Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 510.665

ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ LTK_r С ИНТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

А. Н. Лукьянчук, В. В. Рыбаков

Аннотация. Получены необходимое и достаточное условия допустимости правил вывода линейной многомодальной логики знания и времени LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени. Также построена специальная n-характеристическая модель для данной логики.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: многомодальная логика, временная логика, логика знания, n-характеристическая модель, допустимость правил вывода.

1. Введение

Интерес к изучению правил вывода для неклассических логик возрос с развитием компьютерных наук. Исследование искусственного интеллекта требует языка, приспособленного для описания различных динамических систем. Язык логик, сочетающих модальности знания и времени, отлично справляется с этой задачей (см. [1, 2]). Многомодальные логики, полученные в результате добавления операторов, выражающих знания и время, к классическому пропозициональному исчислению **CPC**, эффективны для моделирования ситуаций, в которых агенты, обладающие определенными знаниями, оперируют ими в процессах рассуждений и вычислений, использующих пошаговые стратегии, имитирующие время (см. [1, 3, 4]). Но изначально факты и утверждения описываются с помощью формул, которые не способны выразить изменяющиеся условия и предпосылки. На помощь приходит применение правил вывода и секвентов, которые реализуют логическое следование от условий к заключениям. Тем самым допустимые правила вывода предоставляют более тонкий и выразительный аппарат для моделирования мышления и вычислений.

Понятие допустимого правила вывода было впервые введено Лоренценом в 1955 г. (см. [5]). Для произвольной логики допустимыми являются те правила, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики. Было замечено, что можно усилить дедуктивную силу аксиоматической системы путем добавления допустимых, но не выводимых правил вывода (см. [6]). Впервые Фридман поставил вопрос о нахождении алгоритма распознавания допустимых правил вывода в интуиционистском пропозициональном исчислении [7]. Этот вопрос был решен В. В. Рыбаковым [8, 9] в 1984 г. В 1980-х гг. В. В. Рыбаков положительно решил проблему допустимости правил вывода в широком классе модальных и суперинтуиционистских логик, в частности, для $K4$, $S4$, H, Grz, GL и многих других (см. [10]).

Гиларди разработал другой алгоритм нахождения допустимых правил вывода, используя понятие унификации (см. [11]). Позже вопрос унификации и ее связи с допустимостью правил вывода был исследован для многих модальных и интуиционистских логик (см. [12–16]).

Однако изучение допустимых правил вывода многомодальных логик началось сравнительно недавно. Решение этого вопроса для некоторых многомодальных логик можно найти, например в [17, 18]. В данной статье исследуется вопрос разрешимости допустимости правил вывода в случае линейной логики знания и времени LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени (другие свойства данной логики описаны в [19]). Мы рассматриваем время как линейную дискретную последовательность состояний. Каждое временное состояние содержит в себе набор информационных узлов, связанных между собой бинарными отношениями R_i, имитирующими знания агентов. Предполагается, что поток временных состояний является линейным и дискретным, а агенты обмениваются между собой информацией синхронно. Каждый агент может различать рассматриваемое временное состояние и непосредственно следующее за ним.

Основными результатами статьи являются доказательство того, что LTK_r разрешима относительно допустимости правил вывода, и получение алгоритма, который по заданному правилу r определяет, допустимо ли r в логике LTK_r.

2. Определения и предварительные результаты

Приведем основные определения, обозначения и утверждения, используемые в статье.

Определение 2.1. *k-Модальный фрейм Крипке* — это кортеж $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_k\rangle$, где $W_{\mathscr{F}}$ — непустое множество элементов и каждое R_i — некоторое бинарное отношение, определенное на $W_{\mathscr{F}}$.

Определение 2.2. Дан фрейм Крипке $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_k\rangle$. Для любого R_i *R_i-сгусток* — это подмножество C множества $W_{\mathscr{F}}$ такое, что $\forall w\ \forall z \in C$ $(wR_iz \ \&\ zR_iw)$ и $\forall z \in W_{\mathscr{F}}\ \forall w \in C$ $((wR_iz \ \&\ zR_iw) \Rightarrow z \in C)$. Через $C(w)$ будем обозначать R_i-сгусток, порожденный элементом w, т. е. $w \in C$.

Определение 2.3. n-Модальный фрейм $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_n\rangle$ называется *открытым подфреймом* m-модального фрейма $\mathscr{S} = \langle W_{\mathscr{S}}, S_1, \dots, S_m\rangle$, если $n = m$, $W_{\mathscr{F}} \subseteq W_{\mathscr{S}}$, для любого отношения R_i выполняется $R_i \cap W_{\mathscr{S}}^2 = S_i$, а также $\forall a \in W_{\mathscr{S}}\ \forall b \in W_{\mathscr{F}}$ $(aR_ib \Rightarrow b \in W_{\mathscr{S}})$.

Определение 2.4. Отображение f фрейма $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_k\rangle$ на фрейм $\mathscr{S} = \langle W_{\mathscr{S}}, S_1, \dots, S_k\rangle$ называется *p-морфизмом*, если
(i) $\forall a, b \in W_{\mathscr{F}}$ $(aR_ib \Rightarrow f(a)S_if(b))$;
(ii) $\forall a, b \in W_{\mathscr{F}}$ $(f(a)S_if(b) \Rightarrow \exists c \in W_{\mathscr{F}}$ $(aR_ic$ и $f(c) = f(b)))$.

Определение 2.5. Даны фрейм Крипке $\mathscr{F}$ и множество пропозициональных переменных P. *Моделью $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$* на $\mathscr{F}$ называется кортеж $\mathscr{M}_{\mathscr{F}} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$, где V — означивание переменных из P на $\mathscr{F}$, т. е. $\forall p \in P$ $(V(p) \subseteq W_{\mathscr{F}})$. Через $\mathrm{Dom}(V)$ обозначим множество переменных, для которых определено V.

Зафиксируем пропозициональный модальный язык $\mathscr{L}$, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных P, стандартных булевых операций $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$, множества одноместных модальных операторов $\{\Box_i\ (1 \leq i \leq k)\}$ и вспомогательных символов (скобок).

Формулы языка $\mathscr{L}$ определяются индуктивно:

• переменные $\mathscr{L}$ являются элементарными формулами;

• если A и B — $\mathscr{L}$-формулы, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $\Box_i A$ также являются $\mathscr{L}$-формулами.

Означивание V модели $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V \rangle$ стандартным образом может быть расширено с множества пропозициональных переменных P на все множество формул, полученных с помощью переменных из P. В частности, для любого $w \in W_{\mathscr{F}}$

1) $(\mathscr{F}, w) \models_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$;

2) $(\mathscr{F}, w) \models_V \neg A \Leftrightarrow (\mathscr{F}, w) \not\models_V A)$;

3) $(\mathscr{F}, w) \models_V A \wedge B \Leftrightarrow (\mathscr{F}, w) \models_V A$ и $(\mathscr{F}, w) \models_V B$;

4) $(\mathscr{F}, w) \models_V A \vee B \Leftrightarrow (\mathscr{F}, w) \models_V A$ или $(\mathscr{F}, w) \models_V B$;

5) $(\mathscr{F}, w) \models_V A \to B \Leftrightarrow ((\mathscr{F}, w) \not\models_V A) \vee ((\mathscr{F}, w) \models_V B))$;

6) $(\mathscr{F}, w) \models_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in W_{\mathscr{F}} (wR_i z \Rightarrow (\mathscr{F}, z) \models_V A)$;

7) $(\mathscr{F}, w) \models_V \Diamond_i A \Leftrightarrow \exists z \in W_{\mathscr{F}} (wR_i z \Rightarrow (\mathscr{F}, z) \models_V A)$.

Истинность формулы A на элементе w в модели $\mathscr{M}$ определяем стандартно и обозначаем через $(\mathscr{F}, w) \models_V A$. Истинность A на каждом элементе модели $\mathscr{M}$ обозначаем через $\mathscr{F} \models_V A$. Если A истинна на фрейме $\mathscr{F}$ при любом означивании V, то используем обозначение $\mathscr{F} \models A$. Множество всех элементов модели, на которых истинна A, обозначаем через $V(A)$.

Множество формул языка $\mathscr{L}$, истинных на фреймах специального вида, будем называть *логикой*.

Определение 2.6. Модель $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V \rangle$ называется *адекватной* для логики L (*L-моделью*), если любая формула $\alpha \in L$ истинна на данной модели. Соответственно фрейм $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_1, \dots, R_n \rangle$ *адекватен* логике L, если для любой формулы $\alpha \in L$ выполняется $\mathscr{F} \models \alpha$.

Определение 2.7. Модель $\mathscr{M}_1 = \langle \mathscr{F}_1, V_1 \rangle$ называется *открытой подмоделью* модели $\mathscr{M}_2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2 \rangle$, если

1) $\mathscr{F}_1$ является открытым подфреймом $\mathscr{F}_2$,

2) $\mathrm{Dom}(V_1) = \mathrm{Dom}(V_2)$ и $\forall p \in \mathrm{Dom}(V_1)$ $(V_1(p) = V_2(p) \cap W_{\mathscr{F}_1})$.

Лемма 2.1 [10, гл. 2.5]. *Если $\mathscr{M}_1 = \langle \mathscr{F}_1, V_1 \rangle$ — открытая подмодель модели $\mathscr{M}_2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2 \rangle$, то*

$$\forall v \in W_{\mathscr{F}_1} [(\mathscr{F}_1, v) \models_{V_1} A \Leftrightarrow (\mathscr{F}_2, v) \models_{V_2} A].$$

Определение 2.8. Отображение f называется *p-морфизмом модели $\mathscr{M}_1 = \langle \mathscr{F}_1, V_1 \rangle$ на модель $\mathscr{M}_2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2 \rangle$*, если

(i) f является p-морфизмом фрейма $\mathscr{F}_1$ на фрейм $\mathscr{F}_2$;

(ii) $\mathrm{Dom}(V_1) = \mathrm{Dom}(V_2)$;

(iii) $\forall p \in \mathrm{Dom}(V_1)$ $\forall w \in W_{\mathscr{F}_1}$ $[(\mathscr{F}_1, w) \models_{V_1} p \Leftrightarrow (\mathscr{F}_2, f(w)) \models_{V_2} p]$.

При этом модель $\mathscr{M}_2$ является *p-морфным образом* модели $\mathscr{M}_1$.

Модели $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ будем называть *изоморфными*, если существует биективный p-морфизм $\mathscr{M}_1$ на $\mathscr{M}_2$.

Лемма 2.2 [10, гл. 2.5]. *Если f является p-морфизмом модели $\mathscr{M}_1 = \langle \mathscr{F}_1, V_1 \rangle$ на модель $\mathscr{M}_2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2 \rangle$, то для любой формулы A, зависящей от переменных из $\mathrm{Dom}(V_1)$, выполняется*

$$\forall a \in W_{\mathscr{F}_1} [(\mathscr{F}_1, a) \models_{V_1} A \Leftrightarrow (\mathscr{F}_2, f(a)) \models_{V_2} A].$$

Определение 2.9. Элемент w модели $\langle \mathscr{F}, V\rangle$ называют *формульным*, если существует формула $\beta(w)$ такая, что $\forall z \in \mathscr{F}$ $((\mathscr{F}, z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z)$.

Определение 2.10. Для модели $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$, где $\mathrm{Dom}(V) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, новое означивание V_1 пропозициональных переменных $q_1, \ldots, q_m$ на $\mathscr{F}$ называют *формульным*, если для любой q_i выполняется $V_1(q_i) = V(\phi_i)$ для некоторой формулы $\phi_i = \phi_i(p_1, \ldots, p_n)$.

Определение 2.11. Модель Крипке $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^{W_{\mathscr{F}}}$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называют *$n$-характеристической для логики L*, если для любой формулы $A(p_1, \ldots, p_n)$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$ выполняется $A \in L \Leftrightarrow \mathscr{F} \models_V A$.

Определение 2.12. *Правило вывода* r — это выражение вида

$$r := \frac{\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)}{\phi(x_1, \ldots, x_m)},$$

где $\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m)$ и $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ — формулы, построенные с использованием переменных $x_1, \ldots, x_m$. Будем использовать запись $x_i \in \mathrm{Var}(r)$, если x_i является переменной правила r.

Определение 2.13. Правило r *истинно* на модели $\langle \mathscr{F}, V\rangle$ (обозначаем через $\mathscr{F} \models_V r$), если

$$\forall a \in \mathscr{F}\Big[(\mathscr{F}, a) \models_V \bigwedge_{1\le i\le n} \varphi_i \Rightarrow (\mathscr{F}, a) \models_V \phi\Big].$$

Определение 2.14. *Подстановка* Σ — это замена каждой переменной $x_i \in \mathrm{Var}(r)$ формулой α_i. Для формулы A обозначим через $\Sigma(A)$ результат применения подстановки Σ к A.

Определение 2.15. Правило вывода $r := \varphi_1, \ldots, \varphi_n/\phi$ называют *допустимым* в логике L тогда и только тогда, когда для любой подстановки Σ, если $\Sigma(\varphi_i) \in L$ для каждого i, то $\Sigma(\phi) \in L$.

Лемма 2.3 [10, гл. 3.3]. *Правило вывода r недопустимо в логике L тогда и только тогда, когда для любой последовательности k-характеристических моделей найдутся номер n и n-характеристическая модель $\mathscr{M} = \langle \mathscr{F}, V\rangle$ из этой последовательности такая, что r опровергается на $\mathscr{F}$ при некотором формульном означивании.*

3. Семантика LTK_r

Язык $\mathscr{L}^{LTK}$ состоит из счетного множества пропозициональных переменных $P := \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, стандартных булевых операций $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ и множества унарных модальных операторов $\{\Box_T, \Box_\sim, \Box_i\ (1 \le i \le k)\}$. *Правильно построенная формула* (ППФ) определяется стандартным образом, в частности, если A — ППФ, то $\Box_T A, \Box_\sim A, \Box_i A$ $(1 \le i \le k)$ также ППФ. Обозначим через $\mathrm{Fma}(\mathscr{L}^{LTK})$ множество всех ППФ языка $\mathscr{L}^{LTK}$ (далее в тексте под *формулой* будем понимать формулу из множества $\mathrm{Fma}(\mathscr{L}^{LTK})$). Введенные модальные операторы будем интерпретировать следующим образом: (a) $\Box_T A$ в логике LTK_r означает, что информация A истинна в рассматриваемый момент и будет истинна в следующий; (b) $\Box_\sim A$ означает, что A истинна в рассматриваемый момент времени; (c) $\Box_i A$ означает, что информация A истинна во всех информационных точках, доступных агенту i. Семантика для языка $\mathscr{L}^{LTK}$ моделирует, например, линейный и дискретный поток вычислительного процесса, в котором каждый момент времени ассоциируется с натуральным числом n.

Определение 3.1. LTK_r-*фрейм* — это многомодальный фрейм $\mathscr{F} = \langle W_{\mathscr{F}}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$, где

(a) $W_{\mathscr{F}}$ — объединение непустых множеств C_n: $W_{\mathscr{F}} := \bigcup_{n \in J} C_n$, где $J = [0, L]$, $L \in N$, или $J = N$ (N — множество натуральных чисел);

(b) R_T — линейное, интранзитивное на сгустках, рефлексивное бинарное отношение на $W_{\mathscr{F}}$:

$$\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}} (w R_T z \Leftrightarrow [\exists n \in J((w \in C_n)\&(z \in C_n)) \vee ((w \in C_n)\&(z \in C_{n+1}))]);$$

(c) $R_\sim$ — универсальное $S5$-отношение на любом $C_n \in W_{\mathscr{F}}$:

$$\forall w \forall z \in W_{\mathscr{F}} (w R_\sim z \Leftrightarrow \exists n \in J((w \in C_n)\&(z \in C_n)));$$

(d) R_i — некоторое отношение эквивалентности внутри любого сгустка C_n.

Класс всех таких фреймов обозначим через LTK_r.

Такие фреймы моделируют ситуацию, в которой каждый агент располагает информацией в каждый из временных состояний. Любое временное состояние (R_T-сгусток) C_n состоит из множества информационных точек, доступных в момент n. Отношение R_T – это соединение в линейный поток таких информационных точек. Для двух точек w и z выражение $w R_T z$ означает, что либо w и z доступны в момент n, либо z будет доступна в следующий момент по отношению к w. Так как отношение $R_\sim$ связывает все информационные точки, потенциально доступные в один и тот же момент, $R_\sim$ представляет собой знание, потенциально доступное всем агентам в рассматриваемом временном состоянии. Отношение R_i определяет, какая информация доступна агенту i.

Кроме того, отношения на LTK_r-фрейме обладают следующими свойствами:

PM.1: $v R_\sim z \Rightarrow (v R_T z \ \& \ z R_T v)$;
PM.2: $v R_i z \Rightarrow v R_\sim z$;
PM.3: $(v R_T z \ \& \ z R_T v) \Rightarrow v R_\sim z$;
PM.4: $(v R_T z \ \& \ z R_\sim y) \vee (v R_\sim z \ \& \ z R_T y) \Rightarrow v R_T y$.
В частности, имеем совпадение R_T- и $R_\sim$-сгустков линейной цепи.

Определение 3.2. Для двух R_T-сгустков C_m и C_j запись $C_m R_T C_j$ означает, что $\forall w \in C_m \, \forall z \in C_j \ (w R_T z)$. При этом C_m является R_T-*предшественником* сгустка C_j, а C_j — R_T-*последователем* сгустка C_m.

Определение 3.3. LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, где $W_{\mathscr{F}} = C_1(z) R_T C_2 R_T \dots R_T C_n$, будем называть *возрастающей цепью* сгустков. При этом LTK_r-цепи могут быть как конечные, так и бесконечные. Множество всех элементов $W_{\mathscr{F}}$ будем обозначать через $z^{\leq}$.

Определение 3.4. Элемент z LTK_r-фрейма $\mathscr{F}$ *имеет глубину* m, если m — максимальный номер сгустка в конечной возрастающей цепи $z^{\leq} = C_1(z) R_T C_2 R_T \dots R_T C_m$, причем для любого $z \in C_m$ если имеет место $z R_T w$, то $w \in C_m$ (т. е. C_m — финальный сгусток фрейма $\mathscr{F}$).

Определение 3.5. Говорим, что элемент z *достижим из элемента* w *ровно через* m *«шагов» по отношению* R_T, если найдутся сгустки $C_1, C_2, \dots, C_m$ такие, что $C(w)R_T C_1 R_T C_2 R_T \dots R_T C_m$ и $z \in C_m$.

Определение 3.6. *Логика* LTK_r — это множество всех LTK_r-истинных формул: $LTK_r := \{A \in \mathrm{Fma}(\mathscr{L}^{LTK}) \mid \forall \mathscr{F} \in LTK_r(\mathscr{F} \models A)\}$. Если A принадлежит LTK_r, то говорим, что A — *теорема* LTK_r.

Определение 3.7. Пусть A — формула в языке логики LTK_r. *Модальная временная степень* $\mathrm{td}(A)$ *формулы* A определяется следующим образом: $\mathrm{td}(p) = \mathrm{td}(\top) = \mathrm{td}(\bot) = 0$; $\mathrm{td}(\neg\alpha) = \mathrm{td}(\alpha)$; $\mathrm{td}(\alpha \to \beta) = \mathrm{td}(\alpha \vee \beta) = \mathrm{td}(\alpha \wedge \beta) = \max(\mathrm{td}(\alpha), \mathrm{td}(\beta))$; $\mathrm{td}(\Box_\sim \alpha) = \mathrm{td}(\Box_i \alpha) = \mathrm{td}(\alpha)$; $\mathrm{td}(\Box_T \alpha) = \mathrm{td}(\alpha) + 1$.

Будем говорить, что в языке модальной логики LTK_r правило вывода r есть правило в *редуцированной нормальной форме*, если оно имеет вид $r := \epsilon_r / x_1$, где

$$\epsilon_r := \bigvee_{1 \le j \le s} \theta_j,$$

$$\theta_j := \Big(\bigwedge_{1 \le i \le m} \Big[x_i^{d(j,i,1)} \wedge (\Diamond_T x_i)^{d(j,i,2)} \wedge (\Diamond_\sim x_i)^{d(j,i,3)} \wedge \bigwedge_{1 \le l \le k} (\Diamond_l x_i)^{d(j,i,l,4)} \Big] \Big),$$

$d(j,i,z), d(j,i,l,z) \in \{0,1\}$ и для любой формулы α имеет место $\alpha^0 := \alpha$, $\alpha^1 := \neg\alpha$. Через $\mathrm{Pr}(r)$ будем обозначать множество дизъюнктов посылки $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ правила r, а через $\mathrm{Con}(r)$ — заключение x_1.

Правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме является *редуцированной нормальной формой правила* r тогда и только тогда, когда $\mathscr{F} \models r \Leftrightarrow \mathscr{F} \models r_{nf}$ для любого фрейма $\mathscr{F}$.

Используя следствия 3.1.13 и 3.1.15 из [10], получаем следующее утверждение

Теорема 3.1. *Существует алгоритм, который для любого заданного правила вывода* r *в языке модальной логики* LTK_r *позволяет построить подходящее правило вывода* r_{nf} *в редуцированной форме, эквивалентное относительно допустимости правилу* r *(т. е.* r_{nf} *допустимо в* LTK_r *тогда и только тогда, когда* r *допустимо в* LTK_r*).*

4. Построение $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$

В этом разделе представлена схема построения специальной n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$ для логики LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени.

Шаг 1. Возьмем класс F конечных LTK_r-фреймов таких, что $\forall \mathscr{F} \in F\ \forall w\ \forall z \in W_{\mathscr{F}}\ (wR_T z\ \&\ zR_T w)$. Обозначим через $\mathscr{C}(F)_n$ класс всех различных не изоморфных друг другу моделей $C := \langle \mathscr{F}, V \rangle$, где

(1) $\mathscr{F} \in F$;

(2) $\mathrm{Dom}(V) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Определим $S_1(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)) := \bigsqcup_{\mathscr{C}(F)} C_n$, т. е. первый слой $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$ состоит из множества конечных R_T-сгустков со всевозможными означиваниями переменных $p_1, \dots, p_n$, которые не изоморфны друг другу как модели.

Шаг 2. К каждому R_T-сгустку C из $S_1(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$ приписываем сгустки C_j из $\mathscr{C}(F)_n$ в качестве непосредственных R_T-предшественников (т. е. $C_j R_T C$)

при условии, что сгусток C_j не изоморфен как модель C. Результатом такого построения станет модель $S_{\leq 2}(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$.

Шаг 3. К каждому R_T-сгустку C из $S_2(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$ приписываем каждый сгусток C_j из $\mathscr{C}(F)_n$ в качестве непосредственных R_T-предшественников. Получим модель $S_{\leq 3}(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$.

Шаг $i+1$. Предположим, что модель $S_{\leq i}(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$ для $i \geq 2$ построена так, что любой ее открытый подфрейм — это LTK_r-фрейм. Модель $S_{\leq i+1}(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$ строим следующим образом. К каждому R_T-сгустку C глубины i добавляем в качестве непосредственных R_T-предшественников всевозможные сгустки из $(F)_n$. В итоге $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n) := \langle W_{\mathrm{Ch}_{LTK_r}}, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k, V\rangle := \bigcup\limits_{i\in N} S_{\leq i}(\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n))$. Обозначим фрейм модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$ через $\mathrm{Ch}(n)$.

Лемма 4.1. *Модель* $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n) = \langle \mathrm{Ch}(n), V\rangle$ n*-характеристическая для логики* LTK_r.

Доказательство. Пусть A — произвольная формула логики LTK_r, зависящая от пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$, причем $\mathrm{td}(A) = r$, $r \geq 0$. По определению логики A истинна на всех элементах фреймов, адекватных логике LTK_r при любом означивании. Каждый открытый подфрейм фрейма $\mathrm{Ch}(n)$ по построению является LTK_r-фреймом, тогда $\mathrm{Ch}(n) \models_V A$.

Предположим, что $A \notin LTK_r$. Построим модель, на которой опровергается A и которая будет изоморфна некоторой открытой подмодели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$.

Так как $A \notin LTK_r$, существует конечная модель $M^1 := \langle \mathscr{F}_{r+1}, V_1\rangle$ длины $r+1$ такая, что $(\mathscr{F}_{r+1}, w) \not\models_{V_1} A$, причем $W_{\mathscr{F}_{r+1}} = C_1^1(w) R_T C_2^1 R_T \ldots R_T C_{r+1}^1$ (см. [19]).

Если сгусток C_{r+1}^1 и непосредственный его R_T-предшественник C_r^1 модели M^1 не изоморфны как модели, то M^1 является открытой подмоделью $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$. Следовательно, по лемме 2.1 выполняется $\mathrm{Ch}(n) \not\models_V A$.

Пусть сгустки $C_r^1, C_{r-1}^1, \ldots, C_{r-t}^1$ $(0 \leq t \leq r)$ модели M^1 изоморфны сгустку C_{r+1}^1, а C_{r-t-1}^1 нет.

Рассмотрим модель $M^2 = \langle \mathscr{F}_2, V_2\rangle$, где

a) $W_{\mathscr{F}_2} = C_1^2 R_T C_2^2 R_T \ldots R_T C_{r-t}^2$, причем $C_j^2 = C_j^1$ $(1 \leq j \leq r-t)$;

b) $\mathrm{Dom}(V_1) = \mathrm{Dom}(V_2)$ и $\forall p \in \mathrm{Dom}(V_2)$ $(V_2(p) = V_1(p) \cap W_{\mathscr{F}_2})$.

Определим p-морфизм f фрейма $\mathscr{F}_{r+1}$ на фрейм $\mathscr{F}_2$:

$$f : \begin{cases} C_j^1 \longrightarrow C_j^2, & 1 \leq j \leq r-t, \\ C_j^1 \longrightarrow C_{r-t}^2, & r-t+1 \leq j \leq r+1. \end{cases}$$

Очевидно, что M^2 является p-морфным образом модели M^1. Тогда по лемме 2.2 выполняется $(\mathscr{F}_2, w) \not\models_{V_2} A$. Сгустки C_{r-t-1}^2 и C_{r-t}^2 не изоморфны друг другу как модели, следовательно, M_2 является открытой подмоделью n-характеристической модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$, и по лемме 2.1 $\mathrm{Ch}(n) \not\models_V A$. □

Лемма 4.2. *Элементы модели* $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$ *не формульные.*

Доказательство. Напомним, что элемент w модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n) = \langle \mathrm{Ch}(n), V\rangle$ формульный тогда и только тогда, когда существует формула $\beta(w)$ такая, что $w \models_V \beta(w)$ и $\forall z \in W_{\mathrm{Ch}(n)}$ $((\mathrm{Ch}(n), z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z)$.

Возьмем произвольный элемент w глубины k модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$, т. е. w принадлежит открытой подмодели $\mathscr{K} = \{K_1(w) R_T K_2 R_T \ldots R_T K_k\} \subset \mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$. Предположим, что w формульный, т. е. существует формула $\beta(w)$ временной модальной степени k такая, что $(\mathrm{Ch}(n), w) \models_V \beta(w)$ и $\forall z \in W_{\mathrm{Ch}(n)}$ $((\mathrm{Ch}(n), z) \models_V \beta(w) \Leftrightarrow w = z)$.

Рассмотрим элемент z глубины $l > k$ и открытую подмодель

$$\mathscr{N} = \{N_1(z) R_T N_2 R_T \dots R_T N_l\} \subset \mathrm{Ch}_{LTK_r}(n),$$

порожденную этим элементом, такие, что $\mathscr{K} \cap \mathscr{N} = \varnothing$ и K_i изоморфен N_i для всех $(1 \le i \le k)$. Так как истинность формул временной модальной степени k на элементе z зависит только от означивания переменных на модели $\{N_1(z) R_T N_2 R_T \dots R_T N_k\}$ (см. [19]), индукцией по длине формулы легко показать, что на z также будет истинна формула $\beta(w)$, при этом $z \neq w$. Таким образом, элементы модели $\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n)$ не формульные. $\square$

5. Разрешимость по допустимости

Определим специальный многомодальный фрейм Крипке, который будет играть центральную роль в доказательстве основного результата.

Рассмотрим LTK_r-фреймы $\mathscr{F}_P$, $\mathscr{F}_S$, $\mathscr{F}_i$ со следующими свойствами.

(a) $\mathscr{F}_P = \langle W_{\mathscr{F}_P}, R_T^P, R_\sim^P, R_1^P, \dots, R_k^P \rangle$, где $W_{\mathscr{F}_P}$ состоит только из одной точки @, т. е. $W_{\mathscr{F}_P} := \{@\}$, и все бинарные отношения являются отношениями эквивалентности.

(b) $\mathscr{F}_S = \langle W_{\mathscr{F}_S}, R_T^S, R_\sim^S, R_1^S, \dots, R_k^S \rangle$ — конечный LTK_r-фрейм. Пусть $C_0, \dots, C_d$ — перечисление всех $R_\sim^S$-сгустков элементов из $W_{\mathscr{F}_S}$. Тогда $W_{\mathscr{F}_S} = \left\{ \bigcup\limits_{i=0}^{d} C_i \right\}$ и $C_0 R_T C_1 R_T \dots R_T C_d$. Все бинарные отношения являются стандартными отношениями LTK_r-фрейма.

(c) $\mathscr{F}_i = \langle W_{\mathscr{F}_i}, R_T^i, R_\sim^i, R_1^i, \dots, R_k^i \rangle$ — конечный LTK_r-фрейм, где $W_{\mathscr{F}_i} = \{w_1^i, \dots, w_{J_i}^i\}$, $w_1^i R_T^i w_2^i R_T^i \dots R_T^i w_{J_i}^i$ и $\forall w_j^i, w_m^i$ $(m \neq j)$: $\neg(w_j^i R_\sim^i w_m^i)$. Другими словами, все $R_\sim^i$-сгустки фрейма $\mathscr{F}_i$ вырожденные (т. е. состоят из одного элемента). Бинарные отношения также стандартны для LTK_r-фрейма.

Определение 5.1. *SP-фрейм* — это кортеж $\mathscr{F}_{SP} = \langle W_{SP}, R_T^{SP}, R_\sim^{SP}, R_1^{SP}, \dots, R_k^{SP} \rangle$, где

1) $W_{SP} = W_{\mathscr{F}_P} \cup W_{\mathscr{F}_S} \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} W_{\mathscr{F}_i}$;

2) $R_T^{SP} = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \mid \forall z \in C_d\} \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} \{\langle w_{J_i}^i, z\rangle \mid w_{J_i}^i$ — R_T-максимальный элемент $\mathscr{F}_i$ $\forall z \in C_i \subseteq \mathscr{F}_S\}$;

3) $R_\sim^{SP} = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_\sim^i$;

4) $R_j^{SP} = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_j^i$ $(1 \le j \le k)$.

Таким образом, SP-фрейм состоит из цепей собственных и вырожденных $R_\sim$-сгустков и адекватен логике LTK_r.

Лемма 5.1 (Необходимое условие допустимости правил вывода в логике LTK_r). *Если правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме недопустимо в логике LTK_r, то существует конечная SP-модель $\mathscr{M}_{SP} = \langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$, размер которой ограничен размером r_{nf}, такая, что*

(1) $\mathscr{F}_{SP} \not\models_V \mathrm{Con}(r_{nf})$;

(2) $\mathscr{F}_{SP} \models_V \mathrm{Pr}(r_{nf})$;

(3) *для некоторого дизъюнкта* $\theta_a \in \mathrm{Pr}(r_{nf})$ *при любом* i $(0 \leq i \leq d)$ *выполняется*

$$\big(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\big) \models_V \theta_a, \quad \big(\mathscr{F}_{SP}, w_2^i\big) \models_V \theta_a, \quad (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a;$$

(4) *для любых* $z, w \in C_i$ *таких, что* $((\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \theta_k \& (\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_m)$, *выполняется* $\theta_k \neq \theta_m$;

(5) *сгусток* C_d *не изоморфен как модель элементу* @.

Доказательство. Рассмотрим правило вывода r_{nf} в редуцированной нормальной форме:

$$r_{nf} := \epsilon_{r_{nf}}/x_1, \quad \epsilon_{r_{nf}} := \bigvee_{1 \leq j \leq s} \theta_j,$$

где $\mathrm{Var}(r_{nf}) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Пусть r_{nf} недопустимо в логике LTK_r. Тогда существует подстановка $\Sigma : x_i \to \alpha_i$, при которой каждая переменная $x_i \in \mathrm{Var}(r_{nf})$ заменяется формулой α_i, зависящей от некоторого набора пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_n$. При этом посылка правила $\bigvee_{1 \leq j \leq s} \Sigma(\theta_j)$ является теоремой LTK_r, а заключение $\Sigma(x_1) = \alpha_1$ не является теоремой LTK_r. Положим $\max\big\{\mathrm{td}\big(\bigvee_{1 \leq j \leq s} \Sigma(\theta_j)\big)\big\} = f$ и $\mathrm{td}(\alpha_1) = p$.

Так как α_1 не является теоремой, существуют LTK_r-фрейм $\mathscr{F}$, где $W_{\mathscr{F}} = \bigcup_{i=0}^{p} C_i$, и означивание S_1 такие, что $(\mathscr{F}, x) \not\models_{S_1} \alpha_1$ (см. [19]).

Рассмотрим модель $\langle \mathscr{F}_{SP}, S \rangle$, где

1) $W_{SP} = \bigcup\limits_{i=0}^{p} C_i \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p} \bigcup\limits_{j=1}^{f+2} w_j^i \cup @$;

2) $R_T^{SP} = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p} R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle | z \in C_p\} \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p} \big\{\big\langle w_{f+2}^i, z\big\rangle \mid z \in C_i\big\}$;

3) $R_\sim^{SP} = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p} R_\sim^i$;

4) $R_j^{SP} = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{p} R_j^i$ $(1 \leq j \leq k)$;

5) означивание S пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_n$, входящих в α_i, положим следующим: $S(p_i) = S_1(p_i)$ на сгустках $C_0, \dots, C_p$ и $p_1 = \dots = p_n = T$ на элементах w_j^i и @.

Так как временная степень любой подформулы $\bigvee_{1 \leq j \leq s} \Sigma(\theta_j)$ не превосходит f и отношение R_T рефлексивно, легко проверить, что при таком означивании выполняется

$$\forall \alpha_j \forall i \in \{0, \dots, p\}\big[\big(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\big) \models_S \alpha_j \Leftrightarrow \big(\mathscr{F}_{SP}, w_2^i\big) \models_S \alpha_j \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_S \alpha_j\big]. \tag{1}$$

Определим означивание переменных $x_i \in \mathrm{Var}(r_{nf})$ на фрейме $\mathscr{F}_{SP}$ следующим образом: $V(x_i) := S(\alpha_i)$. Так как $\bigvee_{1 \leq j \leq s} \Sigma(\theta_j) \in LTK_r$, формула $\bigvee_{1 \leq j \leq s} \Sigma(\theta_j)$ истинна на модели $\langle \mathscr{F}_{SP}, S \rangle$. Тогда

$$\forall x \in W_{\mathscr{F}_{SP}} \Big((\mathscr{F}_{SP}, x) \models_V \bigvee_{1 \leq j \leq s} \theta_j\Big), \tag{2}$$

т. е. на $\langle \mathscr{F}_{SP}, V \rangle$ выполняется п. (2) леммы 5.1. В силу (1) и (2) для некоторого дизъюнкта $\theta_a \in \mathrm{Pr}(r_{nf})$ имеет место

$$\forall i \in \{0, \dots, p\}\big[\big(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\big) \models_V \theta_a, \big(\mathscr{F}_{SP}, w_2^i\big) \models_V \theta_a, (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a\big].$$

Следовательно, на $\langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$ выполняется п. (3) леммы 5.1. Отметим также, что в силу выбора означивания S выполняется

$$\exists x \in C_0((\mathscr{F}_{SP}, x) \not\models_S \alpha_1), \quad (\mathscr{F}_{SP}, x) \not\models_V x_1.$$

Таким образом, п. (1) леммы 5.1 выполнен на модели $\langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$.

Далее ограничим размер $\mathscr{F}_{SP}$ размером правила r_{nf}. Для этого на каждом R^{SP}_T-сгустке $C_0, \dots, C_p$ применим стандартную технику $S5$-фильтрации. Также на каждой цепи $\mathscr{F}_{SP}$ применим технику прореживания drop-point, которая ограничит длины цепей в соответствии правилу r_{nf}.

Этап 1. Рассмотрим цепь $[C_0, \dots, C_p, @]$. Сначала ограничим мощность $R^{SP}_\sim$-сгустков размером правила r_{nf}. Для этого воспользуемся стандартной техникой $S5$-фильтрации. Имеем (символ $\exists^1$ означает *существует единственный*)

$$(\forall a \in \mathscr{F}_{SP} \exists^1 \theta_{j_a})[(\mathscr{F}_{SP}, a) \models_V \theta_{j_a}] \quad \text{и} \quad (\exists x \in \mathscr{F}_{SP})[(\mathscr{F}_{SP}, x) \models_V \neg x_1].$$

Для любого сгустка $C_i \in [C_0, \dots, C_p]$ и любых элементов $a, b \in C_i$ определим отношение

$$a \equiv b \Leftrightarrow \theta_{j_a} = \theta_{j_b}.$$

Такое отношение является отношением эквивалентности, заданным на каждом C_i. Для любого $a \in C_i \subseteq [C_0, \dots, C_p]$ через $[a]_\equiv$ обозначим класс всех элементов из C_i, эквивалентных a.

Рассмотрим фильтрованную модель $\mathscr{M}_{SP_\equiv} := \langle \mathscr{F}_{SP_\equiv}, V\rangle$, где

$$W_{\mathscr{F}_{SP_\equiv}} = \left\{ \bigcup_{i=0}^{p} \bigcup_{j=1}^{f+2} w^i_j \cup [C_0]_\equiv \cup, \dots, \cup [C_p]_\equiv \cup @ \right\},$$

$$[a]_\equiv R^{SP}_j [b]_\equiv \Leftrightarrow \exists i(a, b \in C_i) \wedge \forall x_i \in \mathrm{Var}(r_{nf}) \\ [(\mathscr{F}_{SP}, a) \models_V \Box_j x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, b) \models_V \Box_j x_i],$$

$$[a]_\equiv R^{SP}_\sim [b]_\equiv \Leftrightarrow a R^{SP}_\sim b, \quad [a]_\equiv R^{SP}_T [b]_\equiv \Leftrightarrow a R^{SP}_T b,$$
$$\forall x_i \in \mathrm{Var}(r_{nf})(V(x_i) := \{[a]_\equiv \mid (\mathscr{F}_{SP}, a) \models_V x_i\}).$$

Модель $M_{SP_\equiv}$ получена в результате использования стандартного метода $S5$-фильтрации (более подробное определение метода можно найти, например, в [10, гл. 2.6], поэтому верно

$$\forall a \in [C_0, \dots, C_p]((\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \theta_{j_a}).$$

Из вышеизложенного следует, что на модели $\mathscr{M}_{SP_\equiv}$ выполняются условия (1)–(4) леммы 5.1, при этом размер $R^{SP}_\sim$-сгустков $[C_i]_\equiv$ ограничен размером правила r_{nf}: мощность каждого сгустка не превышает s, где s — количество дизъюнктов посылки r_{nf}.

Теперь ограничим длину цепи $[[C_0]_\equiv, \dots, [C_p]_\equiv, @]$ в соответствии с размером r_{nf}. Для этого применим стандартную технику прореживания сгустков drop-point. Для удобства переобозначим элемент @ через $[C_{p+1}]_\equiv$. Для каждого $[C_i]_\equiv$ рассмотрим структуру (пару) $\mathscr{M}(i) := \big\langle [C_i]_\equiv, \bigcup\limits_{[a]_\equiv \in [C_i]_\equiv} \theta([a]_\equiv)\big\rangle$, где $0 \le i \le p+1$. Если $\mathscr{M}(i_1) = \mathscr{M}(i_2)$, это значит, что $[C_{i_1}]$ и $[C_{i_2}]$ изоморфны как модели, т. е. существует взаимно однозначное отображение g такое, что $\forall [a]_\equiv \in [C_{i_1}]_\equiv \ \exists^1 [b]_\equiv \in [C_{i_2}]_\equiv \ (\theta([a]_\equiv) = \theta([b]_\equiv) \ \& \ [b]_\equiv = g([a]_\equiv))$.

Возьмем R^{SP}_T-минимальный сгусток $[C_0]_\equiv$, который образует пару $\mathscr{M}(0) := \big\langle [C_0]_\equiv, \bigcup\limits_{[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv} \theta([a]_\equiv)\big\rangle$. Выберем наибольший номер $j_0 \in \{1, \dots, p+1\}$ такой, что $\mathscr{M}(0) = \mathscr{M}(j_0)$, если таковой имеется. Удалим все $R^{SP}_\sim$-сгустки из интервала $[[C_1]_\equiv, \dots, [C_{j_0}]_\equiv]$, получим цепь $[[C_0]_\equiv, [C_{j_0+1}]_\equiv, \dots, [C_p]_\equiv, [C_{p+1}]_\equiv]$ с прежним означиванием V переменных x_i. Очевидно, что при таком прореживании истинность формул на элементах сгустка $[C_0]_\equiv$ не изменилась. Предположим, что на элементе $[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv$ истинна формула $\Diamond_T x_j$. Тогда (a) $\exists [c]_\equiv \in [C_0]_\equiv$ $((\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j)$ или (b) $\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0+1}]_\equiv$ $((\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j)$.

Так как $\mathscr{M}(0) = \mathscr{M}(j_0)$, на некотором элементе $[b]_\equiv \in [C_{j_0}]_\equiv$ также была истинна формула $\Diamond_T x_j$ и выполнялось (a$'$) $\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0}]_\equiv$ $((\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j)$ или (b$'$) $\exists [c]_\equiv \in [C_{j_0+1}]_\equiv$ $((\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [c]_\equiv) \models_V x_j)$.

Если выполнялось (a), то процедура прореживания не изменила истинности формулы $\Diamond_T x_j$ на элементе $[a]_\equiv \in [C_0]_\equiv$ и $(\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \Diamond_T x_j$. Если же (a) и (a$'$) не выполнялись, то $(\mathscr{F}_{SP_\equiv}, [a]_\equiv) \models_V \Diamond_T x_j$ в силу (b$'$).

Далее продолжаем описанную процедуру для всех последующих сгустков рассматриваемой цепи, перенумеровав при этом сгустки $[C_{j_0+i}]_\equiv$ и представив их в виде $[C_{i+1}]_\equiv$ $(i \in \{0, \dots, p - j_0 + 1\})$.

В конечном итоге получим цепь сгустков, длина которой равна некоторому числу $d+2$ и ограничена размером правила r_{nf}. Обозначим сгустки $[C_i]_\equiv$ $(0 \le i \le d)$, обратно, через C_i, а $[C_{d+1}]_\equiv$ — через @.

Так как на каждом сгустке $C_i \in [C_0, \dots, C_d, @]$ истин единственный набор дизъюнктов $\bigcup\limits_{[a]_\equiv \in C_i} \theta([a]_\equiv)$ посылки r_{nf}, сгусток C_i не изоморфен как модель сгустку C_{i+1} $(0 \le i \le d)$. В частности, сгусток C_d не изоморфен как модель элементу @, и на модели $\langle \mathscr{F}_{SP_\equiv}, V\rangle$ выполняется условие (5) леммы 5.1.

Этап 2. Напомним, что $R^{SP}_\sim$-сгустки $C(w^i_j) = w^i_j$ одноэлементны. Обозначим через θ^i_j формулу, которая истинна на элементе w^i_j. При этом имеем $\theta^i_1 = \theta^i_2$ для всех $i \in \{0, \dots, d\}$.

Для начала прореживаем цепь $W^0 = \Big\langle \bigcup\limits_{j=1}^{f+2} w^0_j, R^{SP}_T, R^{SP}_\sim, R^{SP}_1, \dots, R^{SP}_k \Big\rangle$, которая «примыкает» к сгустку C_0, т. е. $\forall z \in C_0 \big(w^0_{f+2} R^{SP}_T z\big)$. Возьмем элемент w^0_2 и выберем наибольший номер $j_2 \in \{3, \dots, f+2\}$ такой, что $\theta^0_2 = \theta^0_{j_2}$. Удалим из W^0 интервал $\big[w^0_2, w^0_{j_2-1}\big]$. Очевидно, что для любого дизъюнкта $\theta_j \in \Pr(r_{nf})$ выполняется

$$\big(\big[w^0_1, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_1\big) \models_V \theta^0_i \\ \Leftrightarrow \big(\big[w^0_1, w^0_{j_2}, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_1\big) \models_V \theta^0_i;$$

$$\big(\big[w^0_1, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_2\big) \models_V \theta^0_i \\ \Leftrightarrow \big(\big[w^0_1, w^0_{j_2}, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_{j_2}\big) \models_V \theta^0_i;$$

$$\forall n (1 \le n \le f+2-j_2)\big[\big(\big[w^0_1, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_{1+n}\big) \models_V \theta^0_i \\ \Leftrightarrow \big(\big[w^0_1, w^0_{j_2}, \dots, w^0_{f+2}\big] \cup [C_0, \dots, C_d, @], w^0_{j_2+n-1}\big) \models_V \theta^0_i\big].$$

Переобозначим элемент $w^0_{j_2}$ через w^0_2, элемент $w^0_{j_2+1}$ — через w^0_3, и т. д. Проделаем процедуру прореживания для всех w^0_j $(3 \le j \le f - j_2)$. В конечном итоге длина полученной цепи будет равна J^0 и ограничена размером правила r_{nf}, так как на каждом w_j^0 дизъюнкт θ_j^0 должен отличаться от предыдущих.

Повторим этап 2 для остальных цепей

$$W^i = \left\langle \bigcup_{j=1}^{f+2} w_j^i, R_T^{SP}, R_\sim^{SP}, R_1^{SP}, \dots, R_k^{SP} \right\rangle, \quad 1 \le i \le d.$$

Длина каждой i-й цепи станет равна J^i, где $1 \le i \le d$, при этом J^i ограничено размером правила r_{nf}.

В конечном счете получим модель $\mathscr{M}_{SP} = \langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$, на которой также выполняются условия (1)–(5) леммы 5.1, при этом мощность ее ограничена размером r_{nf}. $\square$

Рассмотрим правило r_{nf} в редуцированной нормальной форме такое, что $\mathrm{Var}(r_{nf}) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Пусть r_{nf} опровергается на модели $\mathscr{M}_{SP} = \langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$, ограниченной размером r_{nf}, где

1) $W_{SP} = @ \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} C_i \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} \bigcup\limits_{j=1}^{J^i} w_j^i$;

2) $R_T^{SP} = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \mid \forall z \in C_d\} \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} \{\langle w_{J_i}^i, z\rangle \mid \forall z \in C_i\}$;

3) $R_\sim^{SP} = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_\sim^i$;

4) $R_j^{SP} = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} R_j^i$ $(1 \le j \le k)$,

и выполняются условия (1)–(5) леммы 5.1, т. е.

1) $\mathscr{F}_{SP} \not\models_V \mathrm{Con}(r_{nf})$;

2) $\mathscr{F}_{SP} \models_V \mathrm{Pr}(r_{nf})$;

3) для некоторого дизъюнкта $\theta_a \in \mathrm{Pr}(r_{nf})$ при каждом i $(0 \le i \le d)$ выполняется

$$(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \theta_a, \quad (\mathscr{F}_{SP}, w_2^i) \models_V \theta_a, (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a;$$

4) для любых $z, w \in C_i$ таких, что $((\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \theta_k, \&(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_m)$, выполняется $\theta_k \ne \theta_m$;

5) сгусток C_d не изоморфен как модель элементу @.

Определим формулу

$$\beta_{d+1}(\theta_a) := \bigwedge_{i=0}^{J} \square_T^i \square_\sim \theta_a,$$

где $J = d + \max\{J^0, \dots, J^d\}$. Из строения модели $\mathscr{M}_{SP}$ вытекает

Утверждение 5.2. $(\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \beta_{d+1}(\theta_a)$.

Утверждение 5.3. *Для любого $w \in W_{\mathscr{F}_{SP}}$ такого, что $(w \ne @)$, выполняется*

$$(\mathscr{F}_{SP}, w) \not\models_V \beta_{d+1}(\theta_a).$$

Доказательство. Пусть существует элемент $w \in W_{\mathscr{F}_{SP}}$ глубины $k > 1$ такой, что $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{J} \square_T^i \square_\sim \theta_a$. По определению истинности оператора $\square_T$ для любого z такого, что $(w R_T^{SP} z)$, выполнено $(\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{J-1} \square_T^i \square_\sim \theta_a$.

Так как отношение R_T^{SP} рефлексивно и интранзитивно, либо $z \in C(w)$, либо $z \in C_{+1} : \big(C(w) R_T^{SP} C_{+1}\big)$. Аналогично $\forall x : \big(z R_T^{SP} x\big)\ (\mathscr{F}_{SP}, x) \models_V \bigwedge\limits_{i=0}^{J-2} \Box_T^i \Box_\sim \theta_a$, при этом либо $x \in C(w)$, либо $x \in C_{+1}$, либо $x \in C_{+2} : \big(C_{+1} R_T^{SP} C_{+2}\big)$. Продолжая данные рассуждения и принимая во внимание, что $k \le J$, получим $\forall z \in w^{\le}$ $(\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \Box_\sim \theta_a$, в том числе $\forall z \in C_d\ (\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \Box_\sim \theta_a$ и $(\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \Box_\sim \theta_a$. По определению истинности оператора $\Box_\sim$ имеем $\forall z \in C_d$: $(\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \theta_a$. Тем самым в силу п. (4) леммы 5.1 сгусток C_d вырожденный. Тогда C_d изоморфен как модель элементу @, что противоречит п. (5) леммы 5.1. Следовательно, для любого $w \in W_{\mathscr{F}_{SP}}$ такого, что $(w \ne @)$, выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, w) \not\models_V \beta_{d+1}(\theta_a)$. $\Box$

С каждым сгустком C_i $(0 \le i \le d)$ модели $\mathscr{M}_{SP}$ свяжем множество $\mathscr{M}(i) := \{\theta_k \mid (\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \ \&\ w \in C_i\}$.

Определим набор формул $\beta_i(\theta_k) := \theta_k \wedge \rho_\sim^i \wedge \rho_{d-i+1} \wedge \rho_T^i$, где $\theta_k \in \mathscr{M}(i)$, $0 \le i \le d$, и

$$\rho_\sim^i = \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \Diamond_\sim \theta_m \wedge \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \theta_k,$$

$$\rho_{d-i+1} = \bigwedge_{l=0}^{d-i} \big(\neg \Diamond_T^l \beta_{d+1}(\theta_a)\big) \wedge \Diamond_T^{d-i+1} \beta_{d+1}(\theta_a),$$

$$\rho_T^i = \Diamond_T \Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i+1)} \beta_{i+1}(\theta_m)\Big).$$

(a) Формула $\rho_\sim^i$ говорит о том, какие $\theta_m \in \Pr(r_{nf})$ истинны на элементах сгустка C_i.

(b) Если на элементе w истинна формула ρ_{d-i+1}, то ровно через $d-i+1$ «шагов» по отношению R_T из w достижим элемент, на котором истинна формула $\beta_{d+1}(\theta_a)$.

(c) Если на элементе w истинна формула ρ_T^i, то из w достижимы элементы, на которых истинна формула $\bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i+1)} \beta_{i+1}(\theta_m)$.

Утверждение 5.4. *Для любого $w \in C_i$ при некотором $\theta_k \in \mathscr{M}(i)$ выполняется*

$$(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta_i(\theta_k).$$

Доказательство. Рассмотрим для начала элемент $w \in C_d$. По определению модели $\mathscr{M}_{SP}$ очевидно, что если $w \in C_d$, то $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_\sim^d$.

Также по определению $\mathscr{M}_{SP}$ элемент @ достижим из w ровно через 1 «шаг» по отношению R_T^{SP}, и по утверждению 5.2 верно $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T \beta_{d+1}(\theta_a)$. Однако в силу утверждения 5.3 $(\mathscr{F}_{SP}, w) \not\models_V \beta_{d+1}(\theta_a)$. Значит, $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_1$.

Для любого $w \in C_d$ выполняется $\big(w R_T^{SP} @\big)$, следовательно, $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T (\Box_\sim \beta_{d+1}(\theta_a))$ и $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_T^d$. При этом по определению $\mathscr{M}_{SP}$ справедливо $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \mathscr{M}(d)$. В итоге $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \wedge \rho_\sim^d \wedge \rho_1 \wedge \rho_T^d$, т. е. $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta_d(\theta_k)$.

Пусть $w \in C_{d-1}$. Тогда по определению $\mathscr{M}_{SP}$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_\sim^{d-1}$ и $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \mathscr{M}(d-1)$. Также по определению $\mathscr{M}_{SP}$ и утверждениям 5.2, 5.3 имеем $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_2$.

Так как сгусток C_{d-1} является непосредственным R_T^{SP}-предшественником сгустка C_d и при любом $z \in C_d$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, z) \models_V \beta_d(\theta_m)$ для некоторого

$\theta_m \in \mathscr{M}(d)$, то

$$\forall w \in C_{d-1}\Big((\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(d)} \beta_d(\theta_m)\Big)\Big).$$

Таким образом, для любого $w \in C_{d-1}$ имеем $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta_{d-1}(\theta_k)$ для некоторого $\theta_k \in \mathscr{M}(d-1)$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что для произвольного элемента $w \in C_i$ $(0 \le i \le d)$ модели $\mathscr{M}_{SP}$ также выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta_i(\theta_k)$ для некоторого $\theta_k \in \mathscr{M}(i)$. $\Box$

С каждым элементом w^i_j $(1 \le j \le J^i,\ 0 \le i \le d)$ модели $\mathscr{M}_{SP}$ свяжем одноэлементное множество $\mathscr{M}(i,j) := \big\{\theta_k \mid \big(\mathscr{F}_{SP}, w^i_j\big) \models_V \theta_k\big\}$.

Определим набор формул $\beta^i_j(\theta_k) := \rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{(i,j)}$, где $\theta_k \in \mathscr{M}(i,j)$,

$$\rho_\sim(\theta_k) = \theta_k \wedge \Box_\sim\theta_k,$$

$$\rho_T^{(i,j)} = \bigwedge_{l=0}^{J^i-j} \Big(\neg\Diamond_T^l\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\Big)\Big) \wedge \Diamond_T^{J^i-j+1}\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\Big).$$

(a) Если на элементе w истинна формула $\rho_\sim(\theta_k)$, то на каждом элементе сгустка $C(w)$ истинна θ_k.

(b) Если на w истинна формула $\rho_T^{(i,j)}$, то из w ровно через $J^i - j + 1$ «шагов» по отношению R_T достижимы элементы, на которых истинна формула

$$\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m).$$

Утверждение 5.5. *Для любого $w = w^i_j$ выполняется*

$$(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta^i_j(\theta_k).$$

Доказательство. По определению $\mathscr{M}_{SP}$ элементы $w = w^i_j$ являются вырожденными $R^{SP}_\sim$-сгустками и $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \mathscr{M}(i,j)$. Следовательно, $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \theta_k \wedge \Box_\sim\theta_k$.

По построению модели $\mathscr{M}_{SP}$ ровно через $J^i - j + 1$ «шагов» по отношению R^{SP}_T из $w = w^i_j$ достижимы элементы сгустка C_i. При этом по утверждению 5.4 и определению истинности оператора $\Box_\sim$ для любого $x \in C_i$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, x) \models_V \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$. Получаем

$$(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \Diamond_T^{J^i-j+1}\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\Big).$$

Однако формула $\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$ не может быть истинна на элементах $w = w^i_{j+k}$ $(1 \le k \le J^i - j)$ в силу строения $\beta_i(\theta_m)$ и утверждения 5.3. Следовательно,

$$(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \bigwedge_{l=0}^{J^i-j} \Big(\neg\Diamond_T^l\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\Big)\Big).$$

Таким образом, $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{i,j}$, т. е. $(\mathscr{F}_{SP}, w) \models_V \beta^i_j(\theta_k)$. $\Box$

Отметим, что в силу п. (3) леммы 5.1 на элементах w^i_1 и w^i_2 $(0 \le i \le d)$ будут истинны формулы вида $\beta^i_1(\theta_a)$ и $\beta^i_2(\theta_a)$ соответственно.

Так как размер модели $\mathscr{M}_{SP}$ ограничен размером правила r_{nf}, количество формул $\beta_i(\theta_k)$ и $\beta^i_j(\theta_k)$ также будет ограничено размером r_{nf}.

Лемма 5.6 (Достаточное условие допустимости правил вывода в логике LTK_r). *Если правило вывода r_{nf} в редуцированной форме удовлетворяет заключению леммы* 5.1, *то r_{nf} недопустимо в логике LTK_r.*

Доказательство. Рассмотрим правило r_{nf} в редуцированной нормальной форме такое, что $\mathrm{Var}(r_{nf}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть r_{nf} опровергается на модели $\mathscr{M}_{SP} = \langle \mathscr{F}_{SP}, V\rangle$, ограниченной размером r_{nf}, где $W_{SP} = @ \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} C_i \cup \bigcup\limits_{i=0}^{d} \bigcup\limits_{j=1}^{J^i} w_j^i$, и пусть выполняются условия (1)–(5) леммы 5.1.

Рассмотрим n-характеристическую модель

$$\mathrm{Ch}_{LTK_r}(n) = \langle \mathrm{Ch}_n, V_0\rangle,$$

где $\mathrm{Dom}(V_0) = \{p_1, \ldots, p_n\}$ и n равно числу переменных правила r_{nf}.

Заменим в формулах $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\beta_i(\theta_k)$ переменные $x_1, \ldots, x_n$ переменными $p_1, \ldots, p_n$. Теперь можем проверять истинность формул $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\beta_i(\theta_k)$ на элементах $\langle \mathrm{Ch}_n, V_0\rangle$.

Определим формулы

$$\beta_j^i(\theta_k)^+ := \big(\beta_j^i(\theta_k) \vee (\neg\rho_\sim(\theta_k) \wedge \rho_T^{(i,j)})\big) \wedge \neg\Diamond_T^{J^i-j}\Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\Big),$$

где $0 \le i \le d$, $1 \le j \le J^i$.

Обозначим через $w^{\le i}$ фрейм длины $i+1$, порожденный элементом w, т. е. $w^{\le i} = \{C(w)R_T C_{+1} R_T \ldots R_T C_{+i}\}$.

Утверждение 5.7. *Если* $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, *то*

(1) *ровно через $J^i - j + 1$ «шагов» по отношению R_T из w достижим элемент x такой, что* $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$;

(2) *для любого $y \in w^{\le J^i - j}$ выполняется*

$$(\mathrm{Ch}_n, y) \not\models_{V_0} \bigvee_{l=0}^{d+1} \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(l)} \beta_l(\theta_m).$$

Доказательство. (1) Пусть $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$. Тогда $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k) \vee \big(\neg\rho_\sim \wedge \rho_T^{(i,j)}\big)$. По определению формулы $\beta_j^i(\theta_k)$ и $\rho_T^{(i,j)}$ на элементе w истинна формула $\bigwedge\limits_{l=0}^{J^i-j} \big(\neg\Diamond_T^l\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\big)\big) \wedge \Diamond_T^{J^i-j+1}\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\big)$. Следовательно, ровно через $J^i - j + 1$ «шагов» по отношению R_T из w достижим элемент $x \in C(x)$, на котором истинна формула $\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$.

(2) Пусть $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$ и существует элемент $y \in w^{\le J^i - j}$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, y) \models_{V_0} \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(l)} \beta_l(\theta_m)$ для некоторого l.

(a) Если $l < i$, то по построению формулы $\beta_l(\theta_m)$ имеем $(\mathrm{Ch}_n, y) \models_{V_0} \Diamond_T\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(l+1)} \beta_{l+1}(\theta_m)\big)$. Тогда по определению истинности оператора $\Diamond_T$ и строению формулы $\beta_l(\theta_m)$ существует элемент $x \in C_{+1} : (C(y) R_T C_{+1})$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(l+1)} \beta_{l+1}(\theta_m)$.

Формула $\beta_{l+1}(\theta_m)$ содержит формулу $\Diamond_T\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(l+2)} \beta_{l+2}(\theta_m)\big)$ в качестве подформулы. Тогда по определению истинности оператора $\Diamond_T$ и строению формулы $\beta_{l+1}(\theta_m)$ существует элемент $x \in C_{+2}$: $(C_{+1}R_TC_{+2})$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(l+2)} \beta_{l+2}(\theta_m)$.

Рассуждая аналогично, легко показать, что

$$\exists z \in w^{\leq J}(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m\in\mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m),$$

$$\exists x \in C_{+1} : \Big(C(z)R_TC_{+1}\&(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m\in\mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\Big).$$

Из утверждения 5.7(1) следует, что x достижим из w ровно за $J^i - j + 1$ «шагов» по отношению R_T. Таким образом, элемент z достижим из w за $J^i - j$ «шагов». Тогда $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \Diamond_T^{J^i-j}\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\big)$. Однако $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \neg\Diamond_T^{J^i-j}\big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\big)$ по определению. Следовательно, для любого $y \in w^{\leq J^i-j}$ выполняется $(\mathrm{Ch}_n, y) \not\models_{V_0} \bigvee\limits_{l=0}^{d+1} \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(l)} \beta_l(\theta_m)$.

(b) Если $l \geq i$, то из строения формулы $\beta_l(\theta_m)$ имеем, что через $d - l + 1$ «шагов» по отношению R_T из y достижим элемент $z : (\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$. Строение формулы $\beta_{d+1}(\theta_a)$ и определение истинности оператора $\Box_T$ требуют выполнение формулы $\Box_\sim\theta_a$ на последовательности из J R_T-сгустков, где $J = d + max\{J^0, \dots, J^d\}$. Так как $(J^i - j + 1) + (d - i + 1) < J$ и $d - l + 1 \leq d - i + 1$, получаем противоречие с п. (1) утверждения 5.7. $\Box$

Из утверждения 5.7 вытекает

Следствие 5.8. *Если* $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_j^i(\theta_k)^+$, *то*

$$(\mathrm{Ch}_n, w) \not\models_{V_0} \bigvee_{m\neq i\&l\neq j} \beta_l^m(\theta_k)^+.$$

Зададим формульные множества

$$S(\theta_k) = \{w \in W_{\mathrm{Ch}_n} \mid (\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \psi_k\},$$

где $\theta_k \in \mathrm{Pr}(r_{nf})$, $\psi_k := \bigvee\limits_{i=1}^{d} \beta_i(\theta_k) \vee \bigvee\limits_{l=0}^{d} \bigvee\limits_{j=1}^{J^l} \beta_j^l(\theta_k)^+$ для всех $k \neq a$,

$$S(\theta_a) = \neg\Big(\bigvee_{k\neq a} \psi_k\Big).$$

Тем самым если $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_i(\theta_k)$ или ровно через $J^i - j + 1$ $(1 \leq j \leq \max\{J^0, \dots, J^d\})$ «шагов» по отношению R_T из w достижим элемент x такой, что $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m\in\mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$, то w принадлежит некоторому множеству $S(\theta_k)$, $\theta_k \in \mathrm{Pr}(r_{nf})$. Если же ни одна из формул $\beta_i(\theta_k)$, $\beta_j^l(\theta_k)^+$ не истинна на элементе w, то $w \in S(\theta_a)$.

Из строения формул $\beta_i(\theta_k)$, утверждения 5.7 и следствия 5.8 вытекает

Следствие 5.9. *Для любого* $w \in W_{\mathrm{Ch}_n}$ *существует единственное множество* $S(\theta_k)$ *такое, что* $w \in S(\theta_k)$.

Теперь зададим означивание S_0 переменных $x_1, \ldots, x_n$ правила r_{nf} на Ch_n с помощью формульных множеств $S(\theta_k)$:

$$S_0(x_i) = V_0\Big(\bigvee_{x_i^0 \in \theta_k} \psi_k\Big). \tag{3}$$

Запись $x_i^0 \in \theta_k$ означает, что если $w \models \theta_k$, то $w \models x_i$ (т. е. переменная x_i входит в формулу θ_k без отрицания).

Покажем, что правило вывода r_{nf} опровергается на модели $\langle \mathrm{Ch}_n, S_0\rangle$. Надо проверить следующие условия:

1) $\forall w \in W_{\mathrm{Ch}_n}$ $((\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k)$,

2) $\exists w \in W_{\mathrm{Ch}_n}$ $((\mathrm{Ch}_n, w) \not\models_{S_0} x_1)$.

Утверждение 5.10. *Для любого* $w \in W_{\mathrm{Ch}_n}$ *выполняется*

$$w \in S(\theta_k) \Rightarrow (\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k.$$

Доказательство. 1. Пусть $w \in S(\theta_k)$ и $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_i(\theta_k)$.

(а) Из строения формулы $\beta_i(\theta_k)$ и подформулы $\rho^i_\sim$ следует, что для любого $z \in C(w)$ такого, что $((\mathrm{Ch}_n, z)$, выполняется $\models_{V_0} \beta_i(\theta_m))$ для некоторого $\theta_m \in \mathscr{M}(i)$. Тогда каждый элемент $z \in C(w)$ принадлежит одному из множеств $S(\theta_m)$, где $\theta_m \in \mathscr{M}(i)$. Из (3) получаем, что для каждого $z \in C(w)$ выполняется $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$ для некоторого $\theta_m \in \mathscr{M}(i)$.

По утверждению 5.4 для каждого элемента $z' \in C_i \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V \beta_i(\theta_m)$ для некоторого $\theta_m \in \mathscr{M}(i)$. В том числе существует элемент w' такой, что $(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \beta_i(\theta_k)$. Тогда по определению формул θ_k и θ_m выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_m} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_m} x_i^1$ и $(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_k} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_k} x_i^1$. Следовательно, для любого элемента $z \in C(w) \subset W_{\mathrm{Ch}_n}$ найдется элемент $z' \in C_i \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V x_i$.

(б) Из строения формулы $\beta_i(\theta_k)$ и подформулы ρ^i_T получаем, что для любого $z \in C_{+1}(C(w) R_T C_{+1})$ верно $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta_{i+1}(\theta_l)$ для некоторого $\theta_l \in \mathscr{M}(i+1)$. Следовательно, каждый элемент z сгустка C_{+1} принадлежит некоторому $S(\theta_l)$. Тогда по (3) имеем $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_l} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_l} x_i^1$.

Также для любого $z' \in C_{i+1} \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V \beta_{i+1}(\theta_l)$ для некоторого $\theta_l \in \mathscr{M}(i+1)$. По определению формулы θ_l имеем $(\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_l} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_l} x_i^1$. Тогда для любого элемента $z \in C_{+1} \subset W_{\mathrm{Ch}_n}$ найдется элемент $z' \in C_{i+1} \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, z') \models_V x_i$.

Так как $C(w) R_T C_{+1}$, $C_i R_T^{SP} C_{i+1}$ и временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, истинность формулы θ_k на элементе w зависит только от означивания переменных на сгустках $C(w)$ и C_{+1}, а на элементе w' — на сгустках C_i и C_{i+1}. Из вышесказанного следует, что $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$ и $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k$.

2. Пусть $w \in S(\theta_k)$ и $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta^i_j(\theta_k)^+$. Из определения формулы $\beta^i_j(\theta_k)^+$ следует, что для любого $z \in C(w)$ также выполняется $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta^i_j(\theta_k)^+$. Тогда $\forall z \in C(w)$ $(z \in S(\theta_k))$. Из (3) вытекает, что $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_k} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_k} x_i^1$.

По утверждению 5.5 для элемента $w' = w^i_j \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ выполняется $(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \beta^i_j(\theta_k)$ и $(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$, следовательно, $(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge\limits_{x^0_i \in \theta_k} x^0_i \wedge \bigwedge\limits_{x^0_i \notin \theta_k} x^1_i$. Тогда для каждого $z \in C(w) \subset W_{\mathrm{Ch}_n}$ выполняется

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V x_i.$$

Рассмотрим сгусток C_{+1}: $C(w) R_T C_{+1}$. Элемент x такой, что $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$, достижим из любого элемента $z \in C_{+1}$ ровно через $J^i - j$ «шагов» по отношению R_T. Тогда $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \Diamond^{J^i - j}_T \big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)\big)$.

Так как $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \neg\Diamond^{J^i - j}_T \big(\Box_\sim \bigvee\limits_{\theta_m \in \mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\big)$, то для любого $z \in C_{+1}$ имеет место

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \neg\Diamond^{J^i - j - 1}_T \Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\Big).$$

Таким образом, для любого $z \in C_{+1}$ выполняется

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \rho^{i,j+1}_T \wedge \neg\Diamond^{J^i - j - 1}_T \Big(\Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i-1)} \beta_{i-1}(\theta_m)\Big),$$

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta^i_{j+1}(\theta_m)^+.$$

Тогда по определению множеств $S(\theta_m)$ имеем $z \in S(\theta_m)$ для некоторого $\theta_m \in \mathscr{M}(i, j+1)$. Следовательно, по (3) получаем

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x^0_i \in \theta_m} x^0_i \wedge \bigwedge_{x^0_i \notin \theta_m} x^1_i.$$

По утверждению 5.5 для элемента $w' = w^i_{j+1} \subset W_{\mathscr{F}_{SP}}$ выполняется

$$(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \beta^i_{j+1}(\theta_m), \quad (\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \theta_m.$$

Тогда

$$(\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \bigwedge_{x^0_i \in \theta_m} x^0_i \wedge \bigwedge_{x^0_i \notin \theta_m} x^1_i$$

и для любого элемента $z \in C_{+1} \subset W_{\mathrm{Ch}_n}$ справедливо

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V x_i.$$

Учитывая, что временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, получаем $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, w') \models_V \theta_k$ и $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k$.

3. Пусть $w \in S(\theta_a)$ и $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$. Тогда по (3) имеем $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \bigwedge\limits_{x^0_i \in \theta_a} x^0_i \wedge \bigwedge\limits_{x^0_i \notin \theta_a} x^1_i$. Строение $\beta_{d+1}(\theta_a)$ и определение истинности оператора $\Box_T$ требуют выполнение формулы $\Box_\sim \theta_a$ на последовательности из J $R_\sim$-сгустков, где $J = d + \max\{J^0, \dots, J^d\}$. Тогда

(a) либо для любого z такого, что $(w R_T z)$, выполняется $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$;

(b) либо для любого $z \in C(w)$ имеем $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \beta_{d+1}(\theta_a)$ и

$$\forall y \in C_{+1} \quad (\mathrm{Ch}_n, y) \models_{V_0} \left(\bigwedge_{i=1}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta^i_j(\theta_h)^+\right).$$

По определению множества $S(\theta_a)$ в обоих случаях для любого z такого, что $(wR_T z)$, имеет место $z \in S(\theta_a)$. Тогда по (3) выполняется

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1.$$

Из утверждения 5.2 и строения формулы $\beta_{d+1}(\theta_a)$ следует, что $(\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$. Тогда для любого z такого, что $(wR_T z)$, выполняется

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V x_i.$$

Так как временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1 и $@R_T^{SP}@$, то $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a$. Следовательно, $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a$.

4. Пусть $w \in S(\theta_a)$ и

$$(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+.$$

(а) Пусть также для любого $y \in C_{+1}$ такого, что $(C(w)R_T C_{+1})$, выполняется $(\mathrm{Ch}_n, y) \models_{V_0} \beta_1^i(\theta_a)$. Тем самым элемент x такой, что $(\mathrm{Ch}_n, x) \models_{V_0} \Box_\sim \bigvee_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \beta_i(\theta_m)$, достижим из w ровно через J^i+1 «шагов» по отношению R_T. Тогда по определению множества $S(\theta_a)$ имеем $y \in S(\theta_a)$ и по (3) выполняется $(\mathrm{Ch}_n, y) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

По определению формулы $\bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+$ для любого $z \in C(w)$ также выполняется

$$(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+.$$

Тогда $z \in S(\theta_a)$ и по (3) имеем $(\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

По утверждению 5.5 и строению формул $\beta_1^i(\theta_a)$, $\beta_2^i(\theta_a)$ имеем $\left(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\right) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$ и $\left(\mathscr{F}_{SP}, w_2^i\right) \models_V \bigwedge_{x_i^0 \in \theta_a} x_i^0 \wedge \bigwedge_{x_i^0 \notin \theta_a} x_i^1$.

Тогда для каждого $z \in C(w) \subset W_{\mathrm{Ch}_n}$ такого, что $((\mathrm{Ch}_n, z) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow \left(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\right) \models_V x_i)$, и для любого $y \in C_{+1}$ такого, что $(C(w)R_T C_{+1})$, справедливо $(\mathrm{Ch}_n, y) \models_{S_0} x_i \Leftrightarrow \left(\mathscr{F}_{SP}, w_2^i\right) \models_V x_i$.

Учитывая, что временная модальная степень каждой формулы θ_k равна 1, имеем $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow \left(\mathscr{F}_{SP}, w_1^i\right) \models_V \theta_a$. Следовательно, $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a$.

(б) Если

$$\forall y \in C_{+1} \quad (C(w)R_T C_{+1}) \text{ и } (\mathrm{Ch}_n, y) \models_{V_0} \bigwedge_{i=0}^{d+1} \bigwedge_{\theta_m \in \mathscr{M}(i)} \neg\beta_i(\theta_m) \wedge \bigwedge_{i=0}^{d} \bigwedge_{j=1}^{J^i} \neg\beta_j^i(\theta_h)^+,$$

проводя аналогичные рассуждения, получим

$$(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a \Leftrightarrow (\mathscr{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a.$$

Следовательно, $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_a$. $\Box$

Утверждение 5.11. $\exists w \in W_{\mathrm{Ch}_n}$: $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_S \neg x_1$.

Доказательство. Из п. (1) леммы 5.1 следует, что $\neg x_1 \in \theta_k$ для некоторого $\theta_k \in \Pr(r_{nf})$. По построению n-характеристической модели $\langle \mathrm{Ch}_n, V_0 \rangle$ существует элемент $w \in \mathrm{Ch}_n$ такой, что $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{V_0} \bigvee\limits_{i=0}^{d+1} \beta_i(\theta_k)$. Тогда по определению множеств $S(\theta_k)$ получаем, что $w \in S(\theta_k)$. Из утверждения 5.10 имеем $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \theta_k$. Следовательно, $(\mathrm{Ch}_n, w) \models_{S_0} \neg x_1$. $\square$

Из вышеизложенного получаем, что при формульном означивании S_0 на каждом элементе Ch_n истинна посылка r_{nf} и существуют элементы, на которых опровергается заключение. Таким образом, по лемме 2.3 следует, что r_{nf} недопустимо в логике LTK_r. $\square$

В силу лемм 5.1 и 5.6 для произвольного правила r_{nf} в редуцированной нормальной форме можно за конечное число шагов определить, допустимо r_{nf} в логике LTK_r или нет. Таким образом, справедлива

Теорема 5.12. *Логика LTK_r разрешима относительно допустимости правил вывода.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fagin R., Halpern J. Y., Moses Y., Vardi M. Y.* Reasoning about knowledge. Cambridge, MA: MIT Press, 1995.
2. *Thomason R. H.* Combination of tense and modality // D. Gabbay, F. Guenthner (Eds). Handbook of philosophical logic. Dordrecht: Reidel, 1984. V. II. P. 135–165.
3. *Gabbay D., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M.* Many-dimensional modal logics: Theory and applications. New York; Amsterdam: Elsevier North-Holland, 2003. (Stud. Logic Found. Math.; V. 148).
4. *Halpern J. Y., Van Der Meyden R., Vardi M. Y.* Complete axiomatization for reasoning about knowledge and time // SIAM J. Comput. 2004. V. 33, N 3. P. 674–703.
5. *Lorenzen P.* Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1955.
6. *Harrop R.* Concerning Formulas of the Types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ // J. Symb. Log. 1960. V. 25, N 1. P. 27–32.
7. *Fridman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // J. Symb. Log. 1975. V. 40, N 3. P. 113–130.
8. *Рыбаков В. В.* Критерий допустимости правил в модальной системе $S4$ и интуиционистской логике // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 546–572.
9. *Рыбаков В. В.* Базисы допустимых правил логик $S4$ и Int // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 87–107.
10. *Rybakov V.* Admissibility in logical inference rules. New York; Amsterdam: Elsevier, 1997. (Stud. Logic Found. Math.; V. 136).
11. *Ghilardi S.* Unification in intuitionistic logic // J. Symb. Logic. 1999. V. 64. P. 859–880.
12. *Rybakov V.* Projective formulas and unification in linear temporal logic LTL_U // Logic J. IGPL. 2014. V. 22, N 4. P. 665–672.
13. *Rybakov V., Odintsov S.* Unification and admissible rules for paraconsistent minimal Johanssons' logic J and positive intuitionistic logic $IPC+$ // Ann. Pure Appl. Logic. 2013. V. 164, N 7. P. 771–784.
14. *Rybakov V.* Writing out unifiers for formulas with coefficients in intuitionistic logic // Logic J. IGPL. 2013. V. 21, N 2. P. 187–198.
15. *Rybakov V.* Unifiers in transitive modal logics for formulas with coefficients (meta-variables) // Logic J. IGPL. 2013. V. 21, N 2. P. 205–215.
16. *Rybakov V.* Multi-agent logic based on temporary logic $TS4K_n$ serving web search // KES. 2012. V. 243. P. 108–117.
17. *Golovanov M., Kosheleva A., Rybakov V.* Logic of visibility, perception, and knowledge and admissible inference rules // Logic J. IGPL. 2005. V. 13, N 2. P. 201–209.

18. *Calardo E.* Admissible inference rules in the linear logic of knowledge and time LTK // Logic J. IGPL. 2006. V. 14, N 1. P. 15–34.

19. *Lukyanchuk A.* Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // J. Sib. Federal Univ. 2013. V. 6, N 2. P. 220–226.

Статья поступила 2 сентября 2014 г.

Лукьянчук Александра Николаевна
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`a.lukyanchuk@inbox.ru`

Рыбаков Владимир Владимирович
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041;
School of Computing, Mathematics and DT,
Manchester Metropolitan University,
John Dalton Building, Chester Street, Manchester, M1 5GD, UK
`V.Rybakov@mmu.ac.uk`