Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 517.55

ОБ ОДНОМ ГРАНИЧНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ФОРЕЛЛИ

В. И. Кузоватов, А. М. Кытманов

Аннотация. Доказывается граничный аналог теоремы Форелли для вещественно-аналитических функций, т. е. показано, что всякая вещественно-аналитическая функция f, заданная на границе ограниченной строго выпуклой области D в многомерном комплексном пространстве и обладающая свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства комплексных прямых, проходящих через одну граничную точку и пересекающих область D, голоморфно продолжается в D как функция многих комплексных переменных.

Ключевые слова: голоморфное продолжение, комплексные прямые, вещественно-аналитическая функция.

Введение

Работа содержит результат, связанный с голоморфным продолжением функций f, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, получен М. Л. Аграновским и Р. Э. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А. М. Кытмановым (см. [3]), применившим интеграл Бохнера — Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера — Мартинелли, Коши — Фантаппье) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых. Обзор результатов, относящихся к данной теме, можно найти в [4].

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, со связной гладкой границей ∂D класса C^2. Сформулируем результат Стаута [2].

Рассмотрим комплексные прямые вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1, \dots, n,\ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00007–а, 11–01–00852–а).

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \varnothing$).

Будем говорить, что функция $f \in C(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой* l ($l \cap \partial D \neq \varnothing$), если существует функция f_l со следующими свойствами:

1) $f_l \in C(\overline{D} \cap l)$;

2) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$;

3) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 [2]. *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых вида* (1), *то f голоморфно продолжается в D.*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, рассмотрено М. Л. Аграновским и А. М. Семеновым [5]. Оно состоит из множества $\mathfrak{L}_V$ комплексных прямых, пересекающих некоторое открытое множество V из D.

В дальнейшем рядом авторов (см., например, [6–12]) рассмотрены различные семейства комплексных прямых (например, семейства комплексных прямых, пересекающие росток порождающего многообразия, проходящие через росток комплексной гиперповерхности, и др.), достаточные для голоморфного продолжения функций из различных классов. Приведем здесь результат из работы [9], в которой утверждается, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку комплексного шара, достаточно для голоморфного продолжения вещественно-аналитических функций, заданных на границе шара.

Пусть $\mathbb{B}^n$ — шар в $\mathbb{C}^n$, $\partial\mathbb{B}^n$ — сфера, $z_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ и C^w обозначает класс вещественно-аналитических функций.

Теорема 2 [9]. *Пусть функция $f \in C^w(\partial\mathbb{B}^n)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых, проходящих через точку z_0. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathbb{B}^n$.*

В [13] показано, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку ограниченной многомерной строго выпуклой области (с жесткими дополнительными условиями на границу), достаточно для голоморфного продолжения вещественно-аналитических функций, заданных на границе данной области. В данной работе ограничения на строго выпуклую область будут сняты.

1. Основной результат

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, точки которого будем обозначать через $w = (w_1, \dots, w_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ и т. д. Пусть область D строго выпукла. В этом случае функция $\rho(w_1, \dots, w_n)$, задающая область D, т. е. $D = \{w \mid \rho(w) < 0\}$ и $\operatorname{grad}\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial\rho}{\partial w_n}\right) \neq 0$ на ∂D, удовлетворяет условию

$$\sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial w_p \partial w_j}(w^0)\xi_p\xi_j + \sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial \bar{w}_p \partial \bar{w}_j}(w^0)\bar{\xi}_p\bar{\xi}_j + 2\sum_{p,j=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial w_p \partial \bar{w}_j}(w^0)\xi_p\bar{\xi}_j > 0$$

для любых $\xi \neq 0$, $w^0 \in \overline{D}$.

Область D — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с вещественно-аналитической границей, если функция ρ вещественно-аналитическая в некоторой окрестности замыкания области $\overline{D}$.

Обозначим также через $\mathfrak{L}_{w_0}$ семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0, $w_0 \in \partial D$.

Теорема 3. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{w_0}$, пересекающих D. Тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Доказательство данного результата в двумерном случае приведем в следующем пункте. В данном пункте докажем результат для случая $n > 2$, считая справедливым утверждение в двумерном случае. Пусть $0 \in D$. Будем проводить двумерные сечения области D, проходящие через граничную точку w_0 и точку 0, лежащую в области D. Функция, задающая границу такого двумерного сечения, удовлетворяет условиям теоремы в двумерном случае, поэтому функция f голоморфно продолжается во внутренности таких двумерных сечений и определяет в них функцию F. На пересечении этих двумерных сечений (т. е. на комплексных прямых) эти функции совпадают по условию теоремы. Объединение этих двумерных сечений совпадает со всей областью D. Таким образом, функция F определена во всей области D.

Поскольку голоморфное продолжение функции f в двумерных сечениях дается двумерным интегралом Бохнера — Мартинелли либо интегралом Хенкина — Рамиреза, зависящим вещественно-аналитически от параметров, голоморфное продолжение функции f является вещественно-аналитической функцией. Таким образом, функция F принадлежит классу C^w в области D.

Поскольку двумерное сечение определяется двумя комплексными прямыми, функция F, будучи голоморфной во всем двумерном сечении, также голоморфна на комплексных прямых, лежащих в этом сечении. Таким образом, функция F голоморфна на пересечении области D с каждой комплексной прямой, проходящей через точку 0.

Мы находимся в условиях теоремы Форелли (см. [14, теорема 4.4.5]), применяя которую, получим, что функция F голоморфна в некоторой окрестности точки 0.

Поскольку функция F голоморфна в некоторой окрестности точки 0 и вещественно-аналитическая в области D, она голоморфна во всей области D. $\square$

2. Двумерный случай

Рассмотрим двумерное комплексное пространство $\mathbb{C}^2$, точки которого будем обозначать через $w = (w_1, w_2)$, $z = (z_1, z_2)$ и т. д. Пусть D — ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^2$ с вещественно-аналитической границей ∂D.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{w_0}$, пересекающих D. Тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

Доказательство. Сделаем сдвиг, чтобы точка $w_0 \in \partial D$ перешла в 0, и выполним унитарное преобразование координат $w = w(z)$ так, чтобы в некоторой окрестности граничной точки 0 после перехода от комплексных координат к вещественным, т. е. в обозначениях $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, функция, задающая границу области, по теореме о неявной функции приняла вид

$$x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3), \tag{2}$$

где функция φ вещественно-аналитическая в окрестности нуля и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3$.

Раскладывая в выражении (2) функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ в окрестности граничной точки 0 в ряд Тейлора, ввиду условий на функцию φ имеем

$$x_4 = T(x_1, x_2, x_3) + o(|x'|^2), \quad |x'| \to 0, \quad x' = (x_1, x_2, x_3), \tag{3}$$

где $T(x_1, x_2, x_3) = c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3$ — положительно определенная (ввиду строгой выпуклости функции ρ) квадратичная форма.

В дальнейшем будем рассматривать сечения $D_a(\tau)$ области D:

$$D_a(\tau) = \left(\frac{\tau}{1+|a|^2}a, \frac{\tau}{1+|a|^2}\right), \quad \tau \in \overline{\Delta}_a,$$

проходящие в направлении вектора $(a, 1) \in \mathbb{C}^2$. Область Δ_a изменения параметра τ есть область на комплексной плоскости с вещественно-аналитической границей (в окрестности граничной точки 0).

Пусть $\tau = u + iv$, $a = a_1 + ia_2$. Тогда

$$\frac{\tau}{1+|a|^2}a = \frac{(u+iv)(a_1+ia_2)}{1+|a|^2} = \frac{(ua_1 - va_2) + i(ua_2 + va_1)}{1+|a|^2}, \ \frac{\tau}{1+|a|^2} = \frac{u+iv}{1+|a|^2}.$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{ua_1 - va_2}{1+|a|^2}, \quad x_2 = \frac{ua_2 + va_1}{1+|a|^2}, \quad x_3 = \frac{u}{1+|a|^2}, \quad x_4 = \frac{v}{1+|a|^2}.$$

Запишем выражение для квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, x_3) &= c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 \\ &= \frac{1}{(1+|a|^2)^2}\bigl[v^2\bigl(c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2\bigr) \\ &\quad + v\bigl(-2c_{11}ua_1a_2 + 2c_{22}ua_1a_2 + c_{12}ua_1^2 - c_{12}ua_2^2 - c_{13}ua_2 + c_{23}ua_1\bigr) \\ &\quad + \bigl(c_{11}u^2a_1^2 + c_{22}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{12}u^2a_1a_2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2\bigr)\bigr]. \end{aligned}$$

Подставим найденные значения для x_4 и $T(x_1, x_2, x_3)$ в уравнение (3) и приведем подобные. Получим

$$\begin{aligned} &v^2\bigl(c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2\bigr) + v\bigl(-2c_{11}ua_1a_2 + 2c_{22}ua_1a_2 + c_{12}ua_1^2 - c_{12}ua_2^2 - c_{13}ua_2 \\ &+ c_{23}ua_1 - 1 - |a|^2\bigr) + \bigl(c_{11}u^2a_1^2 + c_{22}u^2a_2^2 + c_{33}u^2 + c_{12}u^2a_1a_2 + c_{13}u^2a_1 + c_{23}u^2a_2\bigr) \\ &+ o(|a|^2) = 0, \quad |a| \to +\infty. \end{aligned}$$

Выбирая $|a|$ достаточно большим, т. е. заменяя a на ta с $|a| = 1$, $t \in \mathbb{R}$, имеем

$$\begin{aligned} &v^2\bigl(c_{11}a_2^2t^2 + c_{22}a_1^2t^2 - c_{12}a_1a_2t^2\bigr) + v\bigl(-2c_{11}ua_1a_2t^2 + 2c_{22}ua_1a_2t^2 + c_{12}ua_1^2t^2 \\ &- c_{12}ua_2^2t^2 - c_{13}ua_2t + c_{23}ua_1t - 1 - |a|^2t^2\bigr) + \bigl(c_{11}u^2a_1^2t^2 + c_{22}u^2a_2^2t^2 + c_{33}u^2 \\ &+ c_{12}u^2a_1a_2t^2 + c_{13}u^2a_1t + c_{23}u^2a_2t\bigr) + o(|t|^2) = 0, \quad t \to +\infty. \end{aligned}$$

Деля на t^2 и переходя в данном выражении к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$v^2\big(c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2\big) + v\big(-2c_{11}ua_1a_2 + 2c_{22}ua_1a_2 + c_{12}ua_1^2 - c_{12}ua_2^2 - |a|^2\big) \\ + \big(c_{11}u^2a_1^2 + c_{22}u^2a_2^2 + c_{12}u^2a_1a_2\big) = 0,$$

т. е.

$$u^2\big(c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{12}a_1a_2\big) + 2uv\left(-c_{11}a_1a_2 + c_{22}a_1a_2 + \frac{c_{12}}{2}a_1^2 - \frac{c_{12}}{2}a_2^2\right) \\ + v^2\big(c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2\big) - v = 0. \quad (4)$$

Лемма 1. *Областью Δ изменения параметра τ в предельном случае, когда $|a| \to +\infty$, является внутренность эллипса. При этом соотношение* (4) *задает границу $\partial\Delta$.*

Доказательство. Запишем соотношение (4) в виде

$$b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 + 2b_1u + 2b_2v + b_0 = 0 \quad (5)$$

с коэффициентами

$$b_{11} = c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{12}a_1a_2, \quad b_{12} = -c_{11}a_1a_2 + c_{22}a_1a_2 + \frac{c_{12}}{2}a_1^2 - \frac{c_{12}}{2}a_2^2,$$

$$b_{22} = c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2, \quad b_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0.$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения квадратичной формы $b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2$. Они удовлетворяют характеристическому уравнению

$$(b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) - b_{12}^2 = 0 \iff \lambda^2 - \lambda(b_{11} + b_{22}) + \big(b_{11}b_{22} - b_{12}^2\big) = 0. \quad (6)$$

Найдем выражения, входящие в квадратное уравнение (6). Имеем

$$b_{11} + b_{22} = c_{11}\big(a_1^2 + a_2^2\big) + c_{22}\big(a_1^2 + a_2^2\big) = c_{11} + c_{22},$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = c_{11}c_{22}a_1^4 + c_{11}c_{22}a_2^4 - c_{12}^2a_1^2a_2^2 - \left[\frac{c_{12}^2}{4}\big(a_1^4 - 2a_1^2a_2^2 + a_2^4\big) - 2c_{11}c_{22}a_1^2a_2^2\right] \\ = c_{11}c_{22}\big(a_1^2 + a_2^2\big)^2 - \frac{c_{12}^2}{4}\big(a_1^2 + a_2^2\big)^2 = c_{11}c_{22} - \frac{c_{12}^2}{4}.$$

Подставляя найденные значения для $b_{11}+b_{22}$, $b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ в уравнение (6), придем к следующему характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 - \lambda(c_{11} + c_{22}) + \left(c_{11}c_{22} - \frac{c_{12}^2}{4}\right) = 0.$$

Его дискриминант равен

$$c_{11}^2 - 2c_{11}c_{22} + c_{22}^2 + c_{12}^2 = (c_{11} - c_{22})^2 + c_{12}^2.$$

Корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения квадратичной формы $b_{11}u^2+2b_{12}uv+b_{22}v^2$ имеют следующий вид:

$$\lambda_1 = \frac{c_{11} + c_{22} - \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + c_{12}^2}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{c_{11} + c_{22} + \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + c_{12}^2}}{2}.$$

Из положительной определенности квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$ и представления для λ_2 следует, что $\lambda_2 > 0$. Для доказательства того, что $\lambda_1 > 0$, достаточно показать, что

$$c_{11} + c_{22} > \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + c_{12}^2}, \quad c_{11}c_{22} - \frac{c_{12}^2}{4} > 0.$$

Последнее справедливо в силу положительной определенности квадратичной формы $T(x_1, x_2, x_3)$. Таким образом, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$.

Сделаем преобразование координат

$$u = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha, \quad v = u' \sin\alpha + v' \cos\alpha, \tag{7}$$

где угол α определяется из соотношения

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{b_{11} - b_{22}}{2b_{12}}. \tag{8}$$

После преобразования координат (7) уравнение (5) запишется в виде

$$\lambda_1 {u'}^2 + \lambda_2 {v'}^2 + 2b_1' u' + 2b_2' v' + b_0 = 0 \tag{9}$$

с коэффициентами

$$b_1' = b_1 \cos\alpha + b_2 \sin\alpha = -\frac{1}{2}\sin\alpha, \quad b_2' = -b_1 \sin\alpha + b_2 \cos\alpha = -\frac{1}{2}\cos\alpha.$$

Выполним преобразование

$$u' = u'' + u_0', \quad v' = v'' + v_0'. \tag{10}$$

После преобразования координат (10) уравнение (9) примет вид

$$\lambda_1 {u''}^2 + \lambda_2 {v''}^2 + 2(\lambda_1 u_0' + b_1')u'' + 2(\lambda_2 v_0' + b_2')v'' + b_0' = 0, \tag{11}$$

где свободный член b_0' равен

$$b_0' = \lambda_1 {u_0'}^2 + \lambda_2 {v_0'}^2 + 2b_1' u_0' + 2b_2' v_0' + b_0.$$

Координаты (u_0', v_0') выбираются из соображений, чтобы коэффициенты при u'' и v'' в (11) обратились в нуль, т. е. чтобы

$$\lambda_1 u_0' + b_1' = 0, \quad \lambda_2 v_0' + b_2' = 0. \tag{12}$$

Из уравнений (12) определим, что

$$u_0' = -\frac{b_1'}{\lambda_1}, \quad v_0' = -\frac{b_2'}{\lambda_2}. \tag{13}$$

Итак, в новой системе координат первоначальное уравнение (5) преобразуется к виду

$$\lambda_1 {u''}^2 + \lambda_2 {v''}^2 + b_0' = 0. \tag{14}$$

Перейдем к исследованию уравнения (14). Поскольку коэффициенты λ_1 и λ_2 одного знака, уравнение (14) относится к эллиптическому типу. Запишем выражение для b_0' с учетом формулы (13). Получим

$$b_0' = \frac{{b_1'}^2}{\lambda_1} + \frac{{b_2'}^2}{\lambda_2} - 2\frac{{b_1'}^2}{\lambda_1} - 2\frac{{b_2'}^2}{\lambda_2} = -\frac{{b_1'}^2}{\lambda_1} - \frac{{b_2'}^2}{\lambda_2} = -\left(\frac{{b_1'}^2\lambda_2 + {b_2'}^2\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\right) < 0.$$

Так как общий знак чисел λ_1 и λ_2 противоположен знаку b_0', переписав уравнение (14) в виде

$$\frac{u''^2}{-\frac{b_0'}{\lambda_1}} + \frac{v''^2}{-\frac{b_0'}{\lambda_2}} = 1,$$

находим, что оба знаменателя $-\frac{b_0'}{\lambda_1}$ и $-\frac{b_0'}{\lambda_2}$ положительны. Обозначив их соответственно через A^2 и B^2, получим каноническое уравнение эллипса

$$\frac{u''^2}{A^2} + \frac{v''^2}{B^2} = 1$$

с полуосями A и B такими, что

$$A^2 = -\frac{b_0'}{\lambda_1} = \frac{{b_1'}^2\lambda_2 + {b_2'}^2\lambda_1}{\lambda_1^2\lambda_2}, \quad B^2 = -\frac{b_0'}{\lambda_2} = \frac{{b_1'}^2\lambda_2 + {b_2'}^2\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2^2}. \tag{15}$$

Найдем связь между «старыми» и «новыми» переменными после выполненных преобразований координат (7) и (10). Имеем

$$\tau = u + iv = (u' + iv')\cos\alpha - v'\sin\alpha + iu'\sin\alpha = \tau' e^{i\alpha}, \quad \text{где } \tau' = u' + iv'.$$

Обозначая

$$\tilde{\tau} = u'' + iv'', \quad \tau_0' = u_0' + iv_0' = -\left(\frac{b_1'}{\lambda_1} + i\frac{b_2'}{\lambda_2}\right),$$

получим $\tau' = u' + iv' = (u'' + iv'') + (u_0' + iv_0') = \tilde{\tau} + \tau_0'$. Таким образом, преобразование координат осуществляется по формуле

$$\tau = (\tilde{\tau} + \tau_0')e^{i\alpha}. \tag{16}$$

В заключение доказательства леммы обоснуем тот факт, что угол α в соотношении (8) может принимать любые значения, т. е. правая часть в выражении (8) неограниченная. Необходимо показать, что полиномы $b_{11} - b_{22}$ и b_{12} (по переменным a_1, a_2 с $|a| = 1$) не имеют общих корней, т. е. у системы

$$\begin{cases} b_{11} - b_{22} = 0, \\ b_{12} = 0 \end{cases}$$

нет решений. Поскольку

$$\begin{aligned} b_{11} - b_{22} = c_{11}a_1^2 + c_{22}a_2^2 + c_{12}a_1a_2 - \left(c_{11}a_2^2 + c_{22}a_1^2 - c_{12}a_1a_2\right) \\ = (c_{11} - c_{22})a_1^2 + 2c_{12}a_1a_2 + (c_{22} - c_{11})a_2^2, \end{aligned}$$

$$b_{12} = \frac{c_{12}}{2}a_1^2 + (c_{22} - c_{11})a_1a_2 - \frac{c_{12}}{2}a_2^2,$$

необходимо показать, что не имеет решений система

$$\begin{cases} (c_{11} - c_{22})a_1^2 + 2c_{12}a_1a_2 + (c_{22} - c_{11})a_2^2 = 0, \\ \frac{c_{12}}{2}a_1^2 + (c_{22} - c_{11})a_1a_2 - \frac{c_{12}}{2}a_2^2 = 0. \end{cases}$$

Предположим, что $a_2 \neq 0$. Разделив каждое уравнение системы на a_2^2 и обозначая $\frac{a_1}{a_2} = y$, получим систему

$$\begin{cases} (c_{11} - c_{22})y^2 + 2c_{12}y + (c_{22} - c_{11}) = 0 \\ \frac{c_{12}}{2}y^2 + (c_{22} - c_{11})y - \frac{c_{12}}{2} = 0. \end{cases}$$

Напомним, что результантом двух квадратных многочленов

$$g_1(y) = A_0y^2 + A_1y + A_2, \quad g_2(y) = B_0y^2 + B_1y + B_2$$

является выражение

$$R(g_1, g_2) = (A_0B_2 - A_2B_0)^2 - (A_0B_1 - A_1B_0)(A_1B_2 - A_2B_1).$$

Известно, что если даны многочлены с произвольными старшими коэффициентами, то результант этих многочленов тогда и только тогда равен нулю, если эти многочлены обладают общим корнем или же если их старшие коэффициенты оба равны нулю.

В нашем случае

$$A_0 = c_{11} - c_{22}, \quad A_1 = 2c_{12}, \quad A_2 = c_{22} - c_{11} = -A_0,$$

$$B_0 = \frac{c_{12}}{2} = \frac{A_1}{4}, \quad B_1 = c_{22} - c_{11} = -A_0, \quad B_2 = -\frac{c_{12}}{2} = -B_0 = -\frac{A_1}{4}.$$

Тогда результант $R(g_1, g_2)$ имеет вид

$$R(g_1, g_2) = -\left(- A_0^2 - A_1\frac{A_1}{4}\right)\left(- A_1\frac{A_1}{4} + A_0(-A_0)\right) = -\left(- A_0^2 - \frac{A_1^2}{4}\right)^2$$
$$= -\left(A_0^2 + \frac{A_1^2}{4}\right)^2 = -\big((c_{11} - c_{22})^2 + c_{12}^2\big)^2 < 0.$$

Таким образом, полиномы $b_{11} - b_{22}$ и b_{12} (по переменным a_1, a_2 с $|a| = 1$) не имеют общих корней. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Следует отметить, что касательной плоскостью к границе области D, проведенной в граничной точке 0, является плоскость $\operatorname{Im}\, z_2 = 0$. Нетрудно видеть, что при $|a| \to +\infty$ сечения $D_a(\tau)$ становятся близки к касательной к границе области D в граничной точке 0, поскольку

$$\operatorname{Im} z_2 = \frac{v}{1 + |a|^2} \to 0, \quad \text{когда } |a| \to +\infty.$$

Более того, при $|a| \to +\infty$ сечения $D_a(\tau)$ лежат в достаточно малой окрестности точки $z_0 = 0$. А именно, если $z \in D_a(\tau)$, то

$$|z - z_0|^2 = \left|\frac{\tau}{1 + |a|^2}a\right|^2 + \left|\frac{\tau}{1 + |a|^2}\right|^2 = \frac{|\tau|^2|a|^2}{(1 + |a|^2)^2} + \frac{|\tau|^2}{(1 + |a|^2)^2} = \frac{|\tau|^2}{1 + |a|^2} \to 0$$

при $|a| \to +\infty$.

Используя вещественную аналитичность функции $\rho(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, разрешим уравнение $\rho(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$ относительно переменной $\bar{z}_2$. Поскольку $\rho(z, \bar{z})$ — вещественно-аналитическая функция, она разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Перейдем от координат $\bar{z}$ к переменным ζ, т. е. сделаем замену

$$\bar{z}_1 = \zeta_1, \quad \bar{z}_2 = \zeta_2.$$

Получим функцию $\hat{\rho}(z, \zeta)$, голоморфную по z и ζ такую, что функция $\rho(z)$ определяется условиями

$$\hat{\rho}(z, \zeta) = 0, \quad \zeta = \bar{z}.$$

Поскольку градиент функции $\hat{\rho}(z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ отличен от нуля, производная по одной из переменных отлична от нуля, например, $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\zeta_2} \neq 0$. Применяя теорему о неявной функции для голоморфных функций, выразим переменную ζ_2 через остальные переменные:

$$\zeta_2 = \psi(z_1, z_2, \zeta_1), \quad \bar{z}_1 = \zeta_1, \quad \bar{z}_2 = \zeta_2.$$

Тогда $f(z_1, z_2, \bar{z}_1) = \psi(z_1, z_2, \zeta_1, \psi(z_1, z_2, \zeta_1))$ — вещественно-аналитическая функция, которая разлагается в ряд по переменным $z_1, z_2, \zeta_1 = \bar{z}_1$, сходящийся в окрестности граничной точки $(0, 0)$. А именно,

$$f(z_1, \bar{z}_1, z_2) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} z_1^h \bar{z}_1^k z_2^m \quad \text{на } \partial D,$$

где переобозначили индекс суммирования, давая вес 2 по z_2.

Выбирая $|a|$ достаточно большим, будем рассматривать моменты $G(a, N)$ на сечениях $D_a(\tau)$:

$$\begin{aligned} G(a, N) &= \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N f(D_a(\tau))\, d\tau \\ &= \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \left(\frac{\tau}{1+|a|^2} a\right)^h \left(\overline{\frac{\tau}{1+|a|^2} a}\right)^k \left(\frac{\tau}{1+|a|^2}\right)^m d\tau. \end{aligned}$$

Докажем, что $b_{h,k,m} = 0$ для $k > 0$. Пусть l_0 — наименьшая весовая степень такая, что $b_{h,k,m} \neq 0$ для $k > 0$ и k_0 — наибольшая степень по $\bar{z}_1$, для которой это выполнено. В силу условия теоремы $G(a, N) = 0$ для всех N и a, в частности, для ta с $|a| = 1$ и $t \to +\infty$. Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} G(ta, N) t^{l_0} &= \lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\partial\Delta_a} \tau^N \sum_{l=l_0}^{+\infty} \sum_{h+k+2m=l} b_{h,k,m} \\ &\times \left(\frac{\tau}{1+|ta|^2} ta\right)^h \left(\overline{\frac{\tau}{1+|ta|^2} ta}\right)^k \left(\frac{\tau}{1+|ta|^2}\right)^m t^{l_0}\, d\tau \\ &= \sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} a^h \bar{a}^k \int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m\, d\tau = 0, \end{aligned}$$

где $\partial\Delta$ определяется соотношением (4).

Конформное отображение [15, гл. II, § 3, п. 36] внешности эллипса

$$\frac{u''^2}{A^2} + \frac{v''^2}{B^2} = 1$$

на внешность единичного круга осуществляет функция

$$\omega = \frac{\tilde{\tau} + \sqrt{\tilde{\tau}^2 - c^2}}{A + B},$$

где $c = \sqrt{A^2 - B^2}$. Тогда

$$\tilde{\tau} = \frac{A+B}{2}\omega + \frac{A-B}{2}\frac{1}{\omega}. \tag{17}$$

Таким образом, с учетом преобразования координат (16) и представления (17) для $\tilde{\tau}$ имеем искомое отображение внешности эллипса (4) на внешность единичного круга по формуле

$$\tau = \left(-\left[\frac{b_1'}{\lambda_1} + i\frac{b_2'}{\lambda_2}\right] + \frac{A+B}{2}\omega + \frac{A-B}{2}\frac{1}{\omega}\right)e^{i\alpha},$$

где полуоси A и B определяются формулой (15). При этом

$$\bar\tau = \left(-\left[\frac{b_1'}{\lambda_1} - i\frac{b_2'}{\lambda_2}\right] + \frac{A+B}{2}\bar\omega + \frac{A-B}{2}\frac{1}{\bar\omega}\right)e^{-i\alpha},$$

$$d\tau = \left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\frac{1}{\omega^2}\right)e^{i\alpha}\,d\omega.$$

Несложные, но громоздкие вычисления приводят к такому результату.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar\tau^k \tau^m\,d\tau = e^{i\alpha(N+h+m+1-k)}2\pi i\cdot\sigma,$$

где

$$\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^{N+h+m+k+1}(-1)^{N+h+m+k}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{N+h+m+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k}$$
$$\times\left(\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{N+h+m+k+1}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\=N+h+m+k+1}}\binom{k}{\alpha_3}\binom{k}{\alpha_4}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^{\alpha_1-\alpha_4}$$
$$\times\left(\frac{\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} - i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}}{\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}}\right)^{\alpha_1+\alpha_4}\left[-\binom{N+h+m}{\alpha_1-1}\binom{N+h+m}{\alpha_2-1}\right.$$
$$\left.+\binom{N+h+m}{\alpha_1}\binom{N+h+m}{\alpha_2}\right]. \qquad (18)$$

Лемма 3. *Выражение* (18) *не равно тождественному нулю.*

Доказательство. Рассмотрим сумму, входящую в выражение для σ, как многочлен от переменной $\left(\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} - i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}\right)/\left(\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}\right)$. Таким образом, для доказательства того, что $\sigma \not\equiv 0$, достаточно показать, что в сумме есть хотя бы одно слагаемое, отличное от нуля. Покажем, что отличен от нуля коэффициент при степени $\alpha_1 + \alpha_4 = 1$. В этом случае для наборов индексов возможны следующие варианты:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_4 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 = 0,\ \alpha_4 = 1.$$

Тогда выражение для коэффициента при степени $\alpha_1 + \alpha_4 = 1$ будет иметь вид

$$\sum_{\substack{\alpha_2+\alpha_3\\=N+h+m+k}}\binom{k}{\alpha_3}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^{1}\left[-\binom{N+h+m}{\alpha_2-1}\right.$$
$$\left.+\binom{N+h+m}{1}\binom{N+h+m}{\alpha_2}\right]$$
$$+\sum_{\substack{\alpha_2+\alpha_3\\=N+h+m+k}}\binom{k}{\alpha_3}\binom{k}{1}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}}\right)^{-1}\left[\binom{N+h+m}{\alpha_2}\right]$$
$$= k\left(-\frac{\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1}}\right) = k\frac{4\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_2-\lambda_1} \not\equiv 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Поскольку

$$\sum_{h+k+2m=l_0} b_{h,k,m} a^h \bar{a}^k \int\limits_{\partial\Delta} \tau^N \tau^h \bar{\tau}^k \tau^m \, d\tau = 0,$$

подставляя в данное выражение найденное значение для интеграла и выбирая $N = k_0 - 1$, имеем

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} b_{h,k_0,m} e^{i\alpha(h+m)} 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right)^{2k_0+h+m} (-1)^{2k_0+h+m-1}$$
$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0+h+m} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0} \left(\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{2k_0+h+m}$$
$$\times \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ =2k_0+h+m}} \binom{k_0}{\alpha_3} \binom{k_0}{\alpha_4} \left(\frac{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1}}\right)^{\alpha_1 - \alpha_4}$$
$$\times \left(\frac{\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} - i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}}{\frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}}\right)^{\alpha_1+\alpha_4} \left[-\binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_1 - 1} \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_2 - 1}\right.$$
$$\left. + \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_1} \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_2}\right] a^{h-k_0} = 0.$$

Обозначим $\psi = e^{i\alpha}$, $\xi = \frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}$ и соответственно $\bar{\xi} = \frac{b_1'}{\sqrt{\lambda_1}} - i\frac{b_2'}{\sqrt{\lambda_2}}$. Простые вычисления показывают, что справедлива

Лемма 4. *Выполняются следующие соотношения:*

$$\psi = i[\xi(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) - \bar{\xi}(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1})], \quad a^4 = \frac{1}{\psi^4} \frac{c_{11} - c_{22} + c_{12} i}{c_{11} - c_{22} - c_{12} i}.$$

Продолжим доказательство теоремы. Обозначая

$$x = \frac{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1}}, \quad 0 < x < 1, \tag{19}$$

приходим к следующему соотношению на коэффициенты $b_{h,k_0,m}$:

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} b_{h,k_0,m} (i[\xi(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) - \bar{\xi}(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1})])^{h+m} 2\pi i \left(\frac{1}{2}\right)^{2k_0+h+m}$$
$$\times (-1)^{2k_0+h+m-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0+h+m} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0} \xi^{2k_0+h+m} a^{h-k_0}$$
$$\times \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ =2k_0+h+m}} \binom{k_0}{\alpha_3} \binom{k_0}{\alpha_4} x^{\alpha_1 - \alpha_4} \left(\frac{\bar{\xi}}{\xi}\right)^{\alpha_1+\alpha_4}$$
$$\times \left[-\binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_1 - 1} \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_2 - 1}\right.$$
$$\left. + \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_1} \binom{k_0 - 1 + h + m}{\alpha_2}\right] = 0.$$

Множество $\eta = \bar{\xi}$ — порождающее многообразие в $\mathbb{C}^2$, которое является множеством единственности для голоморфных функций [16, предложение], т. е. данное равенство справедливо для любых ξ и η, стало быть,

$$\sum_{h+k_0+2m=l_0} b_{h,k_0,m}(i[\xi(\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1})-\eta(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})])^{h+m} 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)^{2k_0+h+m}$$
$$\times(-1)^{2k_0+h+m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0+h+m}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0}\xi^{2k_0+h+m}\,a^{h-k_0}$$
$$\times\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\=2k_0+h+m}}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{\alpha_1+\alpha_4}$$
$$\times\left[-\binom{k_0-1+h+m}{\alpha_1-1}\binom{k_0-1+h+m}{\alpha_2-1}\right.$$
$$\left.+\binom{k_0-1+h+m}{\alpha_1}\binom{k_0-1+h+m}{\alpha_2}\right]=0.$$

При этом для индексов суммирования справедливы следующие ограничения:

$$\alpha_1\le k_0+h+m,\quad \alpha_2\le k_0+h+m,\quad \alpha_3\le k_0,\quad \alpha_4\le k_0.$$

В последнем соотношении приведем подобные мономы во внутренней сумме, обозначив степени по η и ξ новыми переменными s_1 и s_2, т. е.

$$s_1=\alpha_1+\alpha_4,\quad s_2=2k_0+h+m-(\alpha_1+\alpha_4).$$

Имеем

$$\sum_{s_1,s_2} b_{h,k_0,m}\eta^{s_1}\xi^{s_2}(i[\xi(\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1})-\eta(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})])^{s_1+s_2-2k_0}2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1+s_2}$$
$$\times(-1)^{s_1+s_2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{s_1+s_2-k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0}a^{2(s_1+s_2)-l_0-4k_0}$$
$$\times\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\=s_1+s_2}}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}\left[-\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2-1}\right.$$
$$\left.+\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0,$$

где $h=2(s_1+s_2)-l_0-3k_0$, $m=l_0+k_0-(s_1+s_2)$.

Действительно, поскольку с одной стороны $h+k_0+2m=l_0$, а согласно введенным обозначениям $h+m=s_1+s_2-2k_0$, то $s_1+s_2-k_0+m=l_0$ и легко прийти к требуемым выражениям для h и m.

Распишем полученное соотношение по однородным мономам степени $r=$

s_1+s_2. Имеем

$$\sum_{r=2k_0}^{l_0+k_0}\sum_{s_1+s_2=r} b_{h,k_0,m}\eta^{s_1}\xi^{s_2}(i[\xi(\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1})-\eta(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})])^{s_1+s_2-2k_0}$$

$$\times 2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1+s_2}(-1)^{s_1+s_2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{s_1+s_2-k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0}a^{2(s_1+s_2)-l_0-4k_0}$$

$$\times\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\=s_1+s_2}}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}\left[-\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2-1}\right.$$

$$\left.+\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0,$$

где

$$h=2r-l_0-3k_0,\quad m=l_0+k_0-r,\quad h+m=r-2k_0, \tag{20}$$

а для индексов суммирования справедливы следующие ограничения:

$$\alpha_1\le r-k_0,\quad \alpha_2\le r-k_0,\quad \alpha_3\le k_0,\quad \alpha_4\le k_0. \tag{21}$$

Каждая однородная составляющая есть нуль, т. е.

$$\sum_{s_1+s_2=r} b_{h,k_0,m}\eta^{s_1}\xi^{s_2}(i[\xi(\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1})-\eta(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})])^{s_1+s_2-2k_0}2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)^{s_1+s_2}$$

$$\times(-1)^{s_1+s_2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{s_1+s_2-k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0}a^{2(s_1+s_2)-l_0-4k_0}$$

$$\times\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\=s_1+s_2}}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}\left[-\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2-1}\right.$$

$$\left.+\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_1}\binom{s_1+s_2-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0.$$

Вынеся за знак суммы множители, не зависящие от индексов суммирования, получим соотношение

$$(i[\xi(\sqrt{\lambda_2}-\sqrt{\lambda_1})-\eta(\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1})])^{r-2k_0}2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)^{r}(-1)^{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{r-k_0}$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}-\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^{k_0}a^{2r-l_0-4k_0}\sum_{s_1+s_2=r}b_{h,k_0,m}\eta^{s_1}\xi^{s_2}$$

$$\times\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=r}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}\left[-\binom{r-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2-1}\right.$$

$$\left.+\binom{r-k_0-1}{\alpha_1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0.$$

Воспользовавшись тем, что слагаемые, стоящие за знаком суммы, отличны от нуля, придем к соотношению

$$\sum_{s_1+s_2=r}b_{h,k_0,m}\eta^{s_1}\xi^{s_2}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=r}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}$$

$$\times\left[-\binom{r-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2-1}+\binom{r-k_0-1}{\alpha_1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0.$$

Если многочлен от двух переменных тождественно равен нулю, то равны нулю все его коэффициенты. Тем самым справедлива

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$b_{h,k_0,m}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=r}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4}$$
$$\times\left[-\binom{r-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2-1}+\binom{r-k_0-1}{\alpha_1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2}\right]=0,$$

где переменная x определена формулой (19), *для h и m выполнены соотношения* (20), *а индексы суммирования $\alpha_1,\dots,\alpha_4$ удовлетворяют ограничениям* (21).

Обозначим

$$g(x)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=r}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}x^{\alpha_1-\alpha_4+k_0}$$
$$\times\left[-\binom{r-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2-1}+\binom{r-k_0-1}{\alpha_1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2}\right].$$

Распишем разность произведений биномиальных коэффициентов, входящих в выражение для $g(x)$. Получим

$$-\binom{r-k_0-1}{\alpha_1-1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2-1}+\binom{r-k_0-1}{\alpha_1}\binom{r-k_0-1}{\alpha_2}$$
$$=-\frac{(r-k_0-1)!}{(\alpha_1-1)!(r-k_0-\alpha_1)!}\frac{(r-k_0-1)!}{(\alpha_2-1)!(r-k_0-\alpha_2)!}+\frac{(r-k_0-1)!}{\alpha_1!(r-k_0-1-\alpha_1)!}$$
$$\times\frac{(r-k_0-1)!}{\alpha_2!(r-k_0-1-\alpha_2)!}=\frac{(r-k_0)!(r-k_0)!}{\alpha_1!\alpha_2!(r-k_0-\alpha_1)!(r-k_0-\alpha_2)!}\left[1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{r-k_0}\right]$$
$$=\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_2}\left[1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{r-k_0}\right].$$

Тогда $g(x)$ запишется в виде

$$g(x)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=r}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_4}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_2}\left[1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{r-k_0}\right]x^{\alpha_1-\alpha_4+k_0}.$$

Положим $p=\alpha_1-\alpha_4+k_0$, $0\le p\le r$. Тогда

$$g(x)=\sum_{2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-p=r-k_0}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}$$
$$\times\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_2}\left[1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{r-k_0}\right]x^p.$$

Таким образом, можно записать $g(x)$ в виде $g(x)=\sum\limits_{p=0}^{r}c_px^p$, где коэффициенты c_p имеют вид

$$c_p=\sum_{2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=r+p-k_0}\binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_2}\left[1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{r-k_0}\right].$$

Лемма 6. *Коэффициенты c_p и симметричные им коэффициенты c_{r-p} многочлена $g(x)$ связаны между собой соотношением*

$$c_p+c_{r-p}=0, \tag{22}$$

и единица является корнем многочлена $g(x)$.

Замечание 1. Если $r=2j$, то $c_j=0$.

Лемма 7. *Многочлен $g(x)$ имеет единственный положительный корень.*

Доказательство. Согласно теореме Декарта число положительных корней многочлена с учетом их кратности равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число. Таким образом, для единственности положительного корня многочлена $g(x)$ необходимо показать наличие ровно одной перемены знака в системе его коэффициентов.

Покажем, что $c_p \geq 0$, когда $0 \leq p \leq r/2 \leq r-k_0$. Ввиду соотношения (22) это будет означать наличие ровно одной перемены знака в системе коэффициентов многочлена $g(x)$. Сделав замену $\beta = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_2 = \beta - \alpha_1$, придем к следующему выражению:

$$
\begin{aligned}
c_p = &\sum_{\substack{\alpha_1+\beta+\alpha_3\\ =r+p-k_0}} \binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\beta-\alpha_1}\left[1-\frac{\beta}{r-k_0}\right]\\
&= \sum_{\beta=0}^{r-k_0}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_3\\ =r+p-k_0-\beta}} \binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\beta-\alpha_1}\left[\frac{r-k_0-\beta}{r-k_0}\right]\\
&- \sum_{\beta=r-k_0}^{r+p-k_0}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_3\\ =r+p-k_0-\beta}} \binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\beta-\alpha_1}\left[\frac{\beta-(r-k_0)}{r-k_0}\right].
\end{aligned}
$$

Во второй сумме сделаем замену $\beta' = \beta - (r-k_0)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta=r-k_0}^{r+p-k_0}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_3\\ =r+p-k_0-\beta}} \binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\beta-\alpha_1}\left[\frac{\beta-(r-k_0)}{r-k_0}\right]\\
&\quad= \sum_{\alpha_1=0}^{p}\sum_{\beta'=0}^{p-\alpha_1}\binom{k_0}{p-\beta'-\alpha_1}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_1-\beta'}\left[\frac{\beta'}{r-k_0}\right].
\end{aligned}
$$

В первой сумме исходного выражения для c_p слагаемые по β запишем в обратном порядке, т. е. сделаем замену $\beta' = r - k_0 - \beta$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta=0}^{r-k_0}\sum_{\alpha_1+\alpha_3=r+p-k_0-\beta} \binom{k_0}{\alpha_3}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\beta-\alpha_1}\left[\frac{r-k_0-\beta}{r-k_0}\right]\\
&\quad= \sum_{\alpha_1=0}^{p}\sum_{\beta'=0}^{p-\alpha_1}\binom{k_0}{p+\beta'-\alpha_1}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_1+\beta'}\left[\frac{\beta'}{r-k_0}\right]\\
&+ \sum_{\alpha_1=0}^{p}\sum_{\beta'=p-\alpha_1+1}^{r-k_0-\alpha_1}\binom{k_0}{p+\beta'-\alpha_1}\binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p}\binom{r-k_0}{\alpha_1}\binom{r-k_0}{\alpha_1+\beta'}\left[\frac{\beta'}{r-k_0}\right].
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$c_p = \sum_{\alpha_1=0}^{p} \sum_{\beta'=p-\alpha_1+1}^{r-k_0-\alpha_1} \binom{k_0}{p+\beta'-\alpha_1} \binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p} \binom{r-k_0}{\alpha_1} \binom{r-k_0}{\alpha_1+\beta'} \left[\frac{\beta'}{r-k_0}\right]$$
$$+ \sum_{\alpha_1=0}^{p} \sum_{\beta'=0}^{p-\alpha_1} \binom{k_0}{\alpha_1+k_0-p} \binom{r-k_0}{\alpha_1} \left[\frac{\beta'}{r-k_0}\right] \left[\binom{k_0}{p+\beta'-\alpha_1} \binom{r-k_0}{\alpha_1+\beta'} - \binom{k_0}{p-\beta'-\alpha_1} \binom{r-k_0}{\alpha_1-\beta'} \right].$$

Выпишем разность произведений биномиальных коэффициентов. Получим

$$\binom{k_0}{p+\beta'-\alpha_1} \binom{r-k_0}{\alpha_1+\beta'} - \binom{k_0}{p-\beta'-\alpha_1} \binom{r-k_0}{\alpha_1-\beta'}$$
$$= \frac{k_0!}{(p+\beta'-\alpha_1)!(k_0-p+\beta'+\alpha_1)!} \frac{(r-k_0)!}{(\alpha_1+\beta')!(r-k_0-\alpha_1+\beta')!}$$
$$\times [(k_0-p-\beta'+\alpha_1+1)\dots(k_0-p+\beta'+\alpha_1)(r-k_0-\alpha_1-\beta'+1)\dots(r-k_0-\alpha_1+\beta')$$
$$- (p-\beta'-\alpha_1+1)\dots(p+\beta'-\alpha_1)(\alpha_1-\beta'+1)\dots(\alpha_1+\beta')].$$

Покажем, что для заданных значений α_1 и β' и при $0 \le p \le r/2 \le r-k_0$ выполнено соотношение

$$(k_0-p-\beta'+\alpha_1+1)\dots(k_0-p+\beta'+\alpha_1)(r-k_0-\alpha_1-\beta'+1)\dots(r-k_0-\alpha_1+\beta')$$
$$- (p-\beta'-\alpha_1+1)\dots(p+\beta'-\alpha_1)(\alpha_1-\beta'+1)\dots(\alpha_1+\beta') \ge 0. \quad (23)$$

Заметим, что при $0 \le p \le r/2 \le r-k_0$

$$(p-\beta'-\alpha_1+1)\dots(p+\beta'-\alpha_1) \le (r-k_0-\alpha_1-\beta'+1)\dots(r-k_0-\alpha_1+\beta').$$

При этом если $0 \le p \le k_0 \le r/2 \le r-k_0$, то

$$(\alpha_1-\beta'+1)\dots(\alpha_1+\beta') \le (k_0-p-\beta'+\alpha_1+1)\dots(k_0-p+\beta'+\alpha_1).$$

Таким образом, при $p \le k_0 \le r/2 \le r-k_0$ искомое неравенство (23) выполняется. Рассмотрим теперь случай, когда $k_0 \le p \le r/2 \le r-k_0$. В этом случае для доказательства неравенства (23) достаточно доказать справедливость следующих соотношений:

$$(k_0-p-\beta'+\alpha_1+1)(r-k_0-\alpha_1-\beta'+1) \ge (p-\beta'-\alpha_1+1)(\alpha_1-\beta'+1), \dots,$$
$$(k_0-p+\beta'+\alpha_1)(r-k_0-\alpha_1+\beta') \ge (p+\beta'-\alpha_1)(\alpha_1+\beta').$$

В данной группе соотношений будем доказывать первое и последнее соотношения. Промежуточные соотношения будут выполнены в силу их монотонности по β'. Докажем первое соотношение:

$$(k_0-p-\beta'+\alpha_1+1)(r-k_0-\alpha_1-\beta'+1) \ge (p-\beta'-\alpha_1+1)(\alpha_1-\beta'+1). \quad (24)$$

После раскрытия скобок имеем

$$(k_0-p)(r-k_0) - \alpha_1 k_0 - \beta' k_0 + \alpha_1 p + \beta' p + k_0 - p - \beta'(r-k_0) + \beta'\alpha_1 + {\beta'}^2 - \beta'$$
$$+ \alpha_1(r-k_0) - \alpha_1^2 - \alpha_1\beta' + \alpha_1 + r - k_0 - \alpha_1 - \beta' + 1 \ge \alpha_1 p - \beta' p + p - \beta'\alpha_1 + {\beta'}^2 - \beta'$$
$$- \alpha_1^2 + \alpha_1\beta' - \alpha_1 + \alpha_1 - \beta' + 1.$$

Приведя подобные, получим

$$(k_0-p)(r-k_0)-\alpha_1 k_0-\beta' k_0+\beta' p+k_0-p-\beta'(r-k_0)+\alpha_1(r-k_0)+r-k_0 \geq -\beta' p+p,$$
$$-(r-k_0)(k_0-p-\beta'+\alpha_1)+k_0(\alpha_1+\beta')-2\beta' p+2p-r \leq 0.$$

Заметим, что $k_0-p-\beta'+\alpha_1 \geq 0$, поскольку это биномиальный коэффициент. При заданных значениях α_1 и β' рассмотрим положительную часть $k_0(\alpha_1+\beta')-2\beta' p$ данного неравенства:

$$k_0(\alpha_1+\beta')-2\beta' p = k_0\alpha_1-\beta' p-(p-k_0)\beta'.$$

Для максимального значения положительной части необходимо взять $\alpha_1 = p-1$, $\beta' = 1$. Имеем

$$-(r-k_0)(k_0-p-1+p-1)+k_0 p-2p+2p-r \leq 0,$$
$$-(r-k_0)(k_0-2)+(k_0-2)p+2p-r \leq 0.$$

Данное неравенство выполнено, поскольку $p \leq r/2 \leq r-k_0$. Таким образом, доказана справедливость соотношения (24).

Докажем последнее соотношение в группе соотношений, а именно покажем, что

$$(k_0-p+\beta'+\alpha_1)(r-k_0-\alpha_1+\beta') \geq (p+\beta'-\alpha_1)(\alpha_1+\beta'). \tag{25}$$

Раскроем скобки:

$$(k_0-p)(r-k_0)-\alpha_1 k_0+\alpha_1 p+\beta' k_0-\beta' p+\beta'(r-k_0)-\alpha_1\beta'+{\beta'}^2+\alpha_1(r-k_0)-\alpha_1^2$$
$$+\alpha_1\beta' \geq p\alpha_1+p\beta'+\beta'\alpha_1+{\beta'}^2-\alpha_1^2-\alpha_1\beta'.$$

После приведения подобных слагаемых получим

$$(k_0-p)(r-k_0)-\alpha_1 k_0+\beta' k_0-\beta' p+\beta'(r-k_0)+\alpha_1(r-k_0)-p\beta' \geq 0,$$
$$-(r-k_0)(k_0-p+\beta'+\alpha_1)+k_0(\alpha_1-\beta')+2p\beta' \leq 0.$$

Заметим, что $k_0-p+\beta'+\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1-\beta' \geq 0$, поскольку это биномиальные коэффициенты. При заданных значениях α_1 и β' рассмотрим положительную часть $k_0(\alpha_1-\beta')+2p\beta'$ данного неравенства:

$$k_0(\alpha_1-\beta')+2p\beta' = k_0\alpha_1+p\beta'+(p-k_0)\beta'.$$

Для максимального значения положительной части необходимо взять $\alpha_1 = p/2$, $\beta' = p/2$. Имеем

$$-(r-k_0)(k_0-p+p/2+p/2)+k_0(p/2-p/2)+2p\cdot\frac{p}{2} \leq 0, \quad -(r-k_0)k_0+k_0^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство выполнено, поскольку $r \geq 2k_0$.

Таким образом, доказана справедливость соотношения (25). Из приведенных выше рассуждений и выкладок видно, что $c_p \geq 0$, когда $0 \leq p \leq r/2$. $\square$

Применяя вышеприведенную лемму, из леммы 5 получим, что $b_{h,k_0,m} = 0$ для $h+k_0+2m = l_0$. Тем самым при $k \geq 1$ имеем $b_{h,k,m} = 0$ для любой весовой степени l.

Нами показано, что функция f голоморфна в окрестности граничной точки 0. Ввиду условий теоремы функция f голоморфно продолжается на пересечение области D с каждой комплексной прямой, проходящей через граничную точку 0. Следовательно, по теореме Гартогса о продолжении (см. [17, гл. 3, § 11, п. 32, теорема 1]) функция f будет голоморфно продолжаться во всю область $D \subset \mathbb{C}^2$. Данные рассуждения заканчивают доказательство теоремы в двумерном случае. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграновский М. Л., Вальский Р. Э.* Максимальность инвариантных алгебр функций // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 1. С. 3–12.
2. *Stout E. L.* The boundary values of holomorphic functions of several complex variables // Duke Math. J. 1977. V. 44, N 1. P. 105–108.
3. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
4. *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* Higher-dimensional boundary analogs of the Morera theorem in problems of analytic continuation of functions // J. Math. Sci. 2004. V. 120, N 6. P. 1842–1867.
5. *Аграновский М. Л., Семенов А. М.* Граничные аналоги теоремы Гартогса // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 168–170.
6. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения // Мат. заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 545–551.
7. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций, заданных на границе области // Журн. СФУ. Сер. мат. и физ. 2012. Т. 5, № 2. С. 213–222.
8. *Agranovsky M.* Analog of a theorem of Forelli for boundary values of holomorphic functions on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // J. Anal. Math. 2011. V. 113, N 1. P. 293–304.
9. *Baracco L.* Holomorphic extension from the sphere to the ball // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 388, N 2. P. 760–762.
10. *Globevnik J.* Meromorphic extensions from small families of circles and holomorphic extensions from spheres // Trans. Amer. Math. Soc. 2012. V. 364. P. 5857–5890.
11. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* Голоморфное продолжение функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в шаре // Журн. СФУ. Сер. мат. и физ. 2012. Т. 5, № 4. С. 547–557.
12. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г., Кузоватов В. И.* Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 326–339.
13. *Кузоватов В. И.* О некоторых семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 107–121.
14. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002.
16. *Пинчук С. И.* Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Мат. заметки. 1974. Т. 15, № 2. С. 205–212.
17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных. СПб.: Лань, 2004. Ч. 2.

Статья поступила 19 ноября 2012 г.

Кузоватов Вячеслав Игоревич, Кытманов Александр Мечиславович
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
kuzovatov@yandex.ru, akytmanov@sfu-kras.ru