepsilon; H^1(\varpi_0)\bigr\|^2.$$

Первая норма из (23) оценена. Для оценки второй нормы из (23) заметим, что

$$\bigl\|\partial_z(\chi^\varepsilon w_k^\varepsilon); L^2(0,L)\bigr\| \le \bigl\|w_k^\varepsilon\partial_z\chi^\varepsilon; L^2(0,L)\bigr\| + \bigl\|\chi^\varepsilon\partial_z w_k^\varepsilon; L^2(0,L)\bigr\|.$$

Формулы (22), а также уже проверенные неравенства для интегралов из (24) устанавливают ограниченность предпоследнего слагаемого. При рассмотрении последнего достаточно вновь воспользоваться неравенством Коши — Буняковского:

$$\int_0^L |\theta_\varepsilon|^{-1}\biggl|\int_{\theta_\varepsilon}\partial_z U_k^\varepsilon(x,\eta)\,dy\biggr|^2 dz \le \int_{\Theta_\varepsilon}\bigl|\nabla_x U_k^\varepsilon(x,\eta)\bigr|^2\,dx. \quad \square$$

Соотношения (21) и (23) означают, что вдоль некоторой положительной бесконечно малой подпоследовательности $\{\varepsilon_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ (ее можно взять такой же, как и в (18)) имеют место сходимости

$$v_k^{\varepsilon_p} \to v^0 \quad \text{сильно в } L^2(\varpi_0) \text{ и слабо в } H^1(\varpi_0), \tag{26}$$

$$w_k^{\varepsilon_p} \to w^0 \quad \text{сильно в } L^2(0,L) \text{ и слабо в } H^1(0,L), \tag{27}$$

$$\chi^{\varepsilon_p} w_k^{\varepsilon_p} \to w^0 \quad \text{сильно в } L^2(0,L) \text{ и слабо в } H^1(0,L). \tag{28}$$

Одновременные сходимости (27) и (28) показывают, что $w^0 \in \mathring{H}^1(0,L)$, т. е.

$$w^0(0) = w^0(L) = 0.$$

Пусть $\psi \in C_c^\infty[0,L]$ и $\Psi \in C_c^\infty(\overline{\varpi_0}\setminus(\mathscr{O}\cup P_-))$. При малом ε составная функция

$$\phi(x) = |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\psi(z) \text{ при } x\in\Theta_\varepsilon, \quad \phi(x) = \Psi(x) \text{ при } x\in\varpi_0$$

попадает в пространство $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ и может быть подставлена в интегральное тождество (14):

$$\bigl(\nabla_x U_k^\varepsilon, |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\nabla_x\psi\bigr)_{\Theta_\varepsilon} + \bigl(\nabla_x U_k^\varepsilon, \nabla_x\Psi\bigr)_{\varpi_0} = \Lambda_k^\varepsilon(\eta)\bigl(U_k^\varepsilon, |\theta_\varepsilon|^{-1/2}\psi\bigr)_{\Theta_\varepsilon} + \Lambda_k^\varepsilon(\eta)\bigl(U_k^\varepsilon, \Psi\bigr)_{\varpi_0}.$$

Отсюда выводим такое тождество:

$$\bigl(\partial_z w_k^\varepsilon, \partial_z\psi\bigr)_{(0,L)} + \bigl(\nabla_x v_k^\varepsilon, \nabla_x\Psi\bigr)_{\varpi_0} = \Lambda_k^\varepsilon(\eta)\bigl(w_k^\varepsilon, \psi\bigr)_{(0,L)} + \Lambda_k^\varepsilon(\eta)\bigl(v_k^\varepsilon, \Psi\bigr)_{\varpi_0}.$$

Пользуясь соотношениями (26)–(28), перейдем в нем и в формуле (20) к пределу при $\varepsilon\to 0$. В итоге обнаруживаем, что

$$\bigl(\partial_z w_k^0, \partial_z\psi\bigr)_{(0,L)} + \bigl(\nabla_x v_k^0, \nabla_x\Psi\bigr)_{\varpi_0} = \Lambda^0(w^0,\psi)_{(0,L)} + \Lambda^0(v^0,\Psi)_{\varpi_0},$$

$$\|w^0; L^2(0,L)\|^2 + \|v^0; L^2(\varpi_0)\|^2 = 1.$$

По замыканию переходим к пробным функциям $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^1(0,L)$, $\Psi \in H^1(\varpi_0)$. Итак, величина $\Lambda^0(\eta)$, непрерывно и периодически зависящая от параметра η, оказывается собственным числом хотя бы одной из предельных задач (может быть, обеих). Номер этого собственного числа в последовательности (17) не меньше, чем k, так как, проредив последовательность $\{\varepsilon_p\}$, можно добиться ортогональности пределов w^0 и v^0 собственным функциям соответствующих задач с номерами, меньшими, чем k. Вместе с утверждением леммы 2 это приводит, в частности, к заключению, что

$$\Lambda_k^\varepsilon(\eta) \in \left(\Lambda_k^0 - C_k\sqrt{\varepsilon}, \Lambda_k^0 + C_k\sqrt{\varepsilon}\right). \tag{29}$$

Тем самым установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *При любом $k \in \mathbb{N}$ для величины $\Lambda_k^\varepsilon(\eta)$ имеет место сходимость* (18) *и предел Λ^0 оказывается членом последовательности* (17) *собственных чисел предельных задач* (15) *и* (16), *т. е., в частности, не зависит от параметра Флоке η.*

4. Формальная асимптотика; случай $\Lambda^0 \in \wp_\varpi \setminus \wp_\Upsilon$

Займемся построением асимптотических представлений для собственных чисел и собственных функций задачи (10)–(13). В этом разделе будут предложены анзацы в том случае, когда собственное число Λ^0 задачи (16) не попадает на спектр задачи (15). Пусть сначала $\Lambda^0 = \nu_k$ — простое собственное число; соответствующую вещественную собственную функцию u^0 нормируем в $L^2(\varpi_0)$. Анзац для возмущенного собственного числа возьмем таким:

$$\Lambda^\varepsilon(\eta) = \Lambda^0 + \varepsilon^2\Lambda''(\eta) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\eta).$$

При этом $\Lambda''(\eta)$ — поправочный член, а $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\eta)$ — малый остаток, подлежащий оценке. При построении асимптотики собственной функции U^ε будем использовать метод сращиваемых разложений, подразумевая два внешних разложения

$$U^\varepsilon(x,\eta) \sim \begin{cases} u^0(x) + \varepsilon^2 u^2(x) + \dots, & x \in \varpi_0, \\ w^0(z) + \varepsilon^2 w^2(z) + \dots, & x \in \Theta_\varepsilon, \end{cases} \tag{30}$$

и три внутренних разложения в окрестностях точек O и $P_\pm$.

Первое слагаемое внешнего разложения на стержне Θ_ε является решением задачи

$$-\partial_z^2 w^0(z) = \Lambda^0 w^0(z),\ z \in (0,L), \quad w^0(0) = u^0(0), \quad w^0(L) = e^{i\eta}u^0(P_-).$$

Поскольку $\Lambda^0 \notin \wp_\Upsilon$, эта задача имеет явное решение

$$w^0(z) = (e^{i\eta}u^0(P_-) - u^0(0)\cos(\sqrt{\Lambda^0}L))\frac{\sin(\sqrt{\Lambda^0}z)}{\sin(\sqrt{\Lambda^0}L)} + u^0(0)\cos(\sqrt{\Lambda^0}z) \quad \text{при } \Lambda^0 \neq 0, \tag{31}$$

$$w^0(z) = L^{-1}|\varpi|^{1/2}(e^{i\eta} - 1)z + |\varpi|^{1/2} \quad \text{при } \Lambda^0 = 0. \tag{32}$$

Запишем формулы Тейлора для функций u^0 и w^0 в «медленных» переменных x и «быстрых» переменных $\xi = \varepsilon^{-1}x$:

$$u^0(x) = u^0(0) + y\nabla_y u^0(0) + \dots = u^0(0) + \varepsilon\xi_1\partial_{x_1}u^0(0) + \varepsilon\xi_2\partial_{x_2}u^0(0) + \dots,$$

$$w^0(z) = u^0(0) + z\partial_z w^0(0) + \cdots = u^0(0) + \varepsilon\xi_3\partial_z w^0(0) + \ldots.$$

Таким образом, внутреннее разложение в окрестности точки O принимает вид

$$u^0(0) + \varepsilon(\partial_z w^0(0)T_3(\xi) + \partial_{x_1}u^0(0)T_1(\xi) + \partial_{x_2}u^0(0)T_2(\xi)) + \ldots,$$

где функции T_j являются решениями однородных задач Неймана

$$-\Delta_\xi T_j(\xi) = 0,\ \xi \in \Xi, \quad \partial_n T_j = 0,\ \xi \in \partial\Xi,$$

в области $\Xi = \mathbb{R}^3_- \cup Q_+$, где $\mathbb{R}^3_- = \{\xi : \xi_3 < 0\}$ — полупространство и $Q_+ = \theta \times [0, +\infty)$ — полуцилиндр, и обладают таким поведением на бесконечности:

$$T_j(\xi) = \begin{cases} \xi_j + \widetilde{T}_j(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^3_- \setminus \mathbb{B}_R, \\ a_j(\theta) + \widetilde{T}_j(\xi), & \xi \in Q_+ \setminus \mathbb{B}_R, \end{cases} \quad j = 1, 2, \tag{33}$$

$$T_3(\xi) = \begin{cases} \frac{c_\theta}{2\pi|\xi|} + \widetilde{T}_3(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^3_- \setminus \mathbb{B}_R, \\ \xi_3 + a_3(\theta) + \widetilde{T}_3(\xi), & \xi \in Q_+ \setminus \mathbb{B}_R. \end{cases} \tag{34}$$

Здесь $\mathbb{B}_R = \{\xi : |\xi| < R\}$ — шар. При $k = 0, 1, 2, \ldots$ остатки $\widetilde{T}_j$ удовлетворяют соотношениям

$$|\nabla^k \widetilde{T}_j(\xi)| \le c_k|\xi|^{-k-2},\ \xi \in \mathbb{R}^3_- \setminus \mathbb{B}_R, \quad |\nabla^k \widetilde{T}_j(\xi)| \le c_k e^{-\mu_1\xi_3},\ \xi \in Q_+ \setminus \mathbb{B}_R, \tag{35}$$

где μ_1 — первое положительное собственное число задачи Неймана на сечении θ.

Для того чтобы найти величину c_θ, применим формулу Грина на усеченном множестве $\Xi_R = (\mathbb{R}^3_- \cap \mathbb{B}_R) \cup (\theta \times [0, R))$, т. е.

$$0 = \int\limits_{\Xi_R} \Delta_\xi T_3(\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{S}_-(R)} \partial_n T_3(\xi)\, dS(\xi) + \int\limits_\theta \partial_{\xi_3} T_3(\xi_1, \xi_2, R)\, d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь $\mathbb{S}_-(R) = \{\xi : \xi_3 < 0, |\xi| = R\}$ — полусфера. Предельный переход при $R \to +\infty$ и представления (34) и (35) показывают, что $c_\theta = |\theta|$. Аналогичные вычисления устанавливают, что разложения функций T_1 и T_2 не содержат слагаемых $c|\xi|^{-1}$, что уже было учтено в (33).

В быстрых переменных $\xi_\pm = \varepsilon^{-1}(P_\pm - x)$ внутренние разложения приобретают вид

$$u^0(P_-) - \varepsilon(e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)T_3(\xi_-) + \partial_{x_1}u^0(P_-)T_1(\xi_-) + \partial_{x_2}u^0(P_-)T_2(\xi_-)),$$
$$e^{i\eta}u^0(P_+) - \varepsilon(\partial_z w^0(L)T_3(\xi_+) + e^{i\eta}\partial_{x_1}u^0(P_-)T_1(\xi_+) + e^{i\eta}\partial_{x_2}u^0(P_-)T_2(\xi_+))$$

и находятся при учете условий квазипериодичности (12), (13).

Возврат к «медленным» переменным x и выделение слагаемых порядка ε^2 приводят к следующей задаче для слагаемого u^2 из (30):

$$-(\Delta_x + \Lambda^0)u^2(x, \eta) = \Lambda''(\eta)u^0(x), \quad x \in \varpi_0,$$
$$\partial_n u^2(x, \eta) = 0, \quad x \in \partial\varpi_0 \setminus \{O, P_-\},$$
$$u^2(x, \eta) \sim |\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}, \quad x \to O,$$
$$u^2(x, \eta) \sim -|\theta|e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)(2\pi|x - P_-|)^{-1}, \quad x \to P_-.$$

Пусть гладкая срезающая функция χ равна единице при $|x| \le r_0$ и нулю при $|x| > 2r_0$. Вводя представление

$$u^2(x, \eta) = |\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\chi(x) - |\theta|e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)(2\pi|x - P_-|)^{-1}\chi(x - P_-) + u'(x, \eta),$$

видим, что основная поправка u' является (ограниченным) решением задачи

$$(-\Delta-\Lambda^0)u'(x,\eta)=\Lambda''(\eta)u^0(x)+\mathscr{F}(x),\quad x\in\varpi_0, \tag{36}$$

$$\partial_n u'(x,\eta)=\mathscr{G}(x),\quad x\in\partial\varpi_0\setminus\{O,P_-\}, \tag{37}$$

где

$$\mathscr{F}(x)=|\theta|(\Delta+\Lambda^0)(\partial_z w^0(0)\chi(x)(2\pi|x|)^{-1}-e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)\chi(x-P_-)(2\pi|x-P_-|)^{-1}),$$

$$\mathscr{G}(x)=-|\theta|\partial_n(\partial_z w^0(0)\chi(x)(2\pi|x|)^{-1}-e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)\chi(x-P_-)(2\pi|x-P_-|)^{-1}).$$

В силу альтернативы Фредгольма условием разрешимости задачи (36), (37) (единственным в силу простоты собственного числа) служит равенство

$$\Lambda''(\eta)(u^0,u^0)_{\varpi_0}+(\mathscr{F},u^0)_{\varpi_0}+(\mathscr{G},u^0)_{\partial\varpi_0}=0. \tag{38}$$

Имеем

$$\int\limits_{\varpi_0}(\Delta+\Lambda^0)(\chi(x)|x|^{-1})u^0(x)\,dx-\int\limits_{\partial\varpi_0}\partial_n(\chi(x)|x|^{-1})u^0(x)\,ds(x)=I$$

$$=\lim_{r\to 0}I_r=\lim_{r\to 0}\int\limits_{\varpi_0\setminus\mathbb{B}_r}(\Delta+\Lambda^0)(\chi(x)|x|^{-1})u^0(x)\,dx-\int\limits_{\partial\varpi_0}\partial_n(\chi(x)|x|^{-1})u^0(x)\,ds(x).$$

К первому интегралу в I_r применим формулу Грина и получим соотношение

$$I_r=\int\limits_{\mathbb{S}_r\cap\varpi_0}\frac{1}{r^2}u^0(x)\,dx+o(1)\to 2\pi u^0(0),\quad r\to 0.$$

Аналогично вычисляется второй интеграл

$$\int\limits_{\varpi_0}(\Delta+\Lambda^0)(\chi(x-P_-)|x-P_-|^{-1})u^0(x)\,dx=2\pi u^0(P_-).$$

Используя явное выражение (31), (32) для функции w^0 и учитывая нормировку $\|u^0;L^2(\varpi_0)\|=1$, получаем, что

$$\Lambda''(\eta)=\frac{\sqrt{\Lambda^0}|\theta|}{\sin(\sqrt{\Lambda^0}L)}((|u^0(0)|^2+|u^0(P_-)|^2)\cos(\sqrt{\Lambda^0}L)-2u^0(0)u^0(P_-)\cos\eta),$$

$$\Lambda^0\neq 0,$$

$$\Lambda''(\eta)=2L^{-1}|\theta||\varpi|(1-\cos\eta),\quad \Lambda^0=0. \tag{39}$$

Замечание 1. При указанном выборе $\Lambda''(\eta)$ задача (36), (37) разрешима в $H^1(\varpi_0)$, однако правая часть уравнения (36) лежит в $L^q(\varpi_0)$, $q<3$, а правая часть краевого условия (37) — в $L^q(\partial\varpi_0)$, $q<2$, т. е. в действительности $u'\in W^2_q(\varpi_0)$, так как поверхность $\partial\varpi_0$ гладкая. Следовательно, в силу теорем вложения Соболева $\nabla_x u'\in L^p(\varpi_0)$ при $p<6$. Кроме того, $u'\in L^\infty(\varpi_0)$.

Замечание 2. При обосновании асимптотики потребуется еще одно слагаемое асимптотического разложения на множестве Θ_ε. Для его определения введем величины

$$A=a_3(\theta)\partial_z w^0(0)+a_1(\theta)\partial_{x_1}u^0(0)+a_2(\theta)\partial_{x_2}u^0(0),$$

$$B = -a_3(\theta)\partial_z w^0(L) - e^{i\eta} a_1(\theta)\partial_{x_1} u^0(P_-) - e^{i\eta} a_2(\theta)\partial_{x_2} u^0(P_-)$$

и решение w' задачи

$$-\partial_z^2 w'(z) = \Lambda^0 w'(z),\ z \in (0, L), \quad w'(0) = A, \quad w'(L) = B.$$

Обратимся к случаю, когда $\Lambda^0 = \nu_k = \nu_{k+1} = \dots = \nu_{k+m-1}$ — собственное число с кратностью m. Пусть собственные функции u_k^0, u_{k+1}^0, …, u_{k+m-1}^0 образуют ортонормированный базис в соответствующем собственном подпространстве, и пусть

$$u^0(x) = \sum_{j=k}^{k+m-1} \alpha_j u_j^0(x), \qquad \sum_{j=k}^{k+m-1} |\alpha_j|^2 = 1.$$

Для функции u^0 проведем прежние построения с той лишь разницей, что условием разрешимости задачи (36), (37) теперь служат m равенств, аналогичных соотношению (38). В результате обнаруживаем, что $\Lambda''(\eta)$ — собственное число самосопряженной матрицы $\mathscr{A}_k(\eta) = (a_{ij}(\eta))_{i,j=k}^{k+m-1}$ с элементами

$$a_{ij}(\eta) = \frac{\sqrt{\Lambda^0}|\theta|}{\sin(\sqrt{\Lambda^0}L)}\big(e^{i\eta} u_i^0(0) u_j^0(P_-) + e^{-i\eta} u_i^0(P_-) u_j^0(0) - \cos(\sqrt{\Lambda^0}L)\big(u_i^0(0)u_j^0(0) + u_i^0(P_-)u_j^0(P_-)\big)\big). \tag{40}$$

Отметим, что эта матрица является суммой четырех матриц ранга 1 и, следовательно, ее ранг не превышает 4.

5. Формальная асимптотика; случай $\Lambda^0 \in \wp_\Upsilon \setminus \wp_\varpi$

Пусть $\Lambda^0 = \mu_k = \pi^2 L^{-2} k^2$ — собственное число задачи (15) и $w^0(z) = \sqrt{2}L^{-1/2}\sin(\pi L^{-1} k z)$ — соответствующая собственная функция. Подчеркнем, что собственное число задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения всегда простое. Для собственного числа примем анзац

$$\Lambda^\varepsilon(\eta) = \Lambda^0 + \varepsilon\Lambda'(\eta) + \varepsilon^2\Lambda''(\eta) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\eta). \tag{41}$$

Для построения асимптотики, соответствующей собственной функции U^ε, вновь будем использовать метод сращиваемых разложений. Внешнее разложение на множестве Θ_ε имеет вид

$$|\theta|^{-1/2}(\varepsilon^{-1}w^0(z) + w^1(z) + \varepsilon w^2(z) + \dots) = |\theta_\varepsilon|^{-1/2}(w^0(z) + \varepsilon w^1(z) + \varepsilon^2 w^2(z) + \dots), \tag{42}$$

а на множестве ϖ_0 — вид $\varepsilon u^1(x) + \varepsilon^2 u^2(x) + \dots$. К функции (42) применим формулу Тейлора в окрестности точки O и перепишем ее в «быстрых» координатах $\xi = \varepsilon^{-1}x$ при учете равенства $\partial_z^2 w^0(0) = 0$:

$$|\theta|^{-1/2}(\varepsilon^{-1}w^0(z) + w^1(z) + \varepsilon w^2(z) + \dots) = |\theta|^{-1/2}(\xi_3\partial_z w^0(0) + w^1(0) + \varepsilon\xi_3\partial_z w^1(0) + \varepsilon w^2(0) + \dots).$$

Отсюда и из аналогичного соотношения около точки P_+, а также условий квазипериодичности выводим первые слагаемые внутренних разложений около точек O и P_-:

$$|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(0) T_3(\xi), \quad -e^{-i\eta}|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(L) T_3(\xi_-),$$

которые перепишем в переменных x и выделим слагаемые порядка ε:

$$|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(0)T^3(\xi)=\varepsilon|\theta|^{1/2}\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}+\dots,$$

$$-e^{-i\eta}|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(L)T^3(\xi_-)=-e^{-i\eta}\varepsilon|\theta|^{1/2}\partial_z w^0(L)(2\pi|x-P_-|)^{-1}+\dots.$$

Слагаемое εu^1 находится из задачи

$$\begin{gathered}-\Delta u^1(x,\eta)=\Lambda^0 u^1(x,\eta),\quad x\in\varpi_0,\\ \partial_n u^1(x,\eta)=0,\quad x\in\partial\varpi_0\setminus\{O,P_-\},\\ u^1(x,\eta)\sim\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1},\quad x\to O,\\ u^1(x,\eta)\sim -e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)(2\pi|x-P_-|)^{-1},\quad x\to P_-.\end{gathered}\tag{43}$$

Поскольку $\Lambda^0\notin\wp_\varpi$, для любой точки $y\in\partial\varpi_0$ существует ядро Пуассона $G(x,y,\Lambda^0)$ в задаче Неймана, которое удовлетворяет уравнению (43) в области ϖ_0 и краевому условию $\partial_n G(x,y,\Lambda^0)=\delta(y)$ в смысле теории обобщенных функций; здесь δ — функция Дирака. Функция G имеет особенность в точке y и может быть представлена в виде $G(x,y,\Lambda^0)=(2\pi|x-y|)^{-1}+G^0(x,y,\Lambda^0)$, где G^0 — регулярная часть ядра Пуассона. Отметим, что $G^0(x,y,\Lambda^0)=G^0(y,x,\Lambda^0)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}u^1(x,\eta)&=\partial_z w^0(0)G(x,0,\Lambda^0)-e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)G(x,P_-,\Lambda^0)=\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\\&-e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)(2\pi|x-P_-|)^{-1}+\partial_z w^0(0)G^0(x,0,\Lambda^0)-e^{-i\eta}\partial_z w^0(L)G^0(x,P_-,\Lambda^0).\end{aligned}$$

Следующие слагаемые внутренних разложений около точек $P_\pm$ оказываются константами, появляющимися из разложения (34) функции T_3 при $\xi_3\to+\infty$. Это дает возможность поставить задачу для поправки w^1:

$$-\partial_z^2 w^1(z)-\Lambda^0 w^1(z)=\Lambda'(\eta)w^0(z),\quad z\in(0,L),$$

$$w^1(0)=a_3(\theta)|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(0),\quad w^1(L)=-a_3(\theta)|\theta|^{-1/2}\partial_z w^0(L),$$

условием разрешимости которой служит равенство

$$\Lambda'(\eta)=-a_3(\theta)|\theta|^{-1/2}(|\partial_z w^0(0)|^2+|\partial_z w^0(L)|^2).\tag{44}$$

Подчеркнем, что величина (44) не зависит от параметра η.

Слагаемое ε^2u^2 вычисляется при помощи аналогичных выкладок, а именно

$$\begin{aligned}u^2(x,\eta)&=\partial_z w^1(0)(2\pi|x|)^{-1}-e^{-i\eta}\partial_z w^1(L)(2\pi|x-P_-|)^{-1}\\&\qquad+\partial_z w^1(0)G^0(x,0,\Lambda^0)-e^{-i\eta}\partial_z w^1(L)G^0(x,P_-,\Lambda^0).\end{aligned}$$

Поэтому задача для w^2 выглядит так:

$$-\partial_z^2 w^2(z)-\Lambda^0 w^2(z)=\Lambda''(\eta)w^0(z)+\Lambda' w^1(z),\quad z\in(0,L),$$

$$w^2(0)=a_3(\theta)|\theta|^{-1/2}\partial_z w^1(0)+G^0(0,0,\Lambda^0)\partial_z w^0(0)-e^{-i\eta}G^0(0,P_-,\Lambda^0)\partial_z w^0(L),$$

$$w^2(L)=-a_3(\theta)|\theta|^{-1/2}\partial_z w^1(L)+e^{i\eta}G^0(P_-,0,\Lambda^0)\partial_z w^0(0)-G^0(P_-,P_-,\Lambda^0)\partial_z w^0(L).$$

Условие ее разрешимости дает выражение для второй поправки в анзаце (41):

$$\begin{aligned}\Lambda''(\eta)&=12\pi^{-2}|a_3(\theta)|^2|\theta|^{-1}-|\partial_z w^0(0)|^2G^0(0,0,\Lambda^0)\\&\qquad-|\partial_z w^0(L)|^2G^0(P_-,P_-,\Lambda^0)+2\cos\eta\,\partial_z w^0(0)\partial_z w^0(L)G^0(0,P_-,\Lambda^0).\end{aligned}$$

6. Обоснование асимптотики

Подробно рассмотрим случай $\Lambda^0 \in \wp_\varpi \setminus \wp_\Upsilon$. В лемме 1 в качестве пространства $\mathscr{H}$ возьмем $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$, которое состоит из функций $U \in H^1(\varpi(\varepsilon))$, удовлетворяющих условию квазипериодичности (12), и снабжено скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = (\nabla u, \nabla v)_{\varpi(\varepsilon)} + (u, v)_{\varpi(\varepsilon)}.$$

Оператор $\mathscr{T}^\varepsilon(\eta)$ определим равенством

$$\langle \mathscr{T}^\varepsilon(\eta) u, v\rangle = (u, v)_{\varpi(\varepsilon)};$$

он компактный, самосопряженный, и его собственные числа $\zeta_j^\varepsilon(\eta)$ связаны с собственными числами (9) соотношением

$$\zeta_j^\varepsilon(\eta) = \bigl(\Lambda_j^\varepsilon(\eta) + 1\bigr)^{-1}.$$

Пусть, как и в последнем абзаце из разд. 4, $\Lambda^0 \in \wp_\varpi$ — собственное число с кратностью m. Ортонормированный в $L^2(\varpi_0)$ базис собственных функций выберем так, чтобы для каждой из функций $u_k^0, \dots, u_{k+m-1}^0$ можно было провести описанное выше формальное построение асимптотики, т. е. задача (36), (37) стала разрешима при некотором Λ_j'. Отметим, что система $(1+\Lambda^0)^{-1/2} u_j^0$ ортонормирована в пространстве $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$. Каждой функции u_j^0 поставим в соответствие функцию $\mathscr{U}_j^\varepsilon \in \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$, заданную на множествах ϖ_0 и Θ_ε следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}_j^\varepsilon(x,\eta) &= \bigl(1 - \chi_0^\varepsilon(x) - \chi_-^\varepsilon(x)\bigr)\bigl(u_j^0(x) + \varepsilon^2 u_j'(x,\eta)\bigr) \\
&\quad + \chi_0^1(x)\bigl(u_j^0(0) + \varepsilon V_{j0}(x)\bigr) + \chi_-^1(x)\bigl(u_j^0(P_-) + \varepsilon V_{j-}(x)\bigr) \\
&\quad - \bigl(1 - \chi_0^\varepsilon(x)\bigr)\chi_0^1(x)\bigl(u_j^0(0) + x_1\partial_{x_1} u_j^0(0) + x_2\partial_{x_2} u_j^0(0)\bigr) \\
&\quad - \bigl(1 - \chi_-^\varepsilon(x)\bigr)\chi_-^1(x)\bigl(u_j^0(P_-) + x_1\partial_{x_1} u_j^0(P_-) + x_2\partial_{x_2} u_j^0(P_-)\bigr), \quad x \in \varpi_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{U}_j^\varepsilon(x,\eta) &= \bigl(1 - \chi_0^\varepsilon(x) - \chi_+^\varepsilon(x)\bigr)\bigl(w_j^0(z) + \varepsilon w_j'(z)\bigr) \\
&\quad + \chi_0^1(x)\bigl(w_j^0(0) + \varepsilon V_{j0}(x)\bigr) + \chi_+^1(x)\bigl(w_j^0(L) + \varepsilon V_{j+}(x)\bigr) \\
&\quad - \bigl(1 - \chi_0^\varepsilon(x)\bigr)\chi_0^1(x)\bigl(w_j^0(0) + z\partial_z w_j^0(0) + \varepsilon A_j\bigr) \\
&\quad - \bigl(1 - \chi_+^\varepsilon(x)\bigr)\chi_+^1(x)\bigl(w_j^0(L) + (z-L)\partial_z w_j^0(L) + \varepsilon B_j\bigr), \quad x \in \Theta_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь $\chi_0^a(x) = \chi(a^{-1}x)$, $\chi_\pm^a(x) = \chi(a^{-1}(x - P_\pm))$ и

$$V_{j0}(x) = \partial_{x_1} u_j^0(0) T_1(\varepsilon^{-1}x) + \partial_{x_2} u_j^0(0) T_2(\varepsilon^{-1}x) + \partial_z w_j^0(0) T_3(\varepsilon^{-1}x),$$

$$\begin{aligned}
V_{j-}(x) = -\partial_{x_1} u_j^0(P_-) T_1(\varepsilon^{-1}(P_- - x)) - \partial_{x_2} u_j^0(P_-) T_2(\varepsilon^{-1}(P_- - x)) \\
- e^{-i\eta}\partial_z w_j^0(L) T_3(\varepsilon^{-1}(P_- - x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{j+}(x) = -e^{i\eta}\partial_{x_1} u_j^0(P_-) T_1(\varepsilon^{-1}(P_+ - x)) - e^{i\eta}\partial_{x_2} u_j^0(P_-) T_2(\varepsilon^{-1}(P_+ - x)) \\
- \partial_z w_j^0(L) T_3(\varepsilon^{-1}(P_+ - x)).
\end{aligned}$$

Кроме того, на множествах $\gamma_0(\varepsilon)$ и $\gamma_-(\varepsilon)$, лежащих в εr_0-окрестностях точек O и P_- и определяемых из формулы $\varpi(\varepsilon) \setminus (\varpi_0 \cup \Theta_\varepsilon) = \gamma_0(\varepsilon) \cup \gamma_-(\varepsilon)$, положим

$$\mathscr{U}_j^\varepsilon(x,\eta) = u_j^0(0) + \varepsilon V_{j0}(x), \ x \in \gamma_0(\varepsilon), \quad \mathscr{U}_j^\varepsilon(x,\eta) = u_j^0(P_-) + \varepsilon V_{j-}(x), \ x \in \gamma_-(\varepsilon).$$

Некоторые оценки для функций V_{j0} и V_{j-} оформим в виде отдельной леммы.

Лемма 5. *Для функции V_{j0} выполнены следующие соотношения:*

$$\int\limits_{\varpi_0} \big|\varepsilon V_{j0}(x) - y\nabla_y u_j^0(0)\big|^2\,dx + \big|\nabla_x(\varepsilon V_{j0}(x) - y\nabla_y u_j^0(0))\big|^2 \le C\varepsilon^3, \tag{45}$$

$$\int\limits_{\varpi_0} \big|\varepsilon V_{j0}(x) - y\nabla_y u_j^0(0) - \varepsilon^2|\theta|\partial_z w_j^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\big|^2\,dx \le C\varepsilon^5, \tag{46}$$

$$\int\limits_{\varpi_0\cap \operatorname{supp}|\nabla_x\chi_0^1|} \big|\nabla_x(\varepsilon V_{j0}(x) - y\nabla_y u_j^0(0) - \varepsilon^2|\theta|\partial_z w_j^0(0)(2\pi|x|)^{-1})\big|^2\,dx \le C\varepsilon^4, \tag{47}$$

$$\int\limits_{\Theta_\varepsilon} \big|\varepsilon V_{j0}(x) - z\partial_z w_j^0(0) - \varepsilon A_j\big|^2 + \big|\nabla_x(\varepsilon V_{j0}(x) - z\partial_z w_j^0(0) - \varepsilon A_j)\big|^2\,dx \le C\varepsilon^5, \tag{48}$$

$$\int\limits_{\gamma_0(\varepsilon)} |V_{j0}(x)|^2 + |\varepsilon\nabla_x V_{j0}(x)|^2\,dx \le C\varepsilon^3. \tag{49}$$

Аналогичное верно для функции V_{j-}.

Доказательство. В первых трех интегралах перейдем к быстрым переменным. Интеграл (45) при этом преобразуется в выражение

$$\varepsilon^5 \int\limits_{\varepsilon^{-1}\varpi_0} |T(\xi)|^2 + \varepsilon^{-2}|\nabla_\xi T(\xi)|^2\,d\xi \le \varepsilon^3 \int\limits_{\mathbb{R}^3_-} (1+|\xi|)^{-2}|T(\xi)|^2 + |\nabla_\xi T(\xi)|^2\,d\xi \le C\varepsilon^3,$$

где $T(\xi) = \partial_{x_1}u_j^0(0)(T_1(\xi)-\xi_1) + \partial_{x_2}u_j^0(0)(T_2(\xi)-\xi_2) + \partial_z w_j^0(0)T_3(\xi)$. Неравенство (46) доказывается аналогично с незначительными изменениями. Интеграл (47) после замены приобретает вид

$$\varepsilon^3 \int\limits_{\Omega} \big|\nabla_\xi(T(\xi) - \partial_z w_j^0(0)|\theta|(2\pi|\xi|)^{-1})\big|^2\,d\xi.$$

Множество интегрирования $\Omega = \varepsilon^{-1}\big(\varpi_0 \cap \operatorname{supp}\big|\nabla_x\chi_0^1\big|\big)$ содержится в шаровом слое $\mathbb{B}_{2\varepsilon^{-1}r_0}\setminus\mathbb{B}_{\varepsilon^{-1}r_0}$, а подынтегральная функция имеет порядок $|\xi|^{-6}$ на бесконечности и $|\xi|^{-4}$ в нуле, поэтому интеграл может быть оценен величиной

$$C \int\limits_{\mathbb{B}_{2\varepsilon^{-1}r_0}\setminus\mathbb{B}_{\varepsilon^{-1}r_0}} |\xi|^{-4}\,d\xi = O(\varepsilon).$$

Неравенство (48) доказывается аналогично с учетом асимптотического поведения функций T_j при $\xi_3\to+\infty$. $\square$

Лемма 6. *Функции $(1+\Lambda^0)^{-1/2}\mathscr{U}_j^\varepsilon$ образуют почти ортонормированную систему в $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$. Более того, $\big\|\mathscr{U}_j^\varepsilon - u_j^0; \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\big\| \le C_j\varepsilon$, причем функция u_j^0 продолжена нулем вне области ϖ_0.*

Доказательство. Заметим, что

$$\big\|\mathscr{U}_j^\varepsilon - u_j^0; \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\big\|^2 = \int\limits_{\varpi_0} \big|\nabla_x\big(\mathscr{U}_j^\varepsilon(x) - u_j^0(x)\big)\big|^2 + \big|\mathscr{U}_j^\varepsilon(x) - u_j^0(x)\big|^2\,dx$$

$$+ \int\limits_{\Theta_\varepsilon} \big|\nabla_x\mathscr{U}_j^\varepsilon(x)\big|^2 + \big|\mathscr{U}_j^\varepsilon(x)\big|^2\,dx + \int\limits_{\gamma_0(\varepsilon)\cup\gamma_-(\varepsilon)} \big|\nabla_x\mathscr{U}_j^\varepsilon(x)\big|^2 + \big|\mathscr{U}_j^\varepsilon(x)\big|^2\,dx.$$

Начнем с оценки интеграла по ϖ_0. При достаточно малом ε имеем

$$\big(1-\chi^\varepsilon_\alpha(x)\big)\chi^1_\alpha(x)=\chi^1_\alpha(x)-\chi^\varepsilon_\alpha(x),\quad \alpha=0,\pm,$$

а значит,

$$\begin{aligned}\mathscr{U}^\varepsilon_j(x,\eta)=u^0_j(x)-\chi^\varepsilon_0(x)\big(u^0_j(x)-u^0_j(0)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(0)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(0)\big)\\ -\chi^\varepsilon_-(x)\big(u^0_j(x)-u^0_j(P_-)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(P_-)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(P_-)\big)\\ +\chi^1_0(x)\big(\varepsilon V_{j0}(x)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(0)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(0)\big)\\ +\chi^1_-(x)\big(\varepsilon V_{j-}(x)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(P_-)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(P_-)\big)\\ +\varepsilon^2\big(1-\chi^\varepsilon_0(x)-\chi^\varepsilon_-(x)\big)u'_j(x,\eta).\end{aligned}$$

Благодаря формуле Тейлора находим, что

$$u^0_j(x)-u^0_j(0)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(0)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(0)=O(\varepsilon^2),\quad x\in\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_0,$$

$$\nabla_x\big(u^0_j(x)-u^0_j(0)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(0)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(0)\big)=O(\varepsilon),\quad x\in\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_0.$$

Аналогичные неравенства верны и в окрестности точки P_-. Кроме того, $\big|\nabla_x\chi^\varepsilon_\alpha\big|\le C_\chi\varepsilon^{-1}$ и носители функций χ^ε_α имеют меру $O(\varepsilon^3)$, а значит, нормы соответствующих слагаемых в $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$ оцениваются сверху величиной порядка $\varepsilon^{5/2}$.

Слагаемые, содержащие выражение $\varepsilon V_{j0}(x)-x_1\partial_{x_1}u^0_j(0)-x_2\partial_{x_2}u^0_j(0)$, при помощи соотношения (45) мажорируются величиной порядка $\varepsilon^{3/2}$.

Осталось воспользоваться замечанием 1. Действительно,

$$\int\limits_{\varpi_0}\big|\big(1-\chi^\varepsilon_0(x)-\chi^\varepsilon_-(x)\big)u'_j(x,\eta)\big|^2\,dx\le C\|u'_j;L^\infty(\varpi_0)\|^2,$$

$$\int\limits_{\varpi_0}\big|\nabla_x\big(1-\chi^\varepsilon_0(x)-\chi^\varepsilon_-(x)\big)u'_j(x,\eta)\big|^2\,dx\le C\varepsilon\|u'_j;L^\infty(\varpi_0)\|^2,$$

$$\int\limits_{\varpi_0}\big|\big(1-\chi^\varepsilon_0(x)-\chi^\varepsilon_-(x)\big)\nabla_x u'_j(x,\eta)\big|^2\,dx\le C\|\nabla_x u'_j;L^2(\varpi_0)\|^2.$$

Перейдем к интегралу по множеству Θ_ε. Перепишем функцию $\mathscr{U}^\varepsilon_j$ так:

$$\mathscr{U}^\varepsilon_j(x,\eta)=w^0_j(z)-\chi^\varepsilon_0(x)\big(w^0_j(z)-w^0_j(0)-z\partial_z w^0_j(0)+\varepsilon(w'_j(z)-A_j)\big)\tag{50}$$

$$-\chi^\varepsilon_+(x)\big(w^0_j(z)-w^0_j(L)-(z-L)\partial_z w^0_j(L)+\varepsilon(w'_j(z)-B_j)\big)\tag{51}$$

$$+\chi^1_0(x)\big(\varepsilon V_{j0}(x)-z\partial_z w^0_j(0)-\varepsilon A_j\big)+\chi^1_+(x)\big(\varepsilon V_{j+}(x)-(z-L)\partial_z w^0_j(L)-\varepsilon B_j\big).\tag{52}$$

Норма функции w^0_j в $H^1(\Theta_\varepsilon)$ имеет порядок ε. Норма слагаемого (50) в $H^1(\Theta_\varepsilon)$ равна $O(\varepsilon^{5/2})$, поскольку

$$w^0_j(z)-w^0_j(0)-z\partial_z w^0_j(0)+\varepsilon(w'_j(z)-A_j)=O(\varepsilon^2),\quad x\in\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_0,$$

$$\nabla_x\big(w^0_j(x)-w^0_j(0)-z\partial_z w^0_j(0)+\varepsilon(w'_j(z)-A_j)\big)=O(\varepsilon),\quad x\in\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_0,$$

$$\big|\nabla_x\chi^\varepsilon_0(x)\big|\le c_\chi\varepsilon^{-1},\quad \big|\operatorname{supp}\chi^\varepsilon_0\big|=O(\varepsilon^3).$$

Аналогично обрабатывается норма (51).

Нормы слагаемых (52) можно оценить величиной порядка $\varepsilon^{3/2}$ благодаря неравенству (48). Осталось заметить, что в силу соотношения (49) интегралы по множествам γ_α приобретают мажоранту $C\varepsilon^{3/2}$. $\square$

Следствие 1. *При* $i, j \in \{k, \dots, k+m-1\}$ *выполнено неравенство*

$$\left|\left\langle \mathscr{U}_j^\varepsilon, \mathscr{U}_i^\varepsilon \right\rangle - (\Lambda^0+1)\delta_{j,i}\right| \leq 3C_k\varepsilon.$$

Лемма 7. *Для построенных функций* $\mathscr{U}_j^\varepsilon$ *верна оценка*

$$\left\| \mathscr{T}^\varepsilon(\eta)\mathscr{U}_j^\varepsilon - (1+\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda_j''(\eta))^{-1}\mathscr{U}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\right\| \leq C_j\varepsilon^{5/2}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}\left\| \mathscr{T}^\varepsilon(\eta)\mathscr{U}_j^\varepsilon - (1+\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda_j''(\eta))^{-1}\mathscr{U}_j^\varepsilon; \mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\right\| \\ = \sup \left\langle \mathscr{T}^\varepsilon(\eta)\mathscr{U}_j^\varepsilon - (1+\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda_j''(\eta))^{-1}\mathscr{U}_j^\varepsilon, Z\right\rangle \\ \leq \sup \left| \left(\nabla_x \mathscr{U}_j^\varepsilon, \nabla_x Z\right)_{\varpi(\varepsilon)} - (\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda_j''(\eta))\left(\mathscr{U}_j^\varepsilon, Z\right)_{\varpi(\varepsilon)}\right|,\end{aligned}$$

где супремум вычисляется по всем функциям Z из единичного шара в пространстве $\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)$.

Преобразуем скалярное произведение $\left(\nabla_x \mathscr{U}_j^\varepsilon, \nabla_x Z\right)_{\varpi_0}$, применив формулу

$$(\nabla_x(\chi u), \nabla_x Z) = (\nabla_x u, \nabla_x(\chi Z)) + (u\nabla_x\chi, \nabla_x Z) - (\nabla_x u, Z\nabla_x\chi). \tag{53}$$

В результате получим, что оно представимо в виде суммы слагаемых

$$\left(\nabla_x u_j^0, \nabla_x\left(\left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)\right)_{\varpi_0}, \quad \varepsilon^2\left(\nabla_x u_j', \nabla_x\left(\left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)\right)_{\varpi_0}, \tag{54}$$

$$-\left(\left(u_j^0-u_j^0(0)-y\nabla_y u_j^0(0)\right)\nabla_x\chi_0^\varepsilon, \nabla_x Z\right)_{\varpi_0}, \quad \left(\nabla_x\left(u_j^0-u_j^0(0)-y\nabla_y u_j^0(0)\right), Z\nabla_x\chi_0^\varepsilon\right)_{\varpi_0}, \tag{55}$$

$$\varepsilon\left(\nabla_x V_{j0}, \nabla_x\left(\chi_0^1 Z\right)\right)_{\varpi_0} - \left(\nabla_x\left(u_j^0(0)+y\nabla_y u_j^0(0)\right), \nabla_x\left(\left(1-\chi_0^\varepsilon\right)\chi_0^1 Z\right)\right)_{\varpi_0}, \tag{56}$$

$$\left(\left(\varepsilon V_{j0} - y\nabla_y u_j^0(0)\right)\nabla_x\chi_0^1, \nabla_x Z\right)_{\varpi_0}, \quad -\left(\nabla_x\left(\varepsilon V_{j0} - y\nabla_y u_j^0(0)\right), Z\nabla_x\chi_0^1\right)_{\varpi_0}, \tag{57}$$

а также аналогичных слагаемых, отвечающих точке P_-.

Слагаемые (55) оцениваются величиной $O(\varepsilon^{5/2})$ так, как это сделано в лемме 5. Выражения (54) обрабатываются благодаря интегральным тождествам для функций u_j^0 и u_j', в результате чего исчезают члены

$$(\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda''(\eta))\left(u_j^0, \left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)_{\varpi_0}, \quad \varepsilon^2\Lambda^0\left(u_j', \left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)_{\varpi_0},$$

однако появляются слагаемые $\left(\mathscr{F}, \left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)_{\varpi_0} + \left(\mathscr{G}, \left(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_-^\varepsilon\right)Z\right)_{\partial\varpi_0}$, которые перепишем в виде суммы выражений

$$-\varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)\left(\nabla_x\left(\chi_0^1(2\pi|x|)^{-1}\right), \nabla_x\left(\left(1-\chi_0^\varepsilon\right)Z\right)\right)_{\varpi_0}, \tag{58}$$

$$\varepsilon^2\Lambda^0|\theta|\partial_z w^0(0)\left(\chi_0^1(2\pi|x|)^{-1}, \left(1-\chi_0^\varepsilon\right)Z\right)_{\varpi_0} \tag{59}$$

и аналогичных выражений, локализованных около точки P_-.

Скалярные произведения (58) преобразуем с помощью формулы (53), получив при этом три слагаемых, которые естественным образом разойдутся по трем выражениям (56), (57). Слагаемые (57) в обновленном виде выглядят следующим образом:

$$\left(\left(\varepsilon V_{j0} - y\nabla_y u_j^0(0) - \varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\right)\nabla_x\chi_0^1, \nabla_x Z\right)_{\varpi_0}, \tag{60}$$

$$-\left(\nabla_x\left(\varepsilon V_{j0} - y\nabla_y u_j^0(0) - \varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\right), Z\nabla_x\chi_0^1\right)_{\varpi_0}. \tag{61}$$

Выражение (60) оценивается величиной $O(\varepsilon^{5/2})$ в силу неравенства Коши — Буняковского и оценки (46). Выражение (61) благодаря неравенству Харди не превосходит нормы

$$c\big\|(|x|+\varepsilon)\nabla_x\big(\varepsilon V_{j0}-y\nabla_y u_j^0(0)-\varepsilon^2\partial_z w^0(0)|\theta|(2\pi|x|)^{-1}\big);L^2\big(\operatorname{supp}\big|\nabla_x\chi_0^1\big|\big)\big\|,$$

которая, в свою очередь, оценивается величиной $C\varepsilon^3$. Проверка этого обстоятельства аналогична доказательству неравенства (47).

Обратимся теперь к слагаемому (56), которое выглядит так:

$$\begin{aligned}I=\varepsilon\big(\nabla_x V_{j0},\nabla_x\big(\chi_0^1 Z\big)\big)_{\varpi_0}-\big(\nabla_x\big(u_j^0(0)+y\nabla_y u_j^0(0)\big),\nabla_x\big(\big(1-\chi_0^\varepsilon\big)\chi_0^1 Z\big)\big)_{\varpi_0}\\ -\varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)\big(\nabla_x((2\pi|x|)^{-1}),\nabla_x\big(\big(1-\chi_0^\varepsilon\big)\chi_0^1 Z\big)\big)_{\varpi_0}\\ =\big(\varepsilon\partial_n V_{j0}-\big(1-\chi_0^\varepsilon\big)\partial_n\big(y\nabla_y u_j^0(0)+\varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\big),\chi_0^1 Z\big)_{\partial\varpi_0}\\ =\big(\big(1-\chi_0^\varepsilon\big)\partial_n\big(\varepsilon V_{j0}-y\nabla_y u_j^0(0)-\varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\big),\chi_0^1 Z\big)_{\partial\varpi_0}\\ +\big(\chi_0^\varepsilon\partial_n(\varepsilon V_{j0}),\chi_0^1 Z\big)_{\partial\varpi_0}=:I_1+I_2.\end{aligned}$$

Скалярное произведение I_1 оценим, используя неравенство Харди

$$\||x|^{-1/2}Z,L^2(\partial\varpi_0)\|\le C\|Z;\mathscr{H}^\varepsilon(\eta)\|$$

для следа функции Z на границе $\partial\varpi_0$:

$$\begin{aligned}I_1\le C\big\||x|^{1/2}\partial_n\big(\varepsilon V_{j0}-y\nabla_y u_j^0(0)-\varepsilon^2|\theta|\partial_z w^0(0)(2\pi|x|)^{-1}\big);\\ L^2\big(\partial\varpi_0\cap\operatorname{supp}\chi_0^1\big)\big\|\le C\varepsilon^3.\end{aligned}$$

Благодаря асимптотике функции V_{j0} на бесконечности и ввиду соотношения $\partial_n(|x|^{-1})=O(|x|^{-1})$ при $x\to O$ получаем, что I_1 не превосходит величины порядка ε^3. Оценку I_2 проведем после анализа скалярных произведений в $L^2(\Theta_\varepsilon)$.

В этой части доказательства остались нерассмотренными часть слагаемых из выражения $(\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda''(\eta))\big(\mathscr{U}_j^\varepsilon,Z\big)_{\varpi_0}$, а также слагаемое (59). Все они оцениваются надлежащим образом: либо согласно лемме 5, либо согласно оценкам из леммы 6.

Обратимся к интегралам по Θ_ε. Используя формулу (53), преобразуем скалярное произведение $\big(\nabla_x\mathscr{U}_j^\varepsilon,\nabla_x Z\big)_{\Theta_\varepsilon}$ в сумму выражений

$$\big(\nabla_x\big(w_j^0+\varepsilon w_j'\big),\nabla_x\big(\big(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_+^\varepsilon\big)Z\big)\big)_{\Theta_\varepsilon},\tag{62}$$

$$-\big(\big(w_j^0-w_j^0(0)-z\partial_z w_j^0(0)\big)\nabla_x\chi_0^\varepsilon,\nabla_x Z\big)_{\Theta_\varepsilon},\ \big(\nabla_x\big(w_j^0-w_j^0(0)-z\partial_z w_j^0(0)\big),Z\nabla_x\chi_0^\varepsilon\big)_{\Theta_\varepsilon},\tag{63}$$

$$-\varepsilon\big((w_j'-w_j'(0))\nabla_x\chi_0^\varepsilon,\nabla_x Z\big)_{\Theta_\varepsilon},\quad \varepsilon\big(\nabla_x\big(w_j'-w_j^0(0)\big),Z\nabla_x\chi_0^\varepsilon\big)_{\Theta_\varepsilon},\tag{64}$$

$$\varepsilon\big(\nabla_x V_{j0},\nabla_x\big(\chi_0^1 Z\big)\big)_{\Theta_\varepsilon}-\big(\nabla_x\big(w_j^0(0)+z\partial_z w_j^0(0)+\varepsilon A_j\big),\nabla_x\big(\big(1-\chi_0^\varepsilon\big)\chi_0^1 Z\big)\big)_{\Theta_\varepsilon},\tag{65}$$

$$\big(\big(\varepsilon V_{j0}-z\partial_z w_j^0(0)-\varepsilon A_j\big)\nabla_x\chi_0^1,\nabla_x Z\big)_{\Theta_\varepsilon},-\big(\nabla_x\big(\varepsilon V_{j0}-z\partial_z w_j^0(0)-\varepsilon A_j\big),Z\nabla_x\chi_0^1\big)_{\Theta_\varepsilon}\tag{66}$$

и выражений, аналогичных (63)–(66), но относящихся к точке P_+.

Интегральные тождества для функций w_j^0 и w_j' приводят к сокращению выражения (62) со слагаемым $\Lambda^0\big(w_j^0+\varepsilon w_j',\big(1-\chi_0^\varepsilon-\chi_+^\varepsilon\big)Z\big)_{\Theta_\varepsilon}$. Обработка скалярных произведений (63) и (64) аналогична соответствующим выкладкам из доказательства леммы 5. Выражения (66) допускают нужную оценку сверху благодаря неравенству (48). В выражении (65) второе слагаемое равно нулю, а первое после интегрирования по частям преобразуется в поверхностный интеграл $\big(\partial_n(\varepsilon V_{j0}), \chi_0^1 Z\big)_{\partial\Theta_\varepsilon}$, причем нормальная производная отлична от нуля лишь на носителе функции χ_0^ε. Оставшиеся интегралы по Θ_ε из выражения $\big(\Lambda^0 + \varepsilon^2\Lambda''(\eta)\big)\big(\mathscr{U}_j^\varepsilon, Z\big)_{\Theta_\varepsilon}$ оцениваются либо так же, как в лемме 6, либо при помощи неравенств из леммы 5.

Скалярное произведение градиентов по $\gamma_0(\varepsilon)$ проинтегрируем по частям и получим, что единственным оставшимся слагаемым оказывается поверхностный интеграл $\varepsilon\big(\chi_0^\varepsilon \partial_n V_{j0}, Z\big)_{\partial\varpi(\varepsilon)}$, который, очевидно, достаточно мал.

Слагаемые, относящиеся к точкам $P_\pm$, оцениваются аналогично с учетом того, что на функцию Z наложено условие квазипериодичности. $\square$

Полученные в следствии 1 и лемме 7 неравенства позволяют применять лемму 1 к функциям $\mathscr{W}_j = (\Lambda^0+1)^{-1/2}\mathscr{U}_j^\varepsilon(\cdot,\eta)$ при $j = k, \dots, k+m-1$ и $b_j = (1+\Lambda^0+\varepsilon^2\Lambda_j''(\eta))^{-1}$ в случае как различных величин b_j, так и частично совпадающих. При этом параметры a, τ и t приобретают следующие порядки: $a = O(\varepsilon)$, $\tau = O(\varepsilon^{5/2})$, $t = O(\varepsilon^{5/2})$.

В случае $\Lambda^0 \in \wp_\Upsilon \setminus \wp_\varpi$ подготовка данных к применению леммы 1 требует аналогичных, но значительно менее трудоемких выкладок, в частности, благодаря простоте собственных чисел предельной задачи (15) на интервале $\Upsilon = (0, L)$.

7. Теоремы об асимптотике и комментарии к ней

Сформулируем установленный результат, заметив, что поправочные члены для кратного собственного числа $\Lambda_n^0 \in \wp_\Upsilon \cap \wp_\varpi$ построены не были, однако были установлены оценки (29).

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $\varepsilon_n > 0$ и C_n, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ собственное число $\Lambda_n^\varepsilon(\eta)$ модельной задачи* (10)–(13) *на ячейке периодичности удовлетворяет неравенству* (29), *где Λ_n^0 — соответствующий член объединенной последовательности* (17) *собственных чисел предельных задач* (15) *и* (16). *Если $\Lambda_n^0 \in \wp_\varpi \setminus \wp_\Upsilon$ или $\Lambda_n^0 \in \wp_\Upsilon \setminus \wp_\varpi$, то соответственно верны асимптотические формулы*

$$\big|\Lambda_n^\varepsilon(\eta) - \Lambda_n^0 - \varepsilon^2\Lambda_n''(\eta)\big| \le C_n\varepsilon^{5/2} \text{ или } \big|\Lambda_n^\varepsilon(\eta) - \Lambda_n^0 - \varepsilon\Lambda_n' - \varepsilon^2\Lambda_n''(\eta)\big| \le C_n\varepsilon^{5/2}, \quad (67)$$

где Λ_n' и $\Lambda_n''(\eta)$ — асимптотические поправки, построенные в разд. 4 *и* 5, *а $\eta \in [0, 2\pi\ell^{-1})$ — параметр Флоке.*

Асимптотические формулы (67) позволяют определить положение спектральных сегментов (8) с длинами $O(\varepsilon^2)$ (в случае $\Lambda_n^0 \notin \wp_\varpi \cap \varpi_\Upsilon$; напоминаем также, что основная поправка Λ_n' не зависит от параметра Флоке η). Особенно элементарно выглядит выражение (39) для $\Lambda_k''(\eta)$ в случае простого собственного числа $\Lambda_n^0 \in \wp_\varpi \setminus \wp_\Upsilon$, например $\Lambda_1^0 = 0$.

Следствие 2. *Первый спектральный сегмент удовлетворяет соотношению*

$$B_1^\varepsilon = [0, 4\varepsilon^2 L^{-1}|\theta||\varpi| + C_1\varepsilon^{5/2}],$$

причем после него открыта лакуна шириной $\min\{\nu_2, \mu_1\} + O(\varepsilon^{1/2})$, где $\nu_2 > 0$ и $\mu_1 = \pi^2 L^{-2}$ — первые положительные собственные числа предельных задач (16) *и* (15). *Если $\nu_1 \ne \mu_1$, то последнюю бесконечно малую $O(\varepsilon^{1/2})$ можно заменить величинами $O(\varepsilon^2)$ или $O(\varepsilon)$ (ср.* (67) *и* (29)).

Пусть формы бусин (3) и сечения спицы (1) зафиксированы, но расстояние L между соседями можно изменять, образуя частые или редкие бусы. Теорема 2 показывает, что спектральные сегменты (8) имеют малые длины, и тем самым упомянутый в разд. 1 вопрос об образовании лакуны вокруг заданной точки $\lambda_\bullet \in (0, +\infty)$ решается просто, если только она не попадает на спектр предельной задачи (16) в области ϖ_0. Впрочем, и в случае $\lambda_\bullet \in \wp_\varpi$ может случиться, что $\lambda_\bullet$ лежит вне спектра (7) задачи (5), так как при отрицательных или положительных собственных числах $\Lambda''_k(\eta), \dots, \Lambda''_{k+m-1}(\eta)$ матрицы $\mathscr{A}_k(\eta)$ с элементами (40) спектральные сегменты $B^\varepsilon_k, \dots, B^\varepsilon_{k+m-1}$ смещаются вверх или вниз и не содержат точку $\lambda_\bullet$ при малом ε.

При проектировании волновых фильтров разумен вопрос, в определенном смысле противоположный основному вопросу инженерии чересполосного спектра (см. разд. 1), а именно требуется поместить точку $\lambda_\bullet$ на какой-то спектральный сегмент (в зону проходимости) и тем самым разрешить распространение волн на соответствующей частоте. Если $\lambda_\bullet \notin \wp_\varpi$, то ответ дается легко на основе формул из разд. 5, сделав расстояние L между бусинами равным $\pi j \lambda_\bullet^{-1/2} + O(\varepsilon)$. Если же $\lambda_\bullet \in \wp_\varpi$, то требуется более продвинутый анализ формул из разд. 4, включающий вычисление собственных чисел матрицы $\mathscr{A}_k(\eta)$ с элементами (40).

Отметим, что формы, изображенные на рис. 1, применяются в инженерии для создания опор, компенсирующих внешние колебательные воздействия (например, при фиксации больших зеркал телескопов). Впрочем, изучение спектральных свойств подобных опор требует постановки пространственной задачи теории упругости, что будет сделано в следующей публикации авторов на основе результатов [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khrabustovskyi A.* Periodic elliptic operators with asymptotically preassigned spectrum // Asymptotic Anal. 2013. V. 82, N 1–2. P. 1–37.
2. *Khrabustovskyi A., Khruslov E.* Gaps in the spectrum of the Neumann Laplacian generated by a system of periodically distributed traps // Math. Methods Appl. Sci. 2014. DOI: 10.1002/mma.3046.
3. *Арсеньев А. А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 3. С. 718–724.
4. *Beale J. T.* Scattering frequencies of resonators // Commun. Pure Appl. Math. 1973. V. 26, N 4. P. 549–563.
5. *Гадыльшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Мат. заметки. 1994. Т. 55, № 1. С. 20–34.
6. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multistructure // Asymptotic Anal. 1994. V. 8. P. 105–143.
7. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Вып. 20. С. 155–195.
8. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2004. Вып. 24. С. 95–214.
9. *Гадыльшин Р. Р.* О собственных значениях «гантели с тонкой ручкой» // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 2. С. 45–110.
10. *Назаров С. А.* Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 345–364.
11. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
12. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Л.: Наука, 1985. Т. 171. С. 2–122.

13. *Кучмент П. А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.

14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 10 сентября 2014 г.

Бахарев Федор Львович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 35, Петродворец, Санкт-Петербург 198504
fbakharev@yandex.ru

Назаров Сергей Александрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 35, Петродворец, Санкт-Петербург 198504;
Санкт-Петербургский политехнический университет,
Политехническая ул., 29, Санкт-петербург 195251;
Институт проблем машиноведения РАН,
В.О. Большой пр., 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk