Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2014. Том 55, № 1

УДК 519.21

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ИММИГРАЦИЕЙ

Я. М. Хусанбаев

Аннотация. Получена скорость сходимости распределения флуктуации почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией к нормальному закону.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, слабая сходимость, нормальное распределение.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $\{\xi_{k,j}^{(n)},\ k, j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\}$ — две независимые совокупности независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения. В данной работе мы рассмотрим последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией $\{X_k^{(n)},\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$, определенных следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0^{(n)} = 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Предположим, что

$$m_n = \mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = \mathbf{var}\,\xi_{1,1}^{(n)}, \quad b_n^2 = \mathbf{var}\,\varepsilon_1^{(n)}$$

конечны для всех $n \in \mathbb{N}$. Последовательность (1) называют *почти критической*, если $m_n \to 1$ при $n \to \infty$. Случайный процесс $X^{(n)}(t)$, $t \geq 0$, с траекториями в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$ определим, полагая $X^{(n)}(t) = X_{[nt]}^{(n)}$, $t \geq 0$, где $[a]$ означает целую часть числа a.

Теорема 1 является очевидным следствием теоремы 2.2 из [1].

Теорема 1. *Предположим, что*

(1) $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(2) $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o(n^{-1})$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\sigma^2 \geq 0$;

(3) $n\mathbf{E}\big((\xi_{1,1}^{(n)} - m_n)^2 I(|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n| > \theta n^{1/2})\big) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $\theta > 0$, *где* $I(A)$ — *индикатор события* A;

(4) $\lambda_n \to \lambda$, $b_n^2 \to b^2$ *при* $n \to \infty$ *для некоторых* $\lambda > 0$ *и* $b^2 > 0$;

(5) $\mathbf{E}\big((\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n)^2 I(|\varepsilon_1^{(n)} - \lambda_n| > \theta n^{1/2})\big) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $\theta > 0$.

Тогда имеет место слабая сходимость

$$n^{-1/2}(X^{(n)} - \mathbf{E}X^{(n)}) \to X \quad \text{при} \ \ n \to \infty \tag{2}$$

в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$, *где предельный процесс* X *определяется соотношением*

$$X(t) = \int\limits_0^t e^{\alpha(t-s)}\, dM(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Здесь $M(t) = W(T(t))$, $t \in \mathbb{R}_+$, *где* W *— стандартный винеровский процесс, а функция* T *определяется соотношением* $T(t) = \int\limits_0^t \rho(s)\, ds$, *где*

$$\rho(t) = b^2 + \sigma^2\lambda \int\limits_0^t e^{\alpha s} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Известно, что процесс X является непрерывным гауссовским мартингалом. Из основных свойств стохастического интеграла [2, с. 12] вытекает, что

$$\mathbf{E}X(t) = 0, \quad \mathbf{var}\, X(t) = \int\limits_0^t e^{2\alpha(t-s)}\rho(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\beta^2 = \mathbf{var}\, X(1) = \begin{cases} \frac{\lambda\sigma^2}{2\alpha^2}(e^{\alpha}-1)^2 + \frac{b^2}{2\alpha}(e^{2\alpha}-1), & \text{если } \alpha \neq 0, \\ \frac{\lambda\sigma^2}{2} + b^2, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Значит, $X(1)$ имеет нормальное распределение со средним нуль и дисперсией β^2.

Целью данной работы является установление скорости слабой сходимости случайных величин $n^{-1/2}(X^{(n)}(1) - \mathbf{E}X^{(n)}(1))$ к случайной величине $X(1)$.

Обозначим через $F_n(x)$ функцию распределения случайной величины $n^{-1/2}(X^{(n)}(1) - \mathbf{E}X^{(n)}(1))$. Символ $\Phi_\tau(x)$ будет обозначать нормальное распределение со средним 0 и дисперсией τ^2, через γ_n и τ_n обозначим третьи факториальные моменты случайных величин $\xi_{1,1}^{(n)}$ и $\varepsilon_1^{(n)}$ соответственно. Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\beta_n^2 = \begin{cases} \frac{\lambda_n\sigma_n^2(m_n^{n-1}-1)(m_n^n-1)}{n(m_n-1)(m_n^2-1)} + \frac{b_n^2(m_n^{2n}-1)}{n(m_n^2-1)}, & \text{если } m_n \neq 1, \\ \frac{\lambda_n\sigma_n^2(n-1)}{2} + b_n^2, & \text{если } m_n = 1, \end{cases}$$

$$\chi_n = \begin{cases} \frac{\gamma_n}{m_n|m_n^2-1|} + \frac{3(\sigma_n^2+m_n^2-m_n)^2}{m_n|m_n-1||m_n^2-1|} + \frac{3|\sigma_n^2+m_n^2-m_n|}{m_n|m_n-1|} + 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } m_n \neq 1, \\ n\gamma_n + \frac{3}{2}\sigma_n^4(n-1)n + 3n\sigma_n^2 + 1, \quad \text{если } m_n = 1, \end{cases}$$

$$\theta_n = \max\bigl((1+\lambda_n)^3, b_n^2 + \lambda_n^2, \tau_n\bigr), \quad A_n = \theta_n \max\bigl(1, m_n^n\bigr)\chi_n.$$

Далее всюду в этой работе символ C будет обозначать положительное постоянное число, не всегда одно и то же.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 2. *Пусть* $\min\bigl(\beta^2, \beta_n^2, b_n^2\bigr) > 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и выполнены следующие условия:*

(1) $m_n = 1 + \alpha n^{-1} + o(n^{-1})$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\alpha \in \mathbb{R}$;
(2) $\sigma_n^2 = \sigma^2 n^{-1} + o(n^{-1})$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\sigma^2 > 0$;
(3) $\lambda_n \to \lambda$, $b_n^2 \to b$ *при* $n \to \infty$ *для некоторых* $\lambda > 0$, $b^2 > 0$;

(4) $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \tau_n < \infty$;

(5) $n\gamma_n \to \gamma < \infty$ *при* $n \to \infty$ *для некоторого* $\gamma > 0$.

Тогда функция распределения $F_n(x)$ *слабо сходится к* $\Phi_\beta(x)$, *причем*

$$|F_n(x) - \Phi_\beta(x)| \le \frac{C}{\sqrt{n}} + \frac{\left|\beta_n^2 - \beta^2\right|}{\min\left(\beta_n^2, \beta^2\right)},$$

где константа C *может зависеть от величин* α, σ^2, λ, b^2, β^2, τ *и* γ.

Следующая вспомогательная теорема представляет самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть* $\min\left(\beta^2, \beta_n^2, b_n^2\right) > 0$, $\mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)}\right)^3 < \infty$ *и* $\mathbf{E}\left(\varepsilon_1^{(n)}\right)^3 < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$|F_n(x) - \Phi_\beta(x)| \le \begin{cases} C\frac{\theta_n A_n}{\beta_n^3\sqrt{n}}\left(\frac{m_n^{4n}-1}{n(m_n^4-1)} + \frac{\beta_n^3}{\beta b_n^2}\right) + \frac{|\beta_n^2-\beta^2|}{\min(\beta_n^2,\beta^2)}, & \textit{если } m_n \ne 1, \\ C\frac{\theta_n A_n}{\beta_n^3\sqrt{n}}\left(1 + \frac{\beta_n^3}{\beta b_n^2}\right) + \frac{|\beta_n^2-\beta^2|}{\min(\beta_n^2,\beta^2)}, & \textit{если } m_n = 1, \end{cases}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Для любого $t > 0$ аналоги теорем 2 и 3 без особого труда могут быть сформулированы для аппроксимации распределения величины

$$n^{-1/2}(X^{(n)}(t) - \mathbf{E}X^{(n)}(t))$$

распределением случайной величины $X(t)$.

Пример. Пусть $\xi_{i,j}^{(n)}$ имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха $1 - \frac{a}{n}$, где $a \ge 0$, а иммиграции $\varepsilon_k^{(n)}$ — распределение Пуассона с параметром λ_n, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n < \infty$. Легко проверить, что в рассматриваемом случае выполнены все условия теорем 2 и 3.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая известная лемма (см., например, [3, с. 603; 4, с. 317]).

Лемма 1. *Пусть* F *и* G — *функции распределения с характеристическими функциями* f *и* g *соответственно. Предположим, что* G *имеет производную* G' *с* $|G'| \le m$. *Тогда для всех* x *и* $T > 0$ *выполняется соотношение*

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-T}^{T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt + \frac{24m}{\pi T}.$$

Обозначим через $S_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, ветвящийся процесс Гальтона — Ватсона, определенный соотношениями

$$S_0^{(n)} = 1, \quad S_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{S_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{E}\big(\xi_{1,1}^{(n)}\big)^3 < \infty$. *Тогда если* $m_n \neq 1$, *то*

$$\mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^3 = \gamma_n \frac{m_n^{2k}-1}{m_n^2-1} m_n^{k-1} + \frac{3\big(\sigma_n^2+m_n^2-m_n\big)^2 m_n^{k-1}\big(m_n^{k-1}-1\big)\big(m_n^k-1\big)}{(m_n-1)^2(m_n+1)} + \frac{3\big(\sigma_n^2+m_n^2-m_n\big)m_n^k\big(m_n^k-1\big)}{m_n(m_n-1)} + m_n^k,$$

и если $m_n = 1$, *то*

$$\mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^3 = k\gamma_n + \frac{3}{2}\sigma_n^4(k-1)k + 3k\sigma_n^2 + 1$$

для любого $k \in \mathbb{N}$, *где* $\gamma_n = \mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}\big(\xi_{1,1}^{(n)}-1\big)\big(\xi_{1,1}^{(n)}-2\big)$.

Доказательство. Обозначим через $f_n(s)$ производящую функцию величины $\xi_{1,1}^{(n)}$, а через $f_n^{(k)}(s)$ — k-ю итерацию $f_n(s)$.

Нетрудно видеть, что

$$\big(f_n^{(k+1)}(s)\big)''' = f_n'''\big(f_n^{(k)}(s)\big)\big[\big(f_n^{(k)}(s)\big)'\big]^3 + 3f_n''\big(f_n^{(k)}(s)\big)\big(f_n^{(k)}(s)\big)'\big(f_n^{(k)}(s)\big)'' + f_n'\big(f_n^{(k)}(s)\big)\big(f_n^{(k)}(s)\big)''.$$

Отсюда

$$\big(f_n^{(k+1)}(1)\big)''' = f_n'''(1)\big[\big(f_n^{(k)}(1)\big)'\big]^3 + 3f_n''(1)\big(f_n^{(k)}(1)\big)'\big(f_n^{(k)}(1)\big)'' + f_n'(1)\big(f_n^{(k)}(1)\big)'''.$$

Рассмотрим случай $m_n \neq 1$. Имеем

$$\big(f_n^{(k+1)}(1)\big)''' = \gamma_n m_n^{3k} + \frac{3\big(\sigma_n^2+m_n^2-m_n\big)^2}{m_n(m_n-1)} m_n^{2k}\big(m_n^k-1\big) + m_n\big(f_n^{(k)}(1)\big)'''.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\big(f_n^{(k+1)}(1)\big)''' = \gamma_n \frac{m_n^{2(k+1)}-1}{m^2-1} m_n^k + \frac{3\big(\sigma_n^2+m_n^2-m_n\big)^2 m_n^k\big(m_n^k-1\big)\big(m_n^{k+1}-1\big)}{(m_n-1)^2(m_n+1)}. \tag{3}$$

Ясно, что

$$\big(f_n^{(k)}(1)\big)''' = \mathbf{E}S_k^{(n)}\big(S_k^{(n)}-1\big)\big(S_k^{(n)}-2\big) = \mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^3 - 3\mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^2 + 2\mathbf{E}S_k^{(n)}.$$

Отсюда, находя $\mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^3$ и учитывая соотношение (3), приходим к утверждению леммы для случая $m_n \neq 1$. Случай $m_n = 1$ доказывается аналогичными рассуждениями.

Доказательство теоремы 3. Через $h_n(s)$ и $\varphi_n(s)$ обозначим производящие функции случайных величин $\varepsilon_1^{(n)}$ и $X_n^{(n)}$ соответственно. Рассмотрим случай $m_n > 1$.

Положим $\Delta_n = |F_n(x) - \Phi_\beta(x)|$ и $z_{nk} = h_n\big(f_n^{(k)}(e^{it/\sqrt{n}})\big) - 1$. В силу леммы 1 имеем

$$\Delta_n \leq \int_{-T}^{T} \left| \frac{e^{-it\mathbf{E}X_n^{(n)}/\sqrt{n}}\varphi_n\big(\frac{it}{\sqrt{n}}\big) - e^{-\frac{t^2}{2}\beta^2}}{t} \right| dt + \frac{24m}{\pi T} \leq \int_{-T}^{T} \frac{\Delta_n'}{|t|}\,dt + \int_{-T}^{T} \frac{\Delta_n''}{|t|}\,dt + \int_{-T}^{T} \frac{\Delta_n'''}{|t|}\,dt + \frac{24m}{\pi T}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_n' = \left| e^{-it\mathbf{E}X_n^{(n)}/\sqrt{n}}\varphi_n\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) - e^{\frac{it\lambda_n}{\sqrt{n}}\frac{m_n^n-1}{m_n-1}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_{nk}-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)}\right|,$$

$$\Delta_n'' = |e^{\frac{it\lambda_n}{\sqrt{n}}\frac{m_n^n-1}{m_n-1}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_{nk}-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)} - e^{-\frac{t^2}{2}\beta_n^2}|,$$

$$\Delta_n''' = |e^{-\frac{t^2}{2}\beta_n^2} - e^{-\frac{t^2}{2}\beta^2}|.$$

В соотношении (4) в качестве T возьмем $T = \frac{\sqrt{n}b_n^2}{64\theta_n A_n}$. Ясно, что в качестве m можно взять $m = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}}$.

Оценим величины Δ_n', Δ_n'' и Δ_n'''. Сначала оценим Δ_n'. Известно [5, с. 263], что

$$\varphi_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} h_n\bigl(f_n^{(k)}(s)\bigr).$$

Ясно, что $f_n^{(k)}(s)$ является производящей функцией $S_k^{(n)}$. Поэтому в силу теоремы 1 из [4] для фиксированного $t\in\mathbb{R}$ имеем

$$f_n^{(k)}(e^{it/\sqrt{n}}) = 1 + it\frac{\mathbf{E}S_k^{(n)}}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2}\frac{\mathbf{E}\bigl(S_k^{(n)}\bigr)^2}{n} + \theta_1\frac{|t|^3\mathbf{E}\bigl(S_k^{(n)}\bigr)^3}{n\sqrt{n}}, \tag{5}$$

где $|\theta_1|\le 1$. Согласно теореме 1 из [6] имеет место соотношение

$$h_n(s) = 1 + (s-1)\mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)} + \frac{(s-1)^2}{2}\mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)}\bigl(\varepsilon_1^{(n)}-1\bigr) + \theta_2(s-1)^3\tau_n, \tag{6}$$

где $|\theta_2|\le 1$.

Из (5) и (6) следует, что

$$\begin{aligned} h_n\bigl(f_n^{(k)}(e^{it/\sqrt{n}})\bigr) &= 1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\lambda_n\mathbf{E}S_k^{(n)} - \frac{t^2}{2n}\lambda_n\mathbf{E}\bigl(S_k^{(n)}\bigr)^2 \\ &\quad - \frac{t^2}{2n}\bigl(\mathbf{E}S_k^{(n)}\bigr)^2\bigl(b_n^2+\lambda_n^2-\lambda_n\bigr) + R_n^{(k)}(t) \\ &= 1 + \frac{it}{\sqrt{n}}m_n^k\lambda_n - \frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_n\sigma_n^2 m_n^k\bigl(m_n^k-1\bigr)}{m_n(m_n-1)} - \frac{t^2}{2n}m_n^{2k}\bigl(b_n^2+\lambda_n^2\bigr) + R_n^{(k)}(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где $R_n^{(k)}(t)$ — остаточный член.

Нетрудно установить, что

$$|z_{nk}| \le \frac{|t|}{\sqrt{n}}m_n^k(1+\lambda_n) \le \frac{1}{2} \tag{8}$$

для $|t| < \frac{\sqrt{n}b_n^2}{64\theta_n A_n}$.

Применяя известные неравенства

$$|e^z-1| \le |z|e^{|z|}, \quad \left|\ln(1+z) - z + \frac{z^2}{2}\right| \le |z|^3, \quad |z|\le\frac{1}{2}, \tag{9}$$

получаем

$$\Delta_n' \le \sum_{k=0}^{n-1}|z_{nk}|^3 |e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_{nk}-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)}|e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_{nk}|^3}. \tag{10}$$

В силу (8) для $|t| \le \frac{\sqrt{n} b_n^2}{64\theta_n A_n}$ имеем

$$|z_{nk}|^3 \le \frac{|t|^3}{n\sqrt{n}} m_n^{3k} (1+\lambda_n)^3 \le \frac{t^2}{64n} b_n^2 m_n^{2k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3 \le \frac{t^2}{64n} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{nk}|^3 \le \frac{|t|^3}{n\sqrt{n}} (1+\lambda_n)^3 \frac{m_n^{3n}-1}{m_n^3-1}. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left|e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_{nk}-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)}\right| \le e^{-\frac{t^2}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\lambda_n \sigma_n^2 m_n^k (m_n^k-1)}{m_n(m_n-1)}+m_n^{2k} b_n^2\right]} e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\delta_{nk}(t)+|\widetilde{R}_n^{(k)}(t)|)}, \tag{13}$$

где

$$\delta_{nk}(t) = \frac{|t|}{\sqrt{n}} m_n^k \lambda_n \big|R_n^{(k)}(t)\big| + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2n}\lambda_n \mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^2 + \frac{t^2}{2n} m_n^{2k}\big(b_n^2+\lambda_n^2-\lambda_n\big) + \big|R_n^{(k)}(t)\big|\right)^2,$$

а $\widetilde{R}_n^{(k)}(t)$ — остаточный член, представляющий собой громоздкое выражение.

Для $|t| \le \frac{\sqrt{n} b_n^2}{64\theta_n A_n}$ получим

$$\begin{gathered} \big|R_n^{(k)}(t)\big| \le \frac{1}{5} b_n^2 m_n^{2k}, \quad \big|\widetilde{R}_n^{(k)}(t)\big| \le \frac{4}{25}\frac{t^2}{n} b_n^2 m_n^{2k}, \\ \delta_{nk}(t) \le \frac{1}{250}\frac{t^2}{n} b_n^2 m_n^{2k}. \end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда и из (13) следует, что

$$\left|e^{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(z_{nk}-\frac{z_{nk}^2}{2}\right)}\right| \le e^{-\frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1}-1)(m_n^n-1)}{(m_n-1)(m_n^2-1)}} e^{-\frac{8}{25}\frac{t^2}{n} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}}.$$

Последнее соотношение вместе с (10)–(12) влечет

$$\Delta_n' \le \frac{|t|^3}{n\sqrt{n}}(1+\lambda_n)^3 \frac{m_n^{3n}-1}{m_n^3-1} e^{-\frac{t^2}{2n}\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1}-1)(m_n^n-1)}{(m_n-1)(m_n^2-1)}} e^{-\frac{3}{10}\frac{t^2}{n} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}}. \tag{15}$$

Оценим Δ_n''. Применяя неравенство (9), имеем

$$\Delta_n'' \le e^{-\frac{t^2}{2}\beta_n} \chi_n(t) e^{\chi_n(t)}, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \chi_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg\{ \big|R_n^{(k)}(t)\big| + \frac{|t| m_n^k \lambda_n}{\sqrt{n}} \bigg[& \frac{t^2}{2n}\lambda_n \mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^2 \\ & + \frac{t^2}{2n}\big(\mathbf{E}S_k^{(n)}\big)^2\big(b_n^2+\lambda_n^2-\lambda_n\big) + \big|R_n^{(k)}(t)\big| \bigg] \\ + \frac{1}{2}\bigg[\frac{t^2}{2n}\lambda_n \mathbf{E}\big(S_k^{(n)}\big)^2 + \frac{t^2}{2n}\big(\mathbf{E}S_k^{(n)}\big)^2 & \big(b_n^2+\lambda_n^2-\lambda_n\big) + \big|R_n^{(k)}(t)\big| \bigg]^2 \Bigg\}. \end{aligned}$$

Учитывая (14), для $|t| < \frac{\sqrt{n} b_n^2}{64\theta_n A_n}$ имеем

$$\left|R_n^{(k)}(t)\right| \le C\frac{|t|^3}{n\sqrt{n}} m_n^{4k} A_n,$$

$$\chi_n(t) \le C\frac{|t|^3}{n\sqrt{n}}\frac{m_n^{4n}-1}{m_n^4-1}\theta_n A_n, \quad \chi_n(t) \le \frac{1}{4}\frac{t^2}{n} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}. \tag{17}$$

Из (16), (17) вытекает, что

$$\Delta_n'' \le C\frac{|t|^3}{n\sqrt{n}}\frac{m_n^{4n}-1}{m_n^4-1}\theta_n A_n e^{-\frac{t^2}{2}\beta_n^2} e^{\frac{1}{4}\frac{t^2}{n} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}}$$

$$= C\frac{|t|^3}{n\sqrt{n}}\frac{m_n^{4n}-1}{m_n^4-1}\theta_n A_n e^{-\frac{t^2}{2n}\left[\frac{\lambda_n \sigma_n^2 (m_n^{n-1}-1)(m_n^n-1)}{(m_n-1)(m_n^2-1)} + \frac{1}{2} b_n^2 \frac{m_n^{2n}-1}{m_n^2-1}\right]}. \tag{18}$$

Оценим Δ_n'''. Нетрудно установить, что

$$|e^{-x} - e^{-y}| \le e^{-\min(x,y)}|x-y|$$

для $x, y \ge 0$. Применяя это неравенство, сразу получаем

$$\Delta_n''' \le \frac{t^2}{2}\left|\beta_n^2 - \beta^2\right| e^{-\frac{t^2}{2}\min(\beta_n^2, \beta^2)}. \tag{19}$$

Утверждение теоремы для случая $m_n > 1$ следует из (4), (5), (18) и (19).

Справедливость теоремы для случаев $m_n < 1$ и $m_n = 1$ устанавливается аналогичными случаю $m_n > 1$ рассуждениями.

Доказательство теоремы 3 завершено.

Доказательство теоремы 2. Слабая сходимость $F_n(x)$ к $\Phi_\beta(x)$ следует из теоремы 1. Действительно, согласно условиям (1)–(3) теоремы 2 выполнены условия (1), (2) и (4) теоремы 1. Очевидно, что в силу неравенства Чебышева из условия (4) теоремы 2 немедленно вытекает условие (5) теоремы 1. После несложных рассуждений нетрудно убедиться в том, что условия (2) и (5) теоремы 2 обеспечивают выполнение соотношения $\sqrt{n}\mathbf{E}\left|\xi_{1,1}^{(n)} - m_n\right|^3 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда с учетом неравенства Чебышева приходим к выводу, что выполнено условие (3) теоремы 1. Оценка, приведенная в теореме, является следствием теоремы 3.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Автор выражает свою признательность рецензенту за указанные недостатки, устранение которых способствовало улучшению данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M. C. A.* Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean // Adv. Appl. Probab. 2005. V. 37. P. 523–528.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
4. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
5. *Athreya K. B., Ney P. E.* Branching processes. New York: Springer-Verl., 1972.
6. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 13 мая 2013 г.

Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович
Институт математики при Национальном университете Узбекистана,
ул. Дормон йули, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
yakubjank@mail.ru