Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.518.23

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ ДЛЯ $C^{1,\alpha}$–ГЛАДКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

С. Г. Басалаев

Аннотация. Получено неравенство Пуанкаре для эквирегулярных пространств Карно — Каратеодори с базисом из векторных полей, имеющих производные класса Гёльдера.

Ключевые слова: пространства Карно — Каратеодори, неравенство Пуанкаре, теоремы вложения.

1. Введение

Рассмотрим набор C^∞-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_n$, определенных в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Коммутатор* двух векторных полей X и Y определяется как величина $[X, Y] = XY - YX$. *Коммутатором порядка* r назовем итеративный коммутатор

$$[X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots [X_{i_{r-1}}, X_{i_r}] \dots]].$$

Говорят, что набор векторных полей $X_1, \dots, X_n$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ удовлетворяет *условию Хермандера* [1], если для некоторого натурального M эти векторные поля и их коммутаторы до порядка M включительно порождают все касательное расслоение $T\Omega$. Теорема Хермандера [1] гласит, что если векторные поля $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют условию Хермандера, то дифференциальный оператор

$$L = \sum_{i=2}^{n} X_i^2 + X_1$$

гипоэллиптический в Ω, т. е. если u является решением уравнения $Lu = f$ в смысле распределений и $f \in C^\infty(\Omega)$, то $u \in C^\infty(\Omega)$.

Допустимой кривой назовем абсолютно непрерывную кривую, касательный вектор к которой в почти каждой точке есть линейная комбинация $X_1, \dots, X_n$. Определим на Ω метрическую функцию $d_{cc}(x, y)$, равную точной нижней границе длин допустимых кривых, соединяющих x и y. Известным следствием условия Хермандера является возможность соединить любые две точки связного множества Ω допустимой кривой [2, 3]. Таким образом, функция $d_{cc}(x, y)$ определена и конечна для всех x, $y \in \Omega$. Более того, несложно убедиться, что она является метрикой на Ω. Такая метрика называется *метрикой Карно — Каратеодори*. Метрические пространства с метрикой Карно — Каратеодори возникают во многих приложениях, и в рамках этой теории получено много

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

интересных результатов. Одним из таких результатов является неравенство Пуанкаре, установленное в [4] в виде

$$\|f - f_B\|_{L_2(B)} \le Cr\|(X_1 f, \dots, X_n f)\|_{L_2(B)},$$

где $B = B(x,r)$ — шар в метрике d_{cc}, $f \in C^\infty(B)$ и $f_B = \frac{1}{|B|}\int\limits_B f(y)\,dy$. Затем результаты и методы этой работы были использованы многими авторами в исследовании субэллиптических уравнений [5–7], для получения оценок соболевского типа [8–11] и других приложений. Упомянем также работу [12], в которой получено неравенство Пуанкаре на группах Карно для производных произвольной степени, работы [13, 14], в которых неравенство Пуанкаре доказано для некоторых классов негладких векторных полей, и работу [15], в которой данный результат получен для $C^{M-1,1}$-гладких полей, удовлетворяющих условию Хермандера.

В [16] показано, что если на метрическом пространстве с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, выполнен некоторый аналог неравенства Пуанкаре, то становится возможным получить оценки соболевского типа. Пространства Соболева на пространствах Карно — Каратеодори служат для определения решений субэллиптических уравнений [17, 18]. Таким образом, получение неравенства Пуанкаре является центральным шагом для построения теории Соболева на этом классе метрических пространств.

В данной работе мы доказываем неравенство Пуанкаре для класса метрических пространств, образованного $C^{1,\alpha}$-гладкими векторными полями, $\alpha > 0$.

Определение 1. Фиксируем связное риманово C^∞-гладкое многообразие $\mathbb{M}$ топологической размерности N. Многообразие $\mathbb{M}$ называется (*эквирегулярным*) *пространством Карно — Каратеодори*, если в касательном расслоении $T\mathbb{M}$ выделена фильтрация подрасслоениями

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq H_2\mathbb{M} \subsetneq \dots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M} \tag{1.1}$$

такая, что для каждой точки $g \in \mathbb{M}$ существует окрестность $U(g) \subset \mathbb{M}$ с набором C^1-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_N$, образующих базис $T_v\mathbb{M}$ в каждой точке $v \in U(g)$ и удовлетворяющих следующим двум свойствам. Для каждой $v \in U(g)$ имеем

(1) $H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \dots, X_{\dim H_i}(v)\}$ — подпространство $T_v\mathbb{M}$ постоянной размерности $\dim H_i$, $i = 1, \dots, M$;

(2) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \dots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, где $k = \lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor$, $j = 1, \dots, M-1$.

Подрасслоение $H\mathbb{M}$ называется *горизонтальным*. Число M называется *глубиной* многообразия $\mathbb{M}$. *Степень* $\deg X_k$ определяется как $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$.

Из условия (2) вытекает, что у нас есть следующая «таблица коммутаторов»:

$$[X_i, X_j](v) = \sum_{k:\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v), \tag{1.2}$$

где $c_{ijk} \in C(U(g))$. Отметим, что соотношение (1.2) слабее, чем условие (2), поскольку оно лишь влечет $[H_i, H_j] \subseteq H_{i+j}$. Заметим также, что если H_i — распределения класса C^∞, то поля $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ удовлетворяют условию Хермандера.

Определение 2. *Горизонтальным градиентом* C^∞-гладкой функции f назовем величину $\nabla_H f = (X_1 f, \dots, X_{\dim H_1} f)$. По определению полагаем

$$|\nabla_H f(x)| = \left(\sum_{i=1}^{\dim H_1} (X_i f(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Геометрические свойства эквирегулярных пространств Карно — Каратеодори с векторными полями минимальной гладкости изучены в [19–23]. Используя результаты этих работ, доказываем ниже неравенство Пуанкаре для областей Джона в виде

$$\|f - f_\Omega\|_{p,\Omega} \le C\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \operatorname{diam}(\Omega)\|\nabla_H f\|_{p,\Omega}, \tag{1.3}$$

где $1 \le p < \infty$, Ω — область Джона с внутренним диаметром a и внешним диаметром b, $f \in C^\infty(\Omega)$, а ν — хаусдорфова размерность пространства $\mathbb{M}$. Постоянная C в неравенстве (1.3) не зависит ни от выбора области Ω, ни от функции f.

Используя результаты работы [16], доказываем следующие оценки в зависимости от хаусдорфовой размерности $\nu = \sum\limits_{k=1}^{N} \deg X_k$ пространства $\mathbb{M}$ (см. определение 4 и теорему 2 ниже):

- если $p < \nu$, то для $q = \frac{\nu p}{\nu - p}$ выполнено

$$\|f - f_\Omega\|_{q,\Omega} \le C_1\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \|\nabla_H f\|_{p,\Omega};$$

- если $p = \nu > 1$, то

$$\fint_\Omega \exp\left(\frac{C_2 \mathscr{H}^\nu(\Omega)^{\frac{1}{\nu}} |f(y) - f_\Omega|}{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \operatorname{diam}(\Omega)\|\nabla_H f\|_{\nu,\Omega}}\right)^{\frac{\nu}{\nu-1}} dy \le C_3;$$

- если $p > \nu$, то функция f локально непрерывна по Гёльдеру:

$$\sup_{y\in\Omega} |f(y) - f_\Omega| \le C_4\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu + \frac{\nu}{p}} \operatorname{diam}^{1-\frac{\nu}{p}}(\Omega)\|\nabla_H f\|_{p,\Omega},$$

в частности,

$$|f(x) - f(y)| \le C_4\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu + \frac{\nu}{p}} d_{cc}(x, y)^{1-\frac{\nu}{p}}\|\nabla_H f\|_{p,\Omega}.$$

Здесь постоянные C_i, $i = 1, \dots, 4$, не зависят от выбора области Ω и функции f.

2. Пространства Карно — Каратеодори

Напомним основные метрические свойства пространств, удовлетворяющих определению 1. В частности, покажем, что они являются метрическими пространствами с мерой, удовлетворяющей условию удвоения.

Определение 3. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma : [0, T] \to \mathbb{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Расстояние Карно — Каратеодори между двумя точками x, $y \in \mathbb{M}$ определяется как

$$\begin{aligned} d_{cc}(x, y) = \inf\{T > 0 : \text{существует горизонтальный путь } \gamma : [0, T] \to \mathbb{M},& \\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y,\ |\dot\gamma(t)| \le 1\}.& \end{aligned}$$

Расстояние Карно — Каратеодори является метрикой в $\mathbb{M}$ в силу следующей теоремы.

Теорема 1. 1. *Пусть $g \in \mathbb{M}$. Существует окрестность U точки g такая, что каждую пару точек $u, v \in U$ можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой γ, состоящей из не более чем L сегментов интегральных линий горизонтальных векторных полей, где L не зависит от выбора точек $x, y \in U$.*

2. *Каждую пару точек u, v в связном пространстве Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой γ, состоящей из конечного числа сегментов интегральных линий горизонтальных векторных полей.*

В случае C^∞-гладких векторных полей этот результат известен как теорема Рашевского — Чоу [2, 3]. Эта теорема доказана для полей класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, в [19] и для C^1-гладких полей — в [22].

Определение 4. Открытый шар в метрике d_{cc} с центром в x радиуса r обозначим через $B(x,r)$. (*Сферическая*) *k-мерная мера Хаусдорфа* множества E в метрике d_{cc} есть величина

$$\mathscr{H}^k(E) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \inf\Big\{\sum_i r_i^k : E \subset \bigcup_i B(x_i, r_i),\ r_i < \varepsilon\Big\}.$$

Теорема 2 [24, 19, 22]. *Хаусдорфова размерность многообразия $\mathbb{M}$ в метрике d_{cc} равна*

$$\nu = \sum_{k=1}^N \deg X_k = \sum_{i=1}^M i(\dim H_i - \dim H_{i-1}),$$

где $\dim H_0 = 0$.

Из теорем о гладкой зависимости решения ОДУ от параметра следует (см., например, [25]), что отображение

$$\theta_g : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\Bigg(\sum_{i=1}^N x_i X_i\Bigg)(g), \quad \theta_g(0) = \theta_g(0, \dots, 0) = g,$$

является $C^{1,\alpha}$-гладким диффеоморфизмом евклидова шара $B_e(0, \varepsilon_g)$ в $\mathbb{R}^N$, где ε_g — достаточно малое положительное число, на окрестность O_g точки $g \in \mathbb{M}$.

Определение 5. Упорядоченный набор чисел

$$(x_1, \dots, x_N) = \theta_g^{-1}(u) \in B_e(0, \varepsilon_g)$$

называется *координатами первого рода* точки $u = \exp\Bigg(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\Bigg)(g)$.

Можно выбрать окрестность $U(g_0)$ точки g_0 так, что $U(g_0) \subset \bigcap\limits_{g \in U(g_0)} O_g$. Тогда для каждой пары точек $u, g \in U(g_0)$ существует единственный набор чисел $(y_1, \dots, y_N)$ таких, что $u = \exp\Bigg(\sum\limits_{i=1}^N y_i X_i\Bigg)(g)$. Для каждой пары точек u и g определим неотрицательную величину

$$d_\infty(u, g) = \max\{|y_i|^{1/\deg X_i} : i = 1, \dots, N\}.$$

Величина d_∞ является *квазиметрикой* в смысле [26], т. е. для любых u, v, $w \in U(g_0)$ выполнены условия:

1) $d_\infty(u, v) \geq 0$ и равенство достигается только в случае $u = v$;

2) $d_\infty(u,v) = d_\infty(v,u)$;

3) существует постоянная $Q \geq 1$ такая, что

$$d_\infty(u,w) \leq Q(d_\infty(u,v) + d_\infty(v,w)).$$

Открытый шар в квазиметрике d_∞ радиуса r с центром в $g \in \mathbb{M}$ обозначим через $\operatorname{Box}(g,r)$.

Следующее утверждение доказано для достаточно гладких векторных полей в [26, 27], для полей класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, — в [19] и для C^1-гладких полей — в [23].

Теорема 3 (теорема Ball–Box). *Для компактной окрестности $\mathscr{K} \subset \mathbb{M}$ существуют постоянные $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ и $r_0 > 0$, не зависящие от $x \in \mathscr{K}$, такие, что*

$$\operatorname{Box}(x, C_1 r) \subset B(x,r) \subset \operatorname{Box}(x, C_2 r)$$

для всех $r \in (0, r_0)$ и $x \in \mathscr{K}$.

Покажем, что мера $\mathscr{H}^\nu$ локально удовлетворяет условию удвоения

$$\mathscr{H}^\nu(B(x,2r)) \leq C\mathscr{H}^\nu(B(x,r)).$$

Это непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. *Для компактной окрестности $\mathscr{K} \subset \mathbb{M}$ существуют постоянные $C > 0$ и $r_0 > 0$ такие, что*

$$\frac{\mathscr{H}^\nu(B(x,r))}{\mathscr{H}^\nu(B(x,r_0))} \geq C\left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu \tag{2.1}$$

для всех $r \in (0, r_0]$ и $x \in \mathscr{K}$.

Доказательство. Для каждого $x \in \mathscr{K}$ найдется радиус $r_x > 0$ такой, что в $\operatorname{Box}(0, r_x) \subset \mathbb{R}^N$ определено отображение θ_x и на $\operatorname{Box}(x, r_x) = \theta_x(\operatorname{Box}(0, r_x))$ определена квазиметрика d_∞. Положим $r_{\mathscr{K}} = \frac{1}{2}\inf\{r_x : x \in \mathscr{K}\}$. Поскольку $\mathscr{K}$ — компакт, выполнено $r_{\mathscr{K}} > 0$. Далее, для всех $x \in \mathscr{K}$ и $r \in (0, r_{\mathscr{K}})$ имеем

$$lr^\nu \leq \mathscr{H}^\nu(\operatorname{Box}(x,r)) = \int\limits_{\operatorname{Box}(0,r)} \mathscr{J}(\theta_x, y)\, dy \leq Lr^\nu,$$

где $0 < l \leq \mathscr{J}(\theta_x, y) \leq L < \infty$ для всех $x \in \mathscr{K}$, $y \in \overline{\operatorname{Box}(0, r_{\mathscr{K}})}$. Из теоремы 3 следует, что

$$\frac{\mathscr{H}^\nu(B(x,r))}{\mathscr{H}^\nu(B(x,r_0))} \geq \frac{\mathscr{H}^\nu(\operatorname{Box}(x, C_1 r))}{\mathscr{H}^\nu(\operatorname{Box}(x, C_2 r_0))} \geq \frac{lC_1 r^\nu}{LC_2 r_0^\nu}$$

для всех $0 < r \leq r_0 \leq C_2^{-1} r_{\mathscr{K}}$. Теорема доказана. □

3. Группы Карно

Определение 6. Группа Ли $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, \cdot)$ называется *группой Карно*, если ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей V допускает следующую стратификацию:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_M, \quad [V_1, V_k] = V_{k+1},\ k = 1, \dots, M-1, \quad [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Выберем в V базис из левоинвариантных векторных полей $Y_1, \dots, Y_N$ так, что $V_k = \operatorname{span}\{Y_{\dim V_{k-1}+1}, \dots, Y_{\dim V_k}\}$. Выбранный базис назовем *градуированным.* Положим $\deg Y_k = i$, если $Y_k \in V_i$. Легко видеть, что группа Карно является примером пространства Карно — Каратеодори с C^∞-гладкими векторными полями.

Система координат первого рода $\theta_0(x_1,\dots,x_N)=\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N x_iY_i\Bigr)(0)$ является глобальной системой координат на $\mathbb{G}$ (можно даже считать, что θ_0 — тождественное отображение, полагая $Y_i(0)=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,N$).

Определение 7. Определим однопараметрическую группу *растяжений* δ_t на $\mathbb{G}$ следующим образом:

$$\delta_t\theta_0(x_1,\dots,x_N)=\theta_0(tx_1,\dots,t^{\deg Y_N}x_N),\quad t>0.$$

Положим $Rf(y)=f(y^{-1})$ и определим $[Y]^Rf=RYRf$. Если Y — левоинвариантное векторное поле, то $[Y]^R$ — соответствующее ему правоинвариантное векторное поле.

Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{G})$. Положим $\varphi_t(x)=t^{-\nu}\varphi(\delta_{t^{-1}}x)$. Поскольку в базисе $Y_1,\dots,Y_N$ матрица $D\delta_t$ диагональна, выполнено

$$Y_k(\varphi_t)=t^{-\deg Y_k}(Y_k\varphi)_t,\quad [Y_k]^R(\varphi_t)=t^{-\deg Y_k}([Y_k]^R\varphi)_t. \tag{3.1}$$

Лемма 5 [4]. *Пусть $\mathbb{G}=(\mathbb{R}^N,\cdot)$ — группа Карно с градуированным базисом алгебры Ли левоинвариантных векторных полей $Y_1,\dots,Y_N$.*

(a) *Существуют дифференциальные операторы D_{ik} такие, что*

$$Y_k\varphi=\sum_{i=1}^{\dim V_1}[Y_i]^RD_{ik}\varphi,\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{G}),\ k=1,\dots,N.$$

(b) *Существуют дифференциальные операторы $D_{(i)}$ такие, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t=\sum_{i=1}^{\dim V_1}[Y_i]^R(D_{(i)}\varphi)_t,\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{G}).$$

4. Локальная геометрия пространств Карно — Каратеодори

Определение 8. Используя координаты первого рода θ_g^{-1}, определим *растяжения* $\Delta_\varepsilon^g:B(g,r)\to B(g,\varepsilon r)$, $0<r\le\varepsilon_g$: элементу $x=\exp\Bigl(\sum\limits_{i=1}^N x_iX_i\Bigr)(g)$ сопоставляем

$$\Delta_\varepsilon^gx=\exp\Biggl(\sum_{i=1}^N x_i\varepsilon^{\deg X_i}X_i\Biggr)(g)$$

в случае, когда правая часть определена.

Следующая теорема обобщает результаты, полученные при дополнительных предположениях о гладкости векторных полей в [27–29].

Теорема 6. *Фиксируем $g\in\mathbb{M}$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Коэффициенты*

$$\hat{c}_{ijk}=\begin{cases} c_{ijk}(g), & \textit{если } \deg X_i+\deg X_j=\deg X_k,\\ 0 & \textit{иначе,}\end{cases}$$

где $c_{ijk}(\cdot)$ — функции из таблицы коммутаторов (1.2), являются структурными константами нильпотентной градуированной стратифицированной алгебры Ли на $\mathbb{R}^N$. Иными словами, можно построить на $\mathbb{R}^N$ векторные поля $\big(\widehat{X}^g_j\big)'$, $j = 1,\dots,N$, так, что экспоненциальное отображение

$$(x_1,\dots,x_N) \mapsto \exp\Bigg(\sum_{i=1}^N x_i\big(\widehat{X}^g_j\big)'\Bigg)(0)$$

тождественно и имеет место следующая таблица коммутаторов:

$$\big[\big(\widehat{X}^g_i\big)', \big(\widehat{X}^g_j\big)'\big] = \sum_{k=1}^N \hat{c}_{ijk}\big(\widehat{X}^g_k\big)' = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(g)\big(\widehat{X}^g_k\big)'. \tag{4.1}$$

(2) *В некоторой окрестности* $\mathrm{Box}(g, r_g)$ *можно определить векторные поля* $\widehat{X}^g_i = D\theta_g\big\langle\big(\widehat{X}^g_i\big)'\big\rangle$, *наделяющие эту окрестность структурой локальной группы Ли* (*см.* *определение* 10 *ниже*).

(3) *Для* $x \in \mathrm{Box}(g, r_g)$ *рассмотрим векторные поля*

$$X^\varepsilon_i(x) = \big(\Delta^g_{\varepsilon^{-1}}\big)_*(\varepsilon^{\deg X_i}X_i)\big(\Delta^g_\varepsilon x\big), \quad i = 1,\dots,N.$$

Тогда выполнено следующее равенство:

$$X^\varepsilon_i(x) = \widehat{X}^g_i(x) + \sum_{j=1}^N a_{ij}(x)\widehat{X}^g_j(x), \tag{4.2}$$

где $a_{ij}(x) = o(\varepsilon^{\max\{0, \deg X_j - \deg X_i\}})$ *для* $x \in \mathrm{Box}(g, r_g)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Более того, для всякого компактного множества $K \subset \mathbb{M}$ *существует* $r_K > 0$ *такое, что соотношение* (4.2) *выполнено для всех* $g \in K$ *и* $x \in \mathrm{Box}(g, r_K)$, *и все* $o(\cdot)$ *равномерны по* $g \in K$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Утверждение (1) теоремы доказано в [19]. Утверждение (2) следует из второй теоремы Ли [30, 31]. Утверждение (3) получено в [20] для векторных полей класса $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, и в [21] — для C^1-гладких векторных полей.

Из представления (4.2) следует теорема нильпотентизации Громова в координатах первого рода. Заметим, что впервые она была сформулирована в [27, с. 130] в координатах второго рода.

Теорема 7 [20, 21]. *Сходимость* $X^\varepsilon_i \to \widehat{X}^g_i$ *при* $\varepsilon \to 0$, $i = 1,\dots,N$, *выполнена в точках* $\mathrm{Box}(g, r_g)$, *и эта сходимость равномерна по* g, *принадлежащей некоторой компактной окрестности.*

Определение 9. Связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}_g\mathbb{M} = (\mathbb{R}^N, \cdot)$ с нильпотентной градуированной алгеброй Ли $V' = \mathrm{span}\big\{\big(\widehat{X}^g_k\big)'\big\}_{k=1}^N$ называется *нильпотентным касательным конусом* пространства Карно — Каратеодори $\mathbb{M}$ в точке $g \in \mathbb{M}$. Условие (2) определения 1 обеспечивает, что $\mathbb{G}_g\mathbb{M}$ является группой Карно. Однопараметрическую группу растяжений на группе $\mathbb{G}_g\mathbb{M}$ будем обозначать символом δ^g_t.

Определение 10. Группе Карно $\mathbb{G}_g\mathbb{M}$ соответствует *локальная группа Карно* $\mathscr{G}^g = (B(g, r_g), \star)$ с алгеброй Ли, порожденной базисными векторными полями $\widehat{X}^g_1,\dots,\widehat{X}^g_N$. Она определяется так, что отображение θ_g является групповым изоморфизмом некоторой окрестности $U(0) \subset \mathbb{G}_g\mathbb{M}$ на окрестность

$B(g, r_g) \subset \mathbb{M}$, т. е. групповая операция на элементах $x, y \in \mathscr{G}^g$ определяется как $x \star y = \theta_g(\theta_g^{-1} x \cdot \theta_g^{-1} y)$, когда правая часть уравнения имеет смысл.

В дальнейшем полагаем, что базисные векторные поля $X_1, \dots, X_N$ имеют гладкость $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$. В этом случае оценка скорости убывания коэффициентов в выражении (4.2) может быть улучшена.

Лемма 8 [19]. *Справедливо разложение*

$$\widehat{X}_j^x(y) - X_j(y) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x, y) \widehat{X}_k^x(y), \tag{4.3}$$

где

$$a_{jk}(x, y) = \begin{cases} O(r^\alpha), & \deg X_k \le \deg X_j, \\ O(r^{\alpha + \deg X_k - \deg X_j}), & \deg X_k > \deg X_j, \end{cases}$$

при $y \to x$, где все $O(\cdot)$ равномерны по $x \in K \Subset \mathbb{M}$, $y \in B(x, r)$.

5. Неравенство Пуанкаре

Определение 11. Пусть $K \subset \mathbb{M}$ — компактная окрестность некоторой точки $g \in \mathbb{M}$. Фиксируем постоянную $r_0 > 0$ такую, что для всех $x \in K$ определен диффеоморфизм θ_x некоторой окрестности нуля в шар $B(x, r_0)$ и $B(x, r_0) \subset \mathscr{G}^x$. Обозначим

$$K_{r_0} = \{x \in \mathbb{M} : \operatorname{dist}_{cc}(x, K) \le r_0\}.$$

Найдется окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^N$ такая, что $\theta_x(\overline{U}) \subset B(x, r_0)$ для всех $x \in K$. *Сверткой* функций $f \in C^1(K_{r_0})$ и $\psi \in C_0^\infty(U)$ назовем функцию $f * \psi : K \to \mathbb{R}$, заданную по правилу

$$f * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\theta_x(y^{-1})) \psi(y)\, dy, \quad x \in K, \tag{5.1}$$

где y^{-1} — взятие обратного элемента в группе $\mathbb{G}_x\mathbb{M}$. Условия, приведенные выше, обеспечивают корректность определения (5.1).

Лемма 9. *Для всех $k = 1, \dots, N$ и $x \in K$ имеют место соотношения*

$$\widehat{X}_k^x (f * \psi)(x) = -f * \big(\widehat{X}_k^x\big)' \psi(x), \quad \big(\widehat{X}_k^x f\big) * \psi(x) = -f * \big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R \psi(x). \tag{5.2}$$

Доказательство. По определению векторных полей $\widehat{X}_k^x$ выполнено

$$\widehat{X}_k^x f(\theta_x(y)) = \big(\widehat{X}_k^x\big)' (f \circ \theta_x)(y).$$

Положим $Rf(x) = f(x^{-1})$. Поскольку отображение θ_x является изоморфизмом локальных групп, выполнено $R(f \circ \theta_x)(y) = (Rf)(\theta_x(y))$. Таким образом, имеем

$$\widehat{X}_k^x \int_{\mathbb{R}^N} (Rf)(\theta_x(y)) \psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{X}_k^x (Rf)(\theta_x(y)) \psi(y)\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \big(\widehat{X}_k^x\big)' (Rf \circ \theta_x)(y) \psi(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^N} (Rf \circ \theta_x)(y) \big(\widehat{X}_k^x\big)' \psi(y)\, dy.$$

Первое равенство в утверждении леммы доказано. Далее,

$$R\big(\widehat{X}_k^x f\circ\theta_x\big)=R\big(\widehat{X}_k^x\big)'(f\circ\theta_x)=R\big(\widehat{X}_k^x\big)'R^2(f\circ\theta_x)=\big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R R(f\circ\theta_x).$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\big(\widehat{X}_k^x f\big)(\theta_x(y^{-1}))\psi(y)\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R(f\circ\theta_x)(y^{-1})\psi(y)\,dy$$
$$=-\int\limits_{\mathbb{R}^N}(f\circ\theta_x)(y^{-1})\big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R\psi(y)\,dy.$$

Лемма доказана. □

Обозначим $\psi_t^x(y)=t^{-\nu}\psi\big(\delta_{t^{-1}}^x y\big)$, где δ_t^x — однопараметрическая группа растяжений в группе $\mathbb{G}_x\mathbb{M}$. Заметим, что для всех $0<t\le 1$ свертка $f*\psi_t^x$ определена корректно.

Лемма 10. *Имеют место представления*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f*\psi_t^x\big)(x)=-\sum_{i=1}^{\dim H_1}\widehat{X}_i^x f*\big(D_{(i)}^x\psi\big)_t^x(x),\tag{5.3}$$

$$\widehat{X}_k^x\big(f*\psi_t^x\big)(x)=t^{1-\deg X_k}\sum_{i=1}^{\dim H_1}\widehat{X}_i^x f*\big(D_{ik}^x\psi\big)_t^x(x),\tag{5.4}$$

где $k=1,\dots,N$, $D_{(i)}^x$ и D_{ik}^x — дифференциальные операторы на $\mathbb{G}_x\mathbb{M}$, определяемые из леммы 5.

Доказательство. Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}\big(f*\psi_t^x\big)=f*\big(\frac{\partial}{\partial t}\psi_t^x\big)$, представление (5.3) сразу следует из лемм 5(b) и 9:

$$f*\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi_t^x\right)=\sum_{i=1}^{\dim H_1}f*\big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R\big(D_{(i)}^x\psi\big)_t^x=-\sum_{i=1}^{\dim H_1}\widehat{X}_k^x f*\big(D_{(i)}^x\psi\big)_t^x.$$

Для доказательства второго равенства воспользуемся равенством (3.1) и леммой 5(a). Имеем

$$\big(\widehat{X}_k^x\big)'\psi_t^x(y)=t^{-\deg X_k}\big(\big(\widehat{X}_k^x\big)'\psi\big)_t^x(y)$$
$$=t^{-\deg X_k}\sum_{i=1}^{\dim H_1}\big(\big[\big(\widehat{X}_i^x\big)'\big]^R D_{ik}^x\psi\big)_t^x(y)=t^{1-\deg X_k}\sum_{i=1}^{\dim H_1}\big[\big(\widehat{X}_i^x\big)'\big]^R\big(D_{ik}^x\psi\big)_t^x(y).$$

Далее, соотношение (5.4) следует из леммы 9. □

Напомним, что L_p-*нормой* $\|f\|_{p,B}$ локально интегрируемой функции f по множеству $B\subset\mathbb{M}$ называется величина

$$\|f\|_{p,B}=\left(\int\limits_B|f(y)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 11 (неравенство типа Юнга). *В условиях определения* 11 *найдутся постоянные* $C > 0$ *и* $\sigma \geq 1$ *такие, что для всякого шара* $B \subset K$ *радиуса* $0 < r \leq 1$, *любой пары функций* $f \in C^1(\sigma B)$, $\psi \in C_0^\infty(U)$ *и всех* $0 < t \leq r$ *выполнено*

$$\left\| f * \psi_t^x \right\|_{p,B} \leq C\|f\|_{p,\sigma B}\|\psi\|_1.$$

Доказательство. Заменой переменных $y = \delta_t^x z$ свертка $f*\psi_t^x$ приводится к следующему виду:

$$f * \psi_t^x(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\theta_x(y^{-1}))t^{-\nu}\psi\big(\delta_{t^{-1}}^x y\big)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\big(\theta_x\big(\delta_t^x z^{-1}\big)\big)\psi(z)\,dz.$$

Введем для каждого $0 < t \leq r$ и $z = (z_1, \dots, z_N) \in U$ отображение $h_{tz} : K \to \mathbb{M}$ следующим образом:

$$h_{tz}(x) = \theta_x\big(\delta_t^x z^{-1}\big) = \exp\Bigg(-\sum_{k=1}^N z_k t^{\deg X_k}\widehat{X}_k^x\Bigg)(x) = \exp\Bigg(-\sum_{k=1}^N z_k t^{\deg X_k} X_k\Bigg)(x).$$

Используя интегральное неравенство Минковского (см., например, [32]), получаем

$$\left\| f * \psi_t^x \right\|_{p,B} = \Bigg(\int\limits_B \Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^N} f\circ h_{tz}(x)\psi(z)\,dz\Bigg|^p d\mathscr{H}^\nu(x)\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\Bigg(\int\limits_B |f\circ h_{tz}(x)\psi(z)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(x)\Bigg)^{\frac{1}{p}}dz = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\Bigg(\int\limits_B |f\circ h_{tz}(x)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(x)\Bigg)^{\frac{1}{p}}|\psi(z)|\,dz.$$

Заметим, что $d_{cc}(x, h_{tz}(x)) \leq tr_0$ для всех $x \in K$ и $z \in \overline{U}$, где $U \subset \mathbb{R}^N$ и $r_0 > 0$ те же, что в определении 11. Следовательно, $h_{tz}(B(x,r)) \subset B(x, r + rr_0)$ для всех $0 < t \leq r_0$. Кроме того, отображение h_{tz} является C^1-диффеоморфизмом. Стало быть, найдется постоянная $0 < L < \infty$ такая, что $L^{-1} \leq J(x, h_{tz}) \leq L$ для всех $x \in K$, $z \in \overline{U}$ и $t \in [0, r_0]$. Отсюда

$$\int\limits_B |f\circ h_{tz}(x)|^p\,d\mathscr{H}(x) \leq L\int\limits_{h_{tz}(B)}|f(x)|^p\,d\mathscr{H}(x) \leq L\int\limits_{(1+r_0)B}|f(x)|^p\,d\mathscr{H}(x).$$

Окончательно получаем

$$\left\| f * \psi_t^x \right\|_{p,B} \leq L^{\frac{1}{p}}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Bigg(\int\limits_{(1+r_0)B}|f(x)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(x)\Bigg)^{\frac{1}{p}}|\psi(z)|\,dz = L^{\frac{1}{p}}\|f\|_{p,(1+r_0)B}\|\psi\|_1.$$

Лемма доказана. □

Следующая лемма является основным шагом доказательства неравенства Пуанкаре. Доказательство опирается на представления левоинвариантных векторных полей, полученные в [4], однако в деталях существенно отличается от [4].

Лемма 12. *Пусть* $g \in \mathbb{M}$ *и* $1 \leq p < \infty$. *Найдутся такие* $r_0 > 0$, $C > 0$ *и* $\sigma \geq 1$, *что для любого шара* $B = B(x,r)$ *такого, что* $\overline{\sigma B} \subset B(g, r_0)$, *и для всех* $f \in C^1(B(g,r_0))$ *выполнено*

$$\inf_{a\in\mathbb{R}}\|f - a\|_{p,B} \leq Cr\|\nabla_H f\|_{p,\sigma B} + Cr^\alpha\|f\|_{p,\sigma B}. \tag{5.5}$$

Доказательство. Шаг 1. Выберем $r_0 > 0$ так, что для каждой точки $x \in \overline{B}(g, r_0)$ определен диффеоморфизм θ_x некоторой окрестности нуля в шар $B(x, r_0)$ и $B(x, r_0) \subset \mathscr{G}^x$. Положим $U = \bigcap\limits_{x \in \overline{B}(g,r_0)} \theta_x^{-1}(B(x, r_0))$. Для заданных r_0 и U будут выполнены условия определения 11.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(U)$, $\varphi \geq 0$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$. Тогда для любого шара B такого, что $2B \subset B(g, r_0)$, и всякой функции $f \in C^1(2B)$ выполнено

$$f * \varphi_t^x(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\theta_x(y^{-1}))\varphi\big(\delta_{t^{-1}}^x y\big)t^{-\nu}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f\big(\theta_x\big(\delta_t^x z^{-1}\big)\big)\varphi(z)\, dz \to f(x)$$

при $t \to 0$ и эта сходимость равномерна по $x \in B$. Оценим левую часть неравенства (5.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}\|f - a\|_{p,B} &\leq \big\|f - f * \varphi_r^x\big\|_{p,B} + \big\|f * \varphi_r^x - a\big\|_{p,B} \\ &= \left\| \int\limits_0^r \frac{d}{dt}\big(f * \varphi_t^x\big)\, dt \right\|_{p,B} + \big\|f * \varphi_r^x - a\big\|_{p,B}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Шаг 2. Оценим первое слагаемое в правой части (5.6). Используя представление (5.3) из леммы 10 и разложение векторных полей (4.3), получаем

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t} f * \varphi_t^x(x)\right| &\leq \sum_{i=1}^{\dim H_1} \big|\widehat{X}_i^x f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x(x)\big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{\dim H_1} \big|X_i f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x(x)\big| + \sum_{i=1}^{\dim H_1}\sum_{k=1}^{N} \big|a_{ik}\widehat{X}_k^x f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x(x)\big|. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Оценим первое слагаемое в (5.7). Применяя интегральное неравенство Минковского и лемму 11, имеем

$$\left(\int\limits_B \left(\int\limits_0^r \big|X_i f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big|\, dx\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_0^r \big\|X_i f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big\|_{p,B}\, dt \leq Cr\|X_i f\|_{p,2B}.$$

Далее, оценим второе слагаемое в правой части неравенства (5.7). Заметим, что подынтегральная функция свертки

$$a_{ik}(x, \theta_x(y^{-1}))\, \widehat{X}_k^x f(\theta_x(y^{-1}))\, \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x(y)$$

отлична от нуля только для пар (x, y) таких, что $d_{cc}(x, \theta_x(y^{-1})) \leq r_0 t$. По лемме 8 найдется постоянная $C > 0$ такая, что $|a_{ik}(x, z)| \leq Ct^{\deg X_k + \alpha - 1}$ для всех $t \leq r$, $k = 1, \dots, N$ и x, y таких, что $d_{cc}(x, z) \leq r_0 t$. Используя равенство (3.1), получаем

$$\int\limits_0^r \big|a_{ik}\widehat{X}_k^x f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big|\, dt \leq \int\limits_0^r Ct^{\deg X_k + \alpha - 1}\big|\widehat{X}_k^x f * \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big|\, dt$$

$$= C\int\limits_0^r t^{\deg X_k + \alpha - 1}\big|f * \big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R \big(D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big|\, dt = C\int\limits_0^r t^{\alpha - 1}\big|f * \big(\big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R D_{(i)}^x\varphi\big)_t^x\big|\, dt.$$

Обозначим $\psi_{ik}^x = \big[\big(\widehat{X}_k^x\big)'\big]^R D_{(i)}^x\varphi$. Из неравенства Минковского и леммы 11 следует, что

$$\left(\int\limits_B \left(\int\limits_0^r t^{\alpha-1}\big|f*\big(\psi_{ik}^x\big)_t\big|\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \int\limits_0^r \left(\int\limits_B t^{p(\alpha-1)}\big|f*\big(\psi_{ik}^x\big)_t\big|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$= \int\limits_0^r t^{\alpha-1}\big\|f*\big(\psi_{ik}^x\big)_t\big\|_{p,B}\,dt \le C\int\limits_0^r t^{\alpha-1}\|f\|_{p,2B}\,dt = \frac{C}{\alpha} r^\alpha \|f\|_{p,2B}.$$

Таким образом,

$$\big\|f - f*\varphi_r^x\big\|_{p,B} \le Cr\|\nabla_H f\|_{p,2B} + Cr^\alpha\|f\|_{p,2B}.$$

Шаг 3. Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (5.6). Рассмотрим набор векторных полей $\{r^{\deg X_k}X_k\}_{k=1}^N$ и ассоциированную с ними метрику $d_{r,c}$. По неравенству Пуанкаре для риманова случая для каждой функции $f*\varphi_r^x$ и шара B найдется такая постоянная a, что

$$\int\limits_{\sigma^{-1}B} \big|f*\varphi_r^x - a\big|^p \le C\sum_{k=1}^N \int\limits_{\sigma B} \big|r^{\deg X_k}X_k\big(f*\varphi_r^x\big)\big|^p.$$

Используя разложение векторных полей (4.3), получаем

$$r^{p\deg X_k}\big|X_k\big(f*\varphi_r^x\big)\big|^p \le Cr^{p\deg X_k}\left(\big|\widehat{X}_k^x\big(f*\varphi_r^x\big)\big|^p + \sum_{j=1}^N \big|a_{kj}\widehat{X}_j^x\big(f*\varphi_r^x\big)\big|^p\right) \tag{5.8}$$

для некоторого $C = C(p,N) \ge 1$. Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (5.8). По представлению (5.4) из леммы 10 следует, что

$$r^{\deg X_k}\big\|\widehat{X}_k^x\big(f*\varphi_r^x\big)\big\|_{p,B} \le Cr^{\deg X_k}\sum_{i=1}^{\dim H_1} r^{1-\deg X_k}\big\|\widehat{X}_i^x f*\big(D_{ik}^x\varphi\big)_t^x(x)\big\|_{p,B}$$

$$\le C'r\sum_{i=1}^{\dim H_1}\big\|\widehat{X}_i^x f\big\|_{p,2B} = C'r\sum_{i=1}^{\dim H_1}\|X_i f\|_{p,2B}.$$

Последнее равенство выполнено, поскольку $\widehat{X}_i^x(x) = X_i(x)$ для всех $i = 1,\dots,N$. Оценим второе слагаемое в правой части (5.8). Поскольку в шаре B радиуса r выполнено $a_{kj} = O(r^{\deg X_j - \deg X_k + \alpha})$, по равенству (3.1) и лемме 11 имеем

$$r^{\deg X_k}\big\|a_{kj}\widehat{X}_j^x\big(f*\varphi_r^x\big)\big\|_{p,B} \le Cr^{\deg X_j+\alpha}\big\|\widehat{X}_j^x\big(f*\varphi_r^x\big)\big\|_{p,B}$$

$$= Cr^{\deg X_j+\alpha}\big\|f*\big(\widehat{X}_j^x\big)'\varphi_r^x\big\|_{p,B} = Cr^\alpha\big\|f*\big(\big(\widehat{X}_j^x\big)'\varphi\big)_r^x\big\|_{p,B} \le Cr^\alpha\|f\|_{p,2B}.$$

Таким образом,

$$\inf_{a\in\mathbb{R}}\big\|f*\varphi_r^x - a\big\|_{p,B} \le Cr\|\nabla_H f\|_{p,2\sigma^2 B} + Cr^\alpha\|f\|_{p,2\sigma^2 B}.$$

Отсюда и из результатов шага 2 следует утверждение леммы. □

Определение 12. Область $\Omega \subset \mathbb{M}$ называется *областью Джона класса* $J(a,b)$, $0 < a \le b$, если существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что каждую $x \in \Omega$

можно соединить с x_0 спрямляемой кривой $\gamma : [0,l] \to \Omega$, параметризованной длиной дуги, такой, что

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(l) = x_0,\ l \le b, \quad \operatorname{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \ge \frac{as}{l} \text{ для всех } s \in [0,l].$$

Шары в метрике Карно — Каратеодори являются одним из очевидных примеров областей Джона.

Для получения оценок на областях Джона существует хорошо известный метод (см., например, [33, 34, 16, 12]). Метод заключается в построении подходящего покрытия области Джона шарами и использовании соответствующей оценки для шара. Следовательно, достаточно получить оценку только для шаров малого радиуса. Для удобства процитируем [12], где этот метод воспроизведен в наиболее общем виде.

Теорема 13 [12]. *Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — метрическое пространство с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, $\mathscr{P}$ — векторное пространство функций $P : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям*

$$\sup_{x\in sB} |P(x)| \le Cs^l \sup_{x\in B} |P(x)|, \quad \sup_{x\in B} |P(x)| \le \frac{C}{\mu(B)} \int\limits_B |P(x)|\, d\mu(x) \tag{5.9}$$

для всех шаров $B \subset \mathbb{X}$, чисел $s \ge 1$ и функций $P \in \mathscr{P}$, где $l \ge 0$ и $C > 0$ не зависят от функции P и шара B. Пусть $\Omega \subset \mathbb{X}$ — область Джона класса $J(a,b)$, $0 < a \le b$, с выделенной точкой x_0, f и g — измеримые функции на Ω, $\sigma \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $p \le q \le \infty$, $\lambda > 0$ и для любого шара B такого, что $\sigma B \subset \Omega$, существует функция $P(B) \in \mathscr{P}$ такая, что

$$\|f - P(B)\|_{q,B} \le C \operatorname{diam}(B)^\lambda \|g\|_{p,\sigma B}.$$

Тогда

$$\|f - P(B_0)\|_{q,\Omega} \le C\left(\frac{b}{a}\right)^\theta \operatorname{diam}(\Omega)^\lambda \|g\|_{p,\Omega},$$

где $B_0 = B\big(x_0, \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial\Omega)}{\sigma}\big)$ и $\theta = \begin{cases} l+\nu, & \text{если } q \ne \infty, \\ l+\nu+\nu/p, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$

Постоянные функции дают очевидный пример функций, удовлетворяющих условию (5.9), так как при $l = 0$ и $C = 1$ неравенства превращаются в тождества.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 14 (неравенство Пуанкаре). *Пусть $g \in \mathbb{M}$ и $1 \le p < \infty$. Тогда найдутся такие $C_p > 0$ и $r_0 > 0$, что для каждой области Джона $\Omega \subset B(g, r_0)$ класса $J(a,b)$, $0 < a \le b$, и для любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$ имеет место оценка*

$$\int\limits_\Omega |f(y) - f_\Omega|^p\, d\mathscr{H}^\nu(y) \le C_p \left(\frac{b}{a}\right)^{p\nu} \operatorname{diam}(\Omega)^p \int\limits_\Omega |\nabla_H f(y)|^p\, d\mathscr{H}^\nu(y),$$

где $f_\Omega = [\mathscr{H}^\nu(\Omega)]^{-1} \int\limits_\Omega f(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y)$.

Доказательство. Пусть в шаре $B(g, r_0)$ выполнены условия леммы 12, $B = B(x, \sigma r) \subset B(g, r_0)$ и $f \in C^\infty(\sigma B)$. Положим

$$f_B = [\mathscr{H}^\nu(B)]^{-1} \int\limits_B f(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y).$$

Применив лемму 12 к функции $f - f_B$, получим

$$\inf_{a\in\mathbb{R}} \|f-a\|_{p,B} \le Cr\|\nabla_H f\|_{p,\sigma B} + Cr^{\alpha}\|f-f_B\|_{p,\sigma B}.$$

Заметим, что левую часть неравенства можно заменить на $\|f - f_B\|_{p,B}$, поскольку

$$\|f_B - a\|_{p,B} = [\mathscr{H}^\nu(B)]^{\frac{1}{p}}|f_B - a| = [\mathscr{H}^\nu(B)]^{\frac{1}{p}}[\mathscr{H}^\nu(B)]^{-1}\left|\int\limits_B (f-a)\,d\mathscr{H}^\nu\right|$$
$$\le [\mathscr{H}^\nu(B)]^{\frac{1}{p}-1}[\mathscr{H}^\nu(B)]^{\frac{1}{q}}\|f-a\|_{p,B} = \|f-a\|_{p,B},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (для $p=1$ доказательство аналогично). Отсюда

$$\|f-f_B\|_{p,B} \le \|f-a\|_{p,B} + \|a-f_B\|_{p,B} \le 2\|f-a\|_{p,B} \tag{5.10}$$

для любого $a \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\|f-f_B\|_{p,B} \le Cr\|\nabla_H f\|_{p,\sigma B} + Cr^{\alpha}\|f-f_B\|_{p,\sigma B}.$$

Фиксируем шар $B_1 = B_1(x_1, r_1)$ такой, что $\sigma B_1 \subset B_0$. Тогда для любого шара B, удовлетворяющего условию $\sigma B \subset B_1$, верно

$$\int\limits_B |f-f_B|^p\,d\mathscr{H}^\nu \le C^p\left(r\left(\int\limits_{\sigma B}|\nabla_H f|^p\,d\mathscr{H}^\nu\right)^{\frac{1}{p}} + r^{\alpha}\left(\int\limits_{\sigma B}|f-f_B|^p\,d\mathscr{H}^\nu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$
$$\le 2^{p-1}C^p\left(r^p\int\limits_{\sigma B}|\nabla_H f|^p\,d\mathscr{H}^\nu + r^{p\alpha}\int\limits_{\sigma B}|f-f_B|^p\,d\mathscr{H}^\nu\right)$$
$$\le 2^{p-1}C^p r^{p\alpha}\left(\int\limits_{\sigma B}\left(r_1^{p(1-\alpha)}|\nabla_H f|^p + |f-f_B|^p\right)d\mathscr{H}^\nu\right).$$

Поскольку шар B_1 является областью Джона с $a = b = r_1$, применяя теорему 13 для пары функций $f - f_B$, $g = \left(r_1^{p(1-\alpha)}|\nabla_H f|^p + |f-f_B|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ и семейства постоянных функций в качестве $\mathscr{P}$, получаем

$$\int\limits_{B_1}|f-f_{\sigma^{-1}B_1}|^p\,d\mathscr{H}^\nu \le 2^{p-1}C^p\left(r_1^p\int\limits_{B_1}|\nabla_H f|^p\,d\mathscr{H}^\nu + r_1^{p\alpha}\int\limits_{B_1}|f-f_{B_1}|^p\,d\mathscr{H}^\nu\right).$$

Используя неравенство (5.10), можно заменить левую часть последнего неравенства на $\int\limits_{B_1}|f-f_{B_1}|$. Тогда при достаточно малых r_1 таких, что $2^{p-1}C^p r_1^{p\alpha} < \frac{1}{2}$, имеем

$$\int\limits_{B_1}|f-f_{B_1}|^p\,d\mathscr{H}^\nu \le 2^p C^p r^p\int\limits_{B_1}|\nabla_H f|^p\,d\mathscr{H}^\nu, \tag{5.11}$$

и утверждение теоремы выполнено для всякого $\Omega = B_1$ такого, что $\sigma B_1 \subset B_0$. Чтобы получить утверждение теоремы для произвольной области Джона Ω, остается применить теорему 13 к паре функций f, $|\nabla f|$ и заметить, что для $\|f-f_\Omega\|_{p,\Omega}$ выполнена оценка, аналогичная (5.10). $\square$

6. Оценки соболевского типа

Пусть $(\mathbb{X}, d, \mu)$ — связное метрическое пространство с мерой. В [16] доказано следующее утверждение.

Теорема 15 [16, теоремы 5.1, 6.1]. *Пусть выполнены следующие условия.*

(a) *Мера μ удовлетворяет условию*

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B_0)} \geq C_b\Big(\frac{r}{r_0}\Big)^s$$

для некоторого $s > 1$, где $B_0 = B(x_0, r_0)$ — произвольный шар, $x \in B_0$, $r \leq r_0$.

(b) *Для пары измеримых функций f, g и фиксированного $\sigma \geq 1$*

$$\int\limits_B |f - f_B|^p \, d\mu \leq C_p r^p \int\limits_{\sigma B} |g|^p \, d\mu$$

на каждом шаре B радиуса r.

(c) *Пусть $b \in \mathbb{R}$ и $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Определим $h_k = (-1)^k(f - b)$, $k \in \{1, 2\}$, и $(h_k)_{t_1}^{t_2} = \min\{\max\{0, h_k - t_1\}, t_2 - t_1\}$. Тогда если пара f, g удовлетворяет условию* (b), *то и пара $(h_k)_{t_1}^{t_2}$, $g\chi_{\{t_1 < h_k \leq t_2\}}$ удовлетворяет условию* (b).

Тогда существуют постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 такие, что

(1) *если $p < s$, то для $q = \frac{sp}{s-p}$ выполнено*

$$\bigg(\int\limits_B |f - f_B|^q \, d\mu\bigg)^{\frac{1}{q}} \leq C_1\bigg(\int\limits_{5\sigma B} |g|^p\bigg)^{\frac{1}{p}};$$

(2) *если $p = s > 1$, то*

$$\fint\limits_B \exp\bigg(\frac{C_2\mu(B)^{\frac{1}{s}}|f - f_B|}{r\|g\|_{L_s(5\sigma B)}}\bigg)^{\frac{s}{s-1}} d\mu \leq C_3;$$

(3) *если $p > s$, то f локально непрерывна по Гёльдеру:*

$$\sup_{x \in B} |f(x) - f_B| \leq C_4 r\bigg(\fint\limits_{5\sigma B} |g|^p \, d\mu\bigg)^{\frac{1}{p}},$$

в частности,

$$|f(x) - f(y)| \leq C_4 r_0^{\frac{s}{p}} d(x,y)^{1-\frac{s}{p}}\bigg(\fint\limits_{5\sigma B} |g|^p \, d\mu\bigg)^{\frac{1}{p}}$$

для всех x, y лежащих в шаре радиуса r_0. Здесь постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 зависят только от p, s, σ, C_p и C_b.

Пользуясь этой теоремой, докажем следующее утверждение.

Теорема 16. *Пусть $g \in \mathbb{M}$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда найдется такой радиус $r_0 > 0$, что для любой области Джона $\Omega \subset B(g, r_0)$ класса $J(a, b)$, $0 < a \leq b$, и любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$*

(1) *если $p < \nu$, то для $q = \frac{\nu p}{\nu - p}$ выполнено*

$$\bigg(\int\limits_\Omega |f(y) - f_\Omega|^q \, d\mathscr{H}^\nu(y)\bigg)^{\frac{1}{q}} \leq C_1\Big(\frac{b}{a}\Big)^\nu \bigg(\int\limits_\Omega |\nabla_H f(y)|^p \, d\mathscr{H}^\nu(y)\bigg)^{\frac{1}{p}};$$

(2) *если* $p=\nu>1$, *то*

$$\fint_\Omega \exp\left\{\left(\frac{C_2\mathscr{H}^\nu(\Omega)^{\frac{1}{\nu}}|f(y)-f_\Omega|}{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \operatorname{diam}(\Omega)\|\nabla_H f\|_{L^\nu(\Omega)}}\right)^{\frac{\nu}{\nu-1}}\right\} d\mathscr{H}^\nu(y)\le C_3;$$

(3) *если* $p>\nu$, *то функция* f *локально непрерывна по Гёльдеру:*

$$\sup_{y\in\Omega}|f(y)-f_\Omega|\le C_4\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+\frac{\nu}{p}}\operatorname{diam}(\Omega)^{1-\frac{\nu}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla_H f(y)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}},$$

в частности,

$$|f(x)-f(y)|\le C_4\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+\frac{\nu}{p}}d_{cc}(x,y)^{1-\frac{\nu}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla_H f(y)|^p\,d\mathscr{H}^\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $x,y\in\Omega$. *Здесь постоянные* C_1, C_2, C_3, C_4 *не зависят от выбора области* Ω.

Доказательство. Прежде всего убедимся, что выполнены условия теоремы 15. В некоторой компактной окрестности $U(g)\subset\mathbb{M}$ справедливы теоремы 4 и 14, следовательно, условия (a) и (b) выполнены для $\mathbb{X}=U(g)$, $d=d_{cc}$, $\mu=\mathscr{H}^\nu$ и $g=\sum\limits_{i=1}^{\dim H_1}|X_if|$. Условие (c), очевидно, верно, так как $X_i\big(f_{t_1}^{t_2}\big)=X_if\cdot\chi_{\{t_1<f\le t_2\}}$.

Далее, утверждения настоящей теоремы следуют из теоремы 13. Докажем, например, утверждение (2). По теореме 15

$$\fint_B \exp\left\{\left(\frac{C_2|f(y)-f_B|}{\|\nabla_H f\|_{\nu,5B}}\right)^{\frac{\nu}{\nu-1}}\right\}d\mathscr{H}^\nu(y)\le C_3.$$

Из представления экспоненты $\exp t=\sum\limits_{k=0}^\infty\frac{t^k}{k!}$ следует, что для каждого $k=0,1,2,\dots$ найдется A_k такое, что $\sum\limits_{k=1}^\infty\frac{A_k}{k!}=C_3$ и верна оценка

$$\fint_B\left(\frac{C_2|f(y)-f_B|}{\|\nabla_H f\|_{\nu,5B}}\right)^{\frac{k\nu}{\nu-1}}d\mathscr{H}^\nu(y)\le A_k.$$

Отсюда

$$C_2\left(\int_B|f-f_B|^{\frac{k\nu}{\nu-1}}\,d\mathscr{H}^\nu\right)^{\frac{\nu-1}{k\nu}}\le(A_kr^\nu)^{\frac{\nu-1}{k\nu}}\|\nabla_H f\|_{\nu,5B}.$$

Применяя теорему 13, получаем

$$C_2\left(\int_\Omega|f-f_\Omega|^{\frac{k\nu}{\nu-1}}\,d\mathscr{H}^\nu\right)^{\frac{\nu-1}{k\nu}}\le 2C_2\left(\int_\Omega|f-f_{B_0}|^{\frac{k\nu}{\nu-1}}\,d\mathscr{H}^\nu\right)^{\frac{\nu-1}{k\nu}}$$

$$\le 2\left(\frac{b}{a}\right)^\nu(A_k\operatorname{diam}(\Omega)^\nu)^{\frac{\nu-1}{k\nu}}\|\nabla_H f\|_{\nu,\Omega}.$$

Внося сомножители из правой части обратно под знак интеграла, имеем

$$\mathscr{H}^\nu(\Omega) \fint_\Omega \left(\frac{\frac{C_2}{2}|f - f_\Omega|}{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \|\nabla_H f\|_{\nu,\Omega}} \right)^{\frac{k\nu}{\nu-1}} d\mathscr{H}^\nu \le A_k \operatorname{diam}(\Omega)^\nu.$$

Поскольку $\mathscr{H}^\nu(\Omega) \le \operatorname{diam}(\Omega)^\nu$, только усилим неравенство, домножив левую часть на $\mathscr{H}^\nu(\Omega)^{\frac{k\nu}{\nu-1}-\nu}$, а правую — на $\operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{k\nu}{\nu-1}-\nu}$ (по крайней мере для больших k). Таким образом, внося оба эти множителя под знак интеграла, приходим к неравенству

$$\fint_\Omega \left(\frac{\frac{C_2}{2}\mathscr{H}^\nu(\Omega)^{\frac{1}{\nu}}|f - f_\Omega|}{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu \operatorname{diam}(\Omega)\|\nabla_H f\|_{\nu,\Omega}} \right)^{\frac{k\nu}{\nu-1}} d\mathscr{H}^\nu \le A_k.$$

Умножая последнее неравенство на $(k!)^{-1}$ и суммируя по k, получаем утверждение (2) теоремы. Справедливость утверждений (1) и (3) проверяется по аналогии. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
2. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. 1938. Т. 2. С. 83–94.
3. *Chow W. L.* Über systeme von linearen partiallen differentialgleichungen erster ordnung // Math. Ann. 1939. V. 117. P. 98–105.
4. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
5. *Jerison D., Sanchez-Calle A.* Subelliptic, second order differential operators // Complex analysis. III (College Park, MD, 1985–86). Berlin: Springer-Verl., 1987. (Lect. Notes Math.; V. 1277). P. 46–77.
6. *Varopoulos T.* Fonctions harmoniques sur les groupes Lie // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 1987. V. 309. P. 519–521.
7. *Franchi B., Lanconelli E.* Hölder regularity theorem for a class of linear non-uniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1983. V. 10. P. 523–541.
8. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Rev. Mat. Iberoam. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.
9. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result // Rev. Mat. Iberoam. 1994. V. 10, N 2. P. 453–466.
10. *Franchi B.* Weighted Sobolev–Poincaré inequalities and pointwise inequalities for a class of degenerate elliptic equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 327. P. 125–158.
11. *Franchi B., Gutiérrez C. E., Wheeden R. L.* Weighted Sobolev–Poincaré inequalities for Grushin type operators // Commun. Partial Differ. Equations. 1994. V. 19. P. 523–604.
12. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.
13. *Montanari A., Morbidelli D.* Step-*s* involutive families of vector fields, their orbits and the Poincaré inequality // J. Math. Pures Appl. 2013. V. 99, N 4. P. 375–394.
14. *Lanconelli E., Morbidelli D.* On the Poincaré inequality for vector fields // Ark. Math. 2000. V. 38, N 2. P. 327–342.
15. *Bramanti M., Brandolini L., Pedroni M.* Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality // Forum Math. 2013. V. 25, N 4. P. 703–769.
16. *Hajłasz P., Koskela P.* Sobolev Met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
17. *Chernikov V. M., Vodopyanov S. K.* Sobolev spaces and hypoelliptic equations. I // Sib. Adv. Math. 1996. V. 6, N 3. P. 27–67.

18. *Chernikov V. M., Vodopyanov S. K.* Sobolev spaces and hypoelliptic equations. II // Sib. Adv. Math. 1996. V. 6, N 4. P. 64–96.
19. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Anal. Math. Phys. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
20. *Карманова М. Б.* Сходимость масштабированных векторных полей и локальная аппроксимационная теорема на пространствах Карно — Каратеодори и приложения // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 6. С. 736–742.
21. *Грешнов А. В.* Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентной аппроксимации для C^1-гладких векторных полей // Мат. труды. 2012. Т. 15, № 2. С. 72–88.
22. *Basalaev S., Vodopyanov S.* Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces // Eurasian Math. J. 2013. V. 4, N 2. P. 10–48.
23. *Karmanova M., Vodopyanov S.* On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces. Switzerland: Springer International Publ., 2014. (Geometric Control and Sub-Riemannian Geometry. Springer INdAM Ser.; V. 5).
24. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21. P. 35–45.
25. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники).
26. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 130–147.
27. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian Geometry, Prog. Math. Basel: Birkhäuser, 1996. V. 144. P. 72–323.
28. *Metivier G.* Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non elliptiques // Commun. Partial Differ. Equations. 1976. V. 1. P. 467–519.
29. *Rothschild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137, N 3–4. P. 247–320.
30. *Lie S., Engel F.* Theorie der Transformationsgruppen. Bd 1–3. Leipzig, 1888–1893.
31. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V: Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
32. *Stein E.* Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
33. *Buckley S., Koskela P., Lu G.* Boman equals John // Proc. XVI Rolf Nevanlinna colloq. (Joensuu, 1995). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 91–99.
34. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Commun. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.

Статья поступила 23 сентября 2013 г.

Басалаев Сергей Геннадьевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sbasalaev@gmail.com