Сибирский математический журнал
Июль—август, 2014. Том 55, № 4

УДК 517.54

БИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГА НА СИЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ

В. В. Старков, Н. А. Шмелев

Аннотация. Сильно выпуклый анализ находит широкое применение в разных областях математики (см. [1, 2]). В статье дано полное описание R-выпуклых плоских областей в терминах биголоморфных отображений круга на такие области, получен критерий того, что биголоморфная функция отображает круг на R-выпуклую область.

Ключевые слова: сильно выпуклый анализ, R-выпуклая область, биголоморфные отображения круга.

В [1, 2] введены и изучались R-сильно выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ (далее R-выпуклые множества), $R \in (0, +\infty)$. В эквивалентной форме для компактного множества K это определение принимает вид (см. [1]): если $|z_1 - z_2| \leq 2R$, то обозначим через $E_R(z_1, z_2)$ компакт, ограниченный всевозможными дугами окружностей радиуса R длины не более πR с концами в точках z_1 и z_2; компакт K называется *R-выпуклым*, если для любых двух его точек z_1, z_2 множество $E_R(z_1, z_2)$ содержится в K.

Множество $E_R(z_1, z_2)$ называется *R-выпуклой оболочкой* точек z_1, z_2.

Выпуклый и сильно выпуклый анализ находит многочисленные применения в вариационном исчислении и математической теории управления, в теоретической механике, теории приближений и экономике.

В этой статье понятие R-выпуклости обобщается на произвольное множество $A \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *R-выпуклым*, если для любых двух точек $z_1, z_2 \in A$, $|z_1 - z_2| \leq 2R$, R-выпуклая оболочка этих точек $E_R(z_1, z_2)$ содержится в A.

Заметим, что при фиксированных z_1, z_2 их R-выпуклая оболочка $E_R(z_1, z_2)$ вырождается в отрезок при $R \to +\infty$, поэтому естественно считать, что при $R = +\infty$ R-выпуклость трансформируется в классическую выпуклость.

Основной целью работы является описание плоских R-выпуклых областей посредством критерия для биголоморфных отображений круга $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на такие области. Далее переформулируем используемые в [3, 4] определения локальной R-выпуклости замкнутых множеств на случай произвольных множеств из $\mathbb{R}^n$

Определение 2. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *локально R-выпуклым*, если существует число $\eta \in (0, 2R]$ такое, что R-выпуклая оболочка любых двух точек множества A, расстояние между которыми меньше η, целиком лежит в A.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ. Первый автор поддержан Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 14–01–00510, 14–01–92692).

Предложение 1. *Пусть D — область в R^2. Если для любого $r > R$ область D r-выпукла, то D — R-выпуклая область.*

Доказательство. Пусть $w_1, w_2 \in D$, $r > R$. На прямой, проходящей через w_1, w_2, выберем точки $w_1', w_2' \in D$ на расстоянии $\delta < \eta$ от отрезка $[w_1, w_2]$. Тогда $E_R(w_1, w_2) \subset E_{R'}(w_1', w_2')$, где

$$R' = \frac{X^2 + (\delta + |w_1 - w_2|/2)}{2X}, \quad X = R - \sqrt{R^2 - \frac{|w_1 - w_2|^2}{4}}.$$

Так как $R' > R$, то $E_{R'}(w_1', w_2') \subset D$, а значит, и $E_R(w_1', w_2') \subset D$.

В предложениях 2 и 3 сформулируем необходимые в дальнейшем свойства локально R-выпуклых множеств.

Предложение 2 [3]. *Если K — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^2$ и существует $\eta > 0$ такое, что для любых $z_1 \in \partial K$, $z_2 \in K$, $|z_1 - z_2| < \eta$ оболочка $E_R(z_1, z_2)$ лежит в K при некотором фиксированном $R > 0$, то K — локально R-выпуклый компакт.*

Предложение 3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$.*

1. *Если D локально R-выпуклая, то множество $\overline{D}$ локально R-выпуклое.*

2. *Если любая окрестность произвольной граничной точки $w_0 \in \partial D$ содержит точки, не лежащие в $\overline{D}$, а $\overline{D}$ локально R-выпуклое, то область D R-выпуклая.*

Доказательство. 1. Пусть D — локально R-выпуклая область, η из определения локальной R-выпуклости, $z_1, z_2 \in D, |z_1 - z_2| < \eta$. Тогда $E_R(z_1, z_2) \subset D$. Пусть $z_1, z_2 \in \overline{D}$, и по крайней мере одна из этих точек лежит на ∂D. Если $E_R(z_1, z_2)$ не лежит в $\overline{D}$, то в $\operatorname{int} E_R(z_1, z_2)$ найдется точка $w \notin \overline{D}$. Следовательно, найдется окрестность U_w точки w такая, что $U_w \subset \operatorname{int} E_R(z_1, z_2)$, и $U_w \cap \overline{D} = \varnothing$.

Рассмотрим последовательности точек $w_k^1, w_k^2 \in D, w_k^1 \to z_1, w_k^2 \to z_2$. Тогда $\left|w_k^1 - w_k^2\right| < \eta$ при достаточно больших k. Следовательно, $E_R\left(w_k^1, w_k^2\right) \subset D$. С другой стороны, $E_R\left(w_k^1, w_k^2\right) \cap U_w \neq \varnothing$, поскольку $U_w \subset \operatorname{int} E_R(z_1, z_2)$, $w_k^j \to z_j$, $j = 1, 2$. Противоречие доказывает справедливость п. 1.

2. Если множество $\overline{D}$ локально R-выпукло, то оно локально выпукло и по теореме Титце — Накаяма (см. [5]) выпукло. А всякое выпуклое замкнутое локально R-выпуклое множество R-выпукло (см. [3, 4]). Следовательно, $\overline{D}$ R-выпуклое. Предположим, что D не является R-выпуклым множеством. Тогда найдутся $w_1, w_2 \in D$ такие, что $E_R(w_1, w_2)$ не лежит целиком в D, и существует $w_0 \in E_R(w_1, w_2) \cap \partial D$. Поскольку вместе с w_1, w_2 окрестности этих точек U_{w_1}, U_{w_2} лежат в D, существуют $z_1 \in U_{w_1}, z_2 \in U_{w_2}$ такие, что $\operatorname{int} E_R(z_1, z_2) \ni w_0$, а следовательно, $E_R(z_1, z_2)$ содержит точки, не принадлежащие $\overline{D}$; противоречие с R-выпуклостью $\overline{D}$. Предложение доказано.

Теорема 1 (о наследственности). *Пусть функция $f(z)$ биголоморфна (т. е. биективна и голоморфна) и отображает единичный круг $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на R-выпуклое множество $D = f(\Delta) \subset \mathbb{C}$. Тогда образ $f(\Delta_r)$ круга $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r \in (0, 1)$, также будет R-выпуклым множеством в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая, когда $f(0) = 0$. Поскольку область D — R-выпуклая область, она выпукла и, следовательно, строго звездообразна относительно любой своей точки. В частности, D строго звездообразна относительно нуля, и существует взаимно однозначное и непрерывное соответствие между граничными точками $\xi \in \partial D$ и $\arg \xi$, т. е. ∂D — кривая Жордана. Следовательно, по теореме Каратеодори f гомеоморфно продолжима на замыкание Δ (см. [6, гл. 1, § 3]).

Пусть z_1 — фиксированная точка из $\overline{\Delta_r}$, $z \in \Delta$, $|z_2| = r$. Пусть $w_1 = f(z)$, $w_2 = f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)$ — точки из D.

Пусть X — максимальное расстояние от точки на одной из дуг $\partial E_R(w_1, w_2)$ до отрезка $[w_1, w_2]$, тогда

$$X = R - \sqrt{R^2 - \frac{|w_1 - w_2|^2}{4}}.$$

Заметим, что

$$\left| \frac{(w_1 - w_2)^2}{8R} \right| < X.$$

При изменении $\alpha \in [0, 2\pi)$ точка

$$w_3 = \frac{w_1 + w_2}{2} + \frac{(w_1 - w_2)^2}{8R} e^{i\alpha} \tag{1}$$

описывает окружность с центром в середине отрезка $[w_1, w_2]$ радиуса, не превосходящего X, поэтому такая окружность целиком лежит в $E_R(w_1, w_2)$.

При фиксированном $\alpha \in [0, 2\pi)$ найдем дробно-линейную функцию $w(t)$, переводящую отрезок [0,1] в дугу окружности (в широком смысле), проходящую через w_1, w_2, w_3 так, что $w(0) = w_1, w(1) = w_2, w\left(\frac{1}{2}\right) = w_3$:

$$w(t) = \frac{w_1 - w_2 F(t)}{1 - F(t)}, \quad F(t) = \frac{t((w_1 - w_2)e^{i\alpha} - 4R)}{(1-t)((w_1 - w_2)e^{i\alpha} + 4R)}, \quad t \in [0, 1], \ \alpha \in [0, 2\pi].$$

Заменим в $w(t)$ значение w_1 на $f(z)$ и w_2 на $f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)$, тогда получим функцию $\psi(z) = \psi(z, \alpha, t)$.

Заметим, что $\psi(z)$ аналитична по z в Δ при фиксированных t и α, так как w_1, w_2, w_3 — аналитические по z функции в Δ и $|w_1 - w_2| \leq 2R$ по определению 1, поэтому

$$e^{i\alpha}(w_1 - w_2) \neq \frac{4R}{2t - 1} \Longleftrightarrow F(t) \neq 1.$$

Из определения функции ψ следует, что при фиксированных α, t и z точка $\psi(z)$ принадлежит $E_{R'}\left(f(z), f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)\right)$, где $R' = R'(\alpha, t, z)$ — радиус окружности, проходящей через w_1, w_2, w_3. Из определения w_3 следует, что $R' > R$. Поэтому $E_{R'}\left(f(z), f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)\right) \subset D$ и $\psi(\Delta) \subset f(\Delta)$, так как D — R-выпуклое множество, а значит, является R'-выпуклым множеством для любого $R' > R$ (см. [1]). Следовательно, имеет смысл суперпозиция $\varphi(z) = f^{-1}(\psi(z))$, φ — аналитическая функция, $|\varphi(z)| \leq 1$, $\varphi(0) = 0$, так как $\psi(0) = 0$. Применяя к $\varphi(z)$ лемму Шварца, получим $|\varphi(z_2)| \leq |z_2| = r$, т. е. $f^{-1}(\psi(z_2)) \in \overline{\Delta_r}$ и $\psi(z_2) \in f(\overline{\Delta_r})$.

Из конструкции функции ψ вытекает, что при $z = z_2$ и при фиксированном $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\{\psi(z_2, \alpha, t) : t \in [0, 1]\} \tag{2}$$

описывает меньшую из двух дуг окружности радиуса $R' > R$, соединяющую $f(z_1)$ с $f(z_2)$ и проходящую через точку $w_3(z_2)$, определяемую равенством (1). При этом $\psi(z_2, \alpha, t) \subset f(\overline{\Delta_r})$ для любого $t \in [0, 1]$, т. е. такая дуга (2) содержится в $f(\overline{\Delta_r})$ при любом фиксированном $\alpha \in [0, 2\pi)$. Множество всех таких дуг (2) при всевозможных $\alpha \in [0, 2\pi)$ заполняет $E_{R_1}(f(z_1), f(z_2))$, где $R_1 = R_1(z_1, z_2)$ — радиус окружности, проходящей через $f(z_1), f(z_2)$ и касательной к окружности (1) при $z = z_2$. Следовательно, $E_{R_1}(f(z_1), f(z_2)) \subset f(\overline{\Delta_r})$, поскольку, как показано ранее, $E_{R'}(f(z_1), f(z_2)) \subset f(\overline{\Delta_r})$ для любого выше определенного радиуса R'; в частности, $R' = R_1$.

Докажем, что если $z_1 \in \overline{\Delta_r}$, $|z_2| = r$ и $|z_1 - z_2| \to 0$, то $R_1(z_1, z_2) \to R$. Тогда для любого фиксированного ρ, сколь угодно близкого к R, $\rho > R$, найдется такое $\delta > 0$, что при $|z_1 - z_2| < \delta$, $z_1 \in \overline{\Delta_r}$, $|z_2| = r$ справедливо включение $E_\rho(f(z_1), f(z_2)) \subset f(\overline{\Delta_r})$, а значит, $f(\overline{\Delta_r})$ является локально ρ-выпуклым компактом по предложению 2, и по предложению 3 область $f(\Delta_r)$ локально ρ-выпукла для любого $\rho > R$. Тогда по предложению 1 $f(\Delta_r)$ — R-выпуклая область.

Итак, остается показать, что

$$\lim_{|z_1 - z_2| \to 0} R_1(z_1, z_2) = R. \tag{3}$$

Пусть X_1 — радиус окружности (1) при $z = z_2$; обозначим $W_1 = f(z_1)$, $W_2 = f(z_2)$. Тогда

$$X_1 = \frac{|W_1 - W_2|^2}{8R} \Rightarrow R_1 - R = \frac{1}{2}(X_1 - X) + \frac{1}{8}\left(\frac{|W_1 - W_2|^2}{X} - \frac{|W_1 - W_2|^2}{X_1}\right).$$

Из равномерной непрерывности f на компакте $\overline{\Delta_r}$ следует, что $W_1 - W_2 \to 0$ при выбранных z_1, z_2 и $z_1 - z_2 \to 0$. При этом X, $X_1 \to 0$. Для доказательства (3) остается показать, что

$$\lim_{s \to 0} \frac{s(X_1(s) - X(s))}{X(s)X_1(s)} = 0,$$

где $s = |W_1 - W_2|^2$. Но

$$X(s) = R\left(1 - \sqrt{1 - \frac{s}{4R^2}}\right) = \frac{s}{8R} + O(s^2), \quad X_1(s) = \frac{s}{8R}.$$

Поэтому

$$\lim_{s \to 0} \frac{s(X_1(s) - X(s))}{X(s)X_1(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{O(s^2)}{\frac{1}{8R}\left(\frac{s}{8R} + O(s^2)\right)} = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция f биголоморфно отображает единичный круг $\Delta \subset \mathbb{C}$ на область $D = f(\Delta) \subset \mathbb{C}$, $f'(0) = 1$. Область D является R-выпуклой тогда и только тогда, когда для любого $z \in \Delta$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{|z||f'(z)|}{R}. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $f(0) = 0$.

Пусть D — R-выпуклая область. Тогда по теореме 1 для любого $r \in (0, 1)$ область $f(\Delta_r)$ R-выпуклая. Обозначим через Γ_r кривую $\partial f(\Delta_r)$ и покажем, что ее радиус кривизны $\rho(w)$ не больше R для всех $w \in \Gamma_r$.

Пусть это не так и $\rho' = \rho(w') > R$ для некоторой точки $w' \in \Gamma_r$. Поскольку ρ' — радиус окружности кривизны, т. е. предельной окружности для семейства окружностей, проходящих через различные точки w_1, w', w_2, когда

$$w_1, w_2 \in \Gamma_r, \quad |w_1 - w'| + |w_2 - w'| = \delta \to 0,$$

то при достаточно малых δ радиус $\rho_* = \rho_*(w_1, w', w_2)$ таких окружностей также больше R. Поэтому при малых δ множество $E_{\rho_*}(w_1, w_2)$ содержится в $\operatorname{int} E_R(w_1, w_2)$, за исключением угловых точек w_1, w_2. Так как область D_r R-выпукла, с учетом предложения 3 справедливо включение

$$w' \in E_{\rho_*}(w_1, w_2) \subset \operatorname{int} E_R(w_1, w_2) \subset D_r.$$

Но $w' \in \partial D_r$; противоречие.

Таким образом, $\rho(w) \leq R$. Поскольку (см. [7, с. 74]) для кривизны кривой имеем Γ_r

$$\frac{1}{\rho(w)} = \frac{1}{|z||f'(z)|} \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}, \quad |z| = r,$$

неравенство (4) справедливо на окружностях $\{z : |z| = r\}$, следовательно, для любого $z \in \Delta$.

Докажем обратное утверждение. Пусть для любого $z \in \Delta$ выполнено неравенство (4). Из него вытекает выполнение критерия выпуклости области $f(\Delta)$ при голоморфном отображении f:

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0, \quad z \in \Delta,$$

и по теореме наследственности для выпуклых отображений — выпуклость образа $f(\Delta_r) = D_r$ для любого фиксированного $r \in (0, 1)$. Выполнение условия (4) влечет для радиуса кривизны $\rho(w)$ кривой Γ_r справедливость неравенства $\rho(w) \leq R$ в любой точке $w \in \Gamma_r$.

Докажем R-выпуклость области D_r. Пусть D_r не R-выпукла. Тогда по предложению 1 существует $R_1 > R$ такое, что D_r не является R_1-выпуклой областью. Следовательно, существуют $w_1, w_2 \in D_r$ такие, что $E_{R_1}(w_1, w_2)$ не лежит в D_r. Поскольку область D_r выпукла, $[w_1, w_2] \subset D_r$. Будем непрерывно стягивать отрезок $[w_1, w_2]$ в его центр посредством гомотопии:

$$w_1(t) = \frac{1}{2}[w_1 + w_2 + t(w_1 - w_2)], \quad w_2(t) = \frac{1}{2}[w_1 + w_2 + t(w_2 - w_1)], \quad t \in [0, 1].$$

Обозначим $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : E_{R_1}(w_1(t_0), w_2(t_0)) \cap \partial D_r \neq \varnothing\}$. Из определения t_0 следует, что

$$\varnothing \neq (\Gamma_r \cap E_{R_1}(w_1(t_0), w_2(t_0))) \subset \partial E_{R_1}(w_1(t_0), w_2(t_0)).$$

Поэтому если рассмотреть тройку последовательно расположенных на Γ_r точек

$$\zeta_1, w_0, \zeta_2, \qquad w_0 \in \Gamma_r \cap E_{R_1}(w_1(t_0), w_2(t_0)), \quad |\zeta_1 - w_0| + |\zeta_2 - w_0| = \delta \to 0,$$

то проходящая через эти точки окружность при достаточно малых δ будет иметь радиус, не меньший R_1. Следовательно, в точке w_0 радиус кривизны кривой Γ_r удовлетворяет неравенству $\rho(w_0) \geq R_1$, что противоречит неравенству $\rho(w) < R_1$. Противоречие доказывает R-выпуклость области D_r для любого $r \in (0, 1)$.

Для доказательства R-выпуклости области D возьмем произвольные точки $w_1, w_2 \in D$, обозначим $z_1 = f^{-1}(w_1)$, $z_2 = f^{-1}(w_2) \in \Delta$. Тогда $z_1, z_2 \in \Delta_r$ при некотором $r \in (0, 1)$, а $w_1, w_2 \in D_r$. Из R-выпуклости области D_r вытекает, что

$$E_R(w_1, w_2) \subset D_r \subset D.$$

Поэтому D — R-выпуклая область. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при $R \to +\infty$ неравенство (4) из теоремы 2 трансформируется в уже известный критерий выпуклости при биголоморфном отображении f круга Δ.

Возможности использования полученного в теореме 2 критерия R-выпуклости области $f(\Delta)$ демонстрирует следующий

Пример. Выясним, при каких $a \in \mathbb{C} \setminus 0$ функция $f(z) = a^{-1}\ln(1+az)$ биголоморфно отображает круг Δ на R-выпуклую область (R фиксированное).

Голоморфность f влечет выполнение неравенства $|a| < 1$. По теореме 2 остается проверить условие

$$\frac{1}{|z||f'(z)|}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq \frac{1}{R} \quad \forall z \in \Delta \setminus \{0\},$$

т. е.

$$|a|\frac{|1+az|}{|az|}\operatorname{Re}\left\{1-\frac{az}{1+az}\right\} \geq \frac{1}{R} \quad \forall z \in \Delta \setminus \{0\}. \tag{5}$$

Обозначив $az = re^{it}, t \in \mathbb{R}, 0 < r < |a|$, перепишем (5) в виде

$$\frac{|1+re^{it}|}{r}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{1+re^{it}}\right\} \geq \frac{1}{R|a|},$$

т. е.

$$\frac{1+2r\cos t+r^2\cos^2 t}{1+2r\cos t+r^2} \geq \frac{r^2}{R^2|a|^2} \quad t \in \mathbb{R},\ 0 < r < |a|. \tag{6}$$

Обозначим $x = \cos t \in [-1,1]$. Тогда левая часть (6) может быть записана в виде функции

$$\varphi(x) = 1 + \frac{r^2(x^2-1)}{1+2rx+r^2},$$

причем

$$\varphi'(x) = \frac{2r^2(x+r)(1+rx)}{(1+2rx+r^2)^2},$$

поэтому $\min\limits_{[-1,1]}\varphi(x) = \varphi(-r) = 1-r^2$.

Следовательно, для выполнения (6) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1-r^2}{r^2} \geq \frac{1}{R^2|a|^2}, \quad 0 < r < |a|.$$

Это возможно только при условии

$$\frac{1}{|a|^2} - 1 \geq \frac{1}{R^2|a|^2} \Longleftrightarrow |a| \leq \sqrt{1-\frac{1}{R^2}},$$

при этом, как видно, задача имеет решение только при $R > 1$.

Авторы выражают огромную благодарность Е. С. Половинкину за внимательное прочтение начальной версии статьи и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

2. *Половинкин Е. С.* О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях // Тр. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа–6 сентября 1998 г.). Т. 2. Негладкий анализ и оптимизация. М.: ВИНИТИ, 1999. С. 66–138. (Итоги науки и техники).

3. *Balashov M. V., Repovš D.* Uniformly convex subsets of the Hilbert space with modulus of convexity of the second order // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 377. P. 754–761.

4. *Weber A., Reissig G.* Local characterization of strongly convex sets // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 400, N 2. P. 743–750.

5. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Достаточные признаки выпуклости // Вопросы глобальной геометрии. Л.: Наука, 1974. С. 3–52. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 45).

6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

7. *Duren P. L.* Univalent functions. New York: Springer-Verl., 1983.

Статья поступила 15 августа 2013 г., окончательный вариант — 15 мая 2014 г.

Старков Виктор Васильевич, Шмелев Никита Андреевич
Петрозаводский гос. университет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185910
`vstar@psu.karelia.ru` `pieceofinternet@yandex.ru`