Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ КОШИ НА ЧАСТИ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

С. Г. Пятков, А. Г. Боричевская

Аннотация. Рассмотрен вопрос о существовании и единственности решений некоторых обратных задач об определении решения параболического уравнения и коэффициента в этом уравнении по данным начально-краевой задачи и данным Коши на части границы пространственной цилиндрической области. Решение ищется в пространстве Соболева, а коэффициент — в классе непрерывных функций.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение второго порядка, краевая задача, условие переопределения.

Введение

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$u_t - Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор второго порядка и $G = \Omega \times (0,d)$ (Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$). Пусть $\Gamma = \partial G$ и $S = \Gamma \times (0,T)$. Положим $S_0 = \{(x,t) \in \partial Q : x_n = 0\}$, $S_2 = \{(x,t) \in \partial Q : x_n = d\}$, $S_1 = \partial\Omega \times (0,d) \times (0,T)$. Уравнение (1) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

данными переопределения

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \psi(x',t) \quad (x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})) \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$u|_{S_0} = h_0(x',t), \tag{4}$$

$$u|_{S_1} = h_1(x,t), \quad u_{x_n}|_{S_2} = h_2(x',t) \tag{5}$$

или

$$u|_{S_1} = h_1(x,t), \quad u|_{S_2} = h_2(x,t). \tag{6}$$

Мы рассматриваем обратную задачу об определении вместе с решением u уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(5) или условиям (2)–(4), (6), неизвестной функции $q(x',t)$, которая присутствует как множитель в выражении Lu.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00260а).

© 2013 Пятков С. Г., Боричевская А. Г.

Такие обратные задачи и близкие к ним возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузионных процессов, процессов фильтрации и во многих других областях. В случае, когда условия переопределения заданы не на границе цилиндра, а на некоторых внутренних многообразиях (в частности, на плоскостях, пересекающих G), подобные задачи рассматривались в работах Ю. Я. Белова, Ю. Е. Аниконова и ряда других авторов (см. [1–4] и указанную в них библиографию). Довольно подробно задачи с данными Коши на боковой поверхности цилиндра изучены в случае $n = 1$ (см. [5–11]), причем как в линейном, т. е. в задаче об определении функции источника (правой части), так и в нелинейном случаях. В частности, ряд теорем существования и оценок устойчивости в пространствах Гёльдера могут быть найдены в монографии М. Иванчова [5] и последующих его работах. В многомерной ситуации оценки устойчивости для решений задач вида (1)–(5) с дополнительными условиями интегрального переопределения имеются в [12]. Близкая постановка исследуется в [13], где также получены оценки устойчивости. Ряд результатов по обратным задачам с данными Коши на боковой поверхности цилиндра изложен в монографиях [14–16], где в основном рассматривается случай $n = 1$ и неизвестные коэффициенты или правая часть зависят лишь от пространственных переменных. В [15] имеется теорема существования решений обратной задачи об определении правой части в уравнении (1) с данными (2)–(4) в пространствах Гёльдера в случае $\Omega = \mathbb{R}^{n-1}$ и $d = \infty$. Часто для определения коэффициентов или правой части, зависящих от пространственных переменных, задается оператор Дирихле — Неймана или Неймана — Дирихле (см. определения и результаты в [14]). Отметим также монографии [17, 18], где изложено много результатов, касающихся обратных параболических задач, и указана достаточно полная библиография. В целом можно сказать, что для вышеописанных задач в многомерном случае имеются лишь теоремы единственности и оценки устойчивости в некоторых модельных ситуациях. Цель настоящей работы — получить наряду с оценками устойчивости теоремы существования решений (u, q) задач (1)–(5) и (1)–(4), (6). Решение ищется в пространствах Соболева.

§ 1. Определения и основные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство сильно измеримых функций, определенных на G и принимающих значения в E, наделенное конечной нормой $\|\|u(x)\|_E\|_{L_p(G)}$ (см. [19]). Мы также используем пространства $C^k(\overline{G}; E)$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$ стандартны (см. [19]). При нецелых s пространство Соболева $W_p^s(G; E)$ совпадает с пространством Бесова $B_{p,p}^s(G; E)$. Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{C}$, то последнее пространство обозначаем через $B_{p,p}^s(G)$. Аналогично вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $Q = G \times J$ и $W_p^{s,r}(Q) = W_p^r(J; L_p(G)) \cap L_p\big(J; W_p^s(G)\big)$, соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^r(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p\big(J; W_p^s(\Gamma)\big)$. Здесь используются обозначения Γ, S из введения. Аналогично определяем анизотропные пространства Гёльдера и Бесова (см. [19–22]).

Приведем условия на данные задачи. Для простоты считаем, что область Ω ограничена и $\partial\Omega \in C^2$. Обозначим $S_1^\delta = \partial\Omega \times (0, \delta) \times (0, T)$, $G_\delta = \Omega \times (0, \delta)$,

$Q_\delta^\gamma = G_\delta\times(0,\gamma)$, $Q_\delta = G_\delta\times(0,\gamma)$, $Q^\gamma = G\times(0,\gamma)$, $S_0^\gamma = \partial\Omega\times(0,\gamma)$, $Q_0^\gamma = \Omega\times(0,\gamma)$, $Q_0 = \Omega\times(0,T)$. Относительно данных предполагаем, что

$$u_0(x) \in B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}}(G), \quad h_i \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S_i)\ (i=0,1), \quad \psi \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S_0). \tag{7}$$

В случае, если рассматривается задача (1)–(5), предполагаем, что

$$h_2 \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p},\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(S_2), \tag{8}$$

а в случае задачи (1)–(4), (6) — что

$$h_2 \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S_2). \tag{9}$$

Также имеем дополнительные условия в некоторой области Q_δ. Считаем, что

$$\exists\delta>0 \quad u_{0x_n} \in B_{p,p}^{2-\frac{2}{p}}(G_\delta), \quad h_{1x_n} \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}\left(S_1^\delta\right). \tag{10}$$

Далее фиксируем эту величину δ. Естественно, функции h_i, u_0, ψ должны удовлетворять условиям согласования, сводящимся к выполнению равенств на границе, а для каких-то критических значений p и к выполнению некоторых интегральных соотношений (см. [23, теорема 7.3]). Чтобы упростить изложенное, запишем условия согласования в виде

$$\left(\exists\Phi \in W_p^{2,1}(Q)\right)\ \Phi_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_\delta), \tag{11}$$

где Φ удовлетворяет условиям (2)–(5) или соответственно (2)–(4), (6). Условия существования такой функции Φ описаны в [23]. Далее предполагаем, что

$$f \in L_p(Q), \quad f_{x_n} \in L_p(Q_\delta), \tag{12}$$

$$Lu = L_0u + qL_1u, \quad L_ku = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{k=1}^n b_i^k(x,t)u_{x_i} + c^k(x,t)u,\ k=0,1.$$

$$a_{in}^k(x',d,t) = a_{in}^k(x',0,t) = 0\ (i=1,2,\dots,n-1), \quad (x',t)\in Q_0, \tag{13}$$

$$a_{ij}^k \in C(\overline{Q}), \quad b_i^k \in L_{r_0}(Q)\ (i,j=1,2,\dots,n), \quad c^k \in L_{r_1}(Q) \tag{14}$$

для некоторых $r_0 > \max(p, n+2)$, $r_1 > \max\left(p, \frac{n+2}{2}\right)$ и

$$a_{ijx_n}^k \in L_\infty(Q_\delta), \quad b_{ix_n}^k \in L_{r_0}(Q_\delta)\ (i,j=1,2,\dots,n), \quad c_{x_n}^k \in L_{r_1}(Q_\delta), \tag{15}$$

$$b_i^k(x',0,t), c^k(x',0,t), f(x',0,t), \Phi_t(x',0,t), \Phi_{x_ix_j}(x',0,t) \in C(\overline{Q_0}),\ i,j=1,2,\dots,n, \tag{16}$$

где $k=0,1$ и под производными здесь и далее подразумеваются обобщенные производные в смысле Соболева.

Предположим, что существует постоянная $\beta_0>0$ такая, что

$$|L_1u_0(x',0)| \geq \beta_0 > 0 \quad \forall x' \in \overline{\Omega}. \tag{17}$$

Положим $q_0(x',0) = (h_{0t}(x',0) - L_0u_0 - f(x,0))/L_1u_0|_{x_n=0}$. Далее предполагаем, что оператор $L_0 + q_0(x',0)L_1$ эллиптичен на $[0,T]$, т. е. существует постоянная $\delta_1>0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}^0 + q_0(x',0)a_{ij}^1\right)\xi_i\xi_j \geq \delta_1|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ (x,t)\in Q. \tag{18}$$

Легко заметить в силу условий (16), (17) на данные и теорем вложения, что $q_0(x',0)\in C(\overline{\Omega})$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $p>n+2$ и выполнены условия (7)–(18). Тогда найдется $\gamma>0$ такое, что на интервале $(0,\gamma)$ существует единственное решение (u,q) задач (1)–(5) и (1)–(4), (6) такое, что $u\in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$, $u_{x_n}\in W_p^{2,1}\left(Q_{\delta_0}^\gamma\right)$ для всех $\delta_0<\delta$, $q\in C\left(\overline{Q_0^\gamma}\right)$.*

§ 2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ таких, что $u(x,0) = 0$, выполняется неравенство*

$$\|u\|_{L_p(0,\gamma,W_p^1(G))} \leq c\gamma^{1/2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}.$$

Доказательство. Отметим, что имеет место интерполяционное неравенство (см. [19, п. 4.3.1, теоремы 1, 2])

$$\|u\|_{W_p^s(G)} \leq c\|u\|_{W_p^2(G)}^{s/2}\|u\|_{L_p(G)}^{1-s/2} \quad (s \in (0,2)).$$

Тогда

$$\left(\int_0^\gamma \|u\|_{W_p^1(G)}^p\,dt\right)^{1/p} \leq c\left(\int_0^\gamma \|u\|_{W_p^2(G)}^{p/2}\|u\|_{L_p(G)}^{p/2}\,dt\right)^{1/p}$$
$$\leq c\left(\int_0^\gamma \|u\|_{W_p^2(G)}^p\,dt\right)^{1/2p}\left(\int_0^\gamma \|u\|_{L_p(G)}^p\,dt\right)^{1/2p}. \tag{19}$$

По формуле Ньютона — Лейбница имеем $u(x,t) = \int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)\,d\tau$. Отсюда

$$\|u\|_{L_p(G)} \leq \left(\int_0^\gamma \|u_\tau\|_{L_p(G)}^p\,d\tau\right)^{1/p}\gamma^{\frac{p-1}{p}}.$$

Используя это неравенство в (19), получим требуемое. □

Лемма 2. *Если $b \in L_q(Q^\gamma)$ с $q \in \left(\max\left(p, \frac{n+2}{2}\right), \infty\right]$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ с $u(x,0) = 0$ выполнено*

$$\|ub\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c\gamma^{\alpha_1}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \alpha_1 = 1 - (n+2)/(2q). \tag{20}$$

Если $a \in L_q(Q^\gamma)$ с $q \in (\max(p, n+2), \infty]$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что для всех $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ с $u(x,0) = 0$ выполнено

$$\|\nabla u a\|_{L_q(Q^\gamma)} \leq c\gamma^{\alpha_2}\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}, \quad \alpha_2 = 1/2 - (n+2)/(2q). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть вначале $q < \infty$. Если область G удовлетворяет условиям теоремы, то существует ограниченный оператор продолжения функций, заданных в Ω, на все $\mathbb{R}^{n-1}$ с сохранением классов Соболева (см. [19, п. 4.2.2]). В частности, для этого оператора имеем

$$P \in L\bigl(W_p^{2,1}(Q^\gamma), W_p^{2,1}\bigl(R_d^n \times (0,T)\bigr)\bigr) \cap L\bigl(L_q(Q^\gamma), L_q\bigl(R_d^n \times (0,T)\bigr)\bigr).$$

где $R_d^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \in (0,d)\}$. Применяя тот же метод продолжения, построим продолжение с сохранением класса на $\mathbb{R}_+^n = \{x : x_n > 0\}$. Поэтому достаточно доказать утверждение для случая $G = \mathbb{R}_+^n$. Используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\|ub\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq \|b\|_{L_q(Q^\gamma)}\|u\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^\gamma)} \quad (q > p).$$

Сделав замену $x = y\sqrt{\gamma}$, $t = \tau\gamma$ в последнем интеграле, получим

$$\|u(x,t)\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^\gamma)} = \gamma^{(\frac{n}{2}+1)\frac{(q-p)}{pq}}\|\tilde u(y,\tau)\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^1)}, \quad \tilde u(y,\tau) = u(y\sqrt{\gamma},\tau\gamma).$$

Поскольку $\tilde u = \int\limits_0^t \tilde u_\tau(y,\tau)d\tau$, имеем $\|\tilde u\|_{L_p(Q^1)} \le c\|\tilde u_\tau\|_{L_p(Q^1)}$. Следовательно, в $W_p^{2,1}(Q^1)$ можно использовать эквивалентную норму

$$\|\tilde u\|_0^p = \int\limits_{Q^1} |\tilde u_\tau|^p + \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \tilde u|^p\, dydt.$$

В силу теорем вложения (см., например, [21]) имеем оценку

$$\|\tilde u\|_{L_{\frac{pq}{q-p}}(Q^1)} \le c\|\tilde u\|_0, \tag{22}$$

где постоянная c от $\tilde u$ не зависит. После замены $y = x/\sqrt{\gamma}$, $\tau = t/\gamma$ неравенство (22) преобразуется к (20). Оценка (21) получается аналогично. Рассуждения в случае $q = \infty$ только упрощаются, и мы их опустим.

Пусть

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

— эллиптический оператор.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (13), (14) *на коэффициенты оператора L. Тогда для любой $f \in L_p(Q^\gamma)$ ($\gamma \in (0,T]$, $p > 1$) существует единственное решение $u \in W_p^{2,1}(Q^\gamma)$ задач* (1)–(3), (5) *и* (1)–(3), (6) *с однородными краевыми и начальными условиями и справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)},$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0,T]$. Если дополнительно выполнено условие (15) *для некоторого $\delta > 0$ и $f_{x_n} \in L_p(Q_\delta)$, то полученное решение обладает свойством $u_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_{\delta_0})$ для всех $\delta_0 < \delta$ и справедлива оценка*

$$\|u_{x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma_{\delta_0})} \le c(\|f_{x_n}\|_{L_p(Q^\gamma_\delta)} + \|f\|_{L_p(Q^\gamma)}),$$

где постоянная c не зависит от γ, но, вообще говоря, зависит от параметра $\delta_0 < \delta$.

Доказательство. Возьмем вначале $\gamma = T$. Для доказательства будем использовать четные или нечетные продолжения решения относительно плоскостей $x_n = 0$, $x_n = d$ и сильно упрощенную схему из [24]. Пусть

$$G^1 = \Omega \times (-d/3, d/3), \quad G^2 = \Omega \times (d/4, 3d/4), \quad G^3 = \Omega \times (2d/3, 4d/3).$$

Построим разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^3$, $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, на $\overline{G}$ такое, что

$$\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-d/3, d/3), \quad \operatorname{supp}\varphi_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (d/4, 3d/4),$$

$$\operatorname{supp}\varphi_3 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (2d/3, 4d/3),$$

$$\varphi_1(x', -x_n) = \varphi_1(x', x_n), \quad \varphi_3(x', 2d - x_n) = \varphi_3(x', x_n).$$

Построим области G_0^i с границей класса C^2 такие, что область G_0^1 симметрична относительно плоскости $x_n = 0$, область G_0^3 симметрична относительно плоскости $x_n = d$ и $\operatorname{supp}\varphi_i \cap G^i \subset G_0^i \subset G^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Рассмотрим, например, задачу (1)–(3), (5). Задача (1)–(3), (6) рассматривается аналогично. Продолжим коэффициенты оператора из области $G^1 \cap G$ в область $G^1 \setminus G$ следующим образом: a_{nn}, a_{ij} при $i, j \le n-1$, b_i при $i < n$ и c — четным образом по переменной x_n (т. е. новый коэффициент a_{ij} в $G^1 \setminus G$ определяется как $a_{ij}(x', -x_n, t)$), a_{in}, b_n при $i = 1, 2, \ldots, n-1$ — нечетным образом по переменной x_n. В силу (13) получаем, что продолжения коэффициентов a_{ij} $(i, j \le n)$ непрерывны в области G_0^1. Аналогично продолжим коэффициенты уравнения из области $G^3 \cap G$ в область $G^3 \setminus G$: коэффициенты a_{ij} $(i, j < n)$, a_{nn}, b_i $(i < n)$, c — четным образом относительно плоскости $x_n = d$ (таким образом, новые коэффициенты имеют вид $a_{ij}(x', 2d - x_n, t)$, $x_n \in \left(d, \frac{4d}{3}\right)$) и коэффициенты b_n, a_{in} $(i \le n-1)$ — нечетным образом относительно плоскости $x_n = d$. Имеем задачу

$$L_0 u \equiv u_t - Lu = f, \tag{23}$$

$$u_{x_n}|_{S_0 \cup S_2} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u|_{S_1} = 0. \tag{24}$$

Пусть $g \in L_p(Q)$. Продолжим g четным образом при $x_n < 0$ и четным образом относительно плоскости $x_n = d$, т. е. продолжение $\tilde{g}$ задается при $x_n < 0$ как $\tilde{g}(x', x_n, t) = g(x', -x_n, t)$ и при $x_n > d$ — как $\tilde{g}(x', x_n, t) = g(x', 2d - x_n, t)$. Продолжение обозначаем тем же символом $g(x, t)$. Пусть $\psi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_i(x) \equiv 1$, на $\operatorname{supp}\varphi_i$ и $\operatorname{supp}\psi_i \cap G^i \subset G_0^i$. Ищем решение задачи (23), (24) в виде

$$u = \sum_{i=1}^{3} \psi_i(x) u_i(x, t),$$

где $u_i(x, t)$ — решение задачи

$$L_0 u_i(x, t) = \varphi_i g(x, t), \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad u_i|_{\partial G_0^i \times (0,T)} = 0, \tag{25}$$

продолженное нулем вне G_0^i. Поскольку каждая из областей G_0^i имеет границу класса C^2, справедливы стандартные результаты о разрешимости (см., например, [21]) и для любой $g \in L_p(Q)$ существует единственное решение $u_i(x, t) = R_i(g) \in W_p^{2,1}(Q^i)$ $(Q^i = G_0^i \times (0, T))$. Так как коэффициенты уравнения и правая часть в областях G_0^1, G_0^3 обладают нужными свойствами четности, в силу теоремы единственности

$$u_1(x', x_n, t) = u_1(x', -x_n, t), \quad (x', x_n) \in G_0^1,$$
$$u_3(x', 2d - x_n, t) = u_3(x', x_n, t), \quad (x', x_n) \in G_0^3.$$

Следовательно, $u_{1x_n}|_{x_n=0} = 0$ и $u_{3x_n}|_{x_n=d} = 0$. Для каждой из функции $u_i(x, t)$ приходим к оценке вида

$$\|u_i(x, t)\|_{W_p^{2,1}(Q^i)} \le c\|\varphi_i g\|_{L_p(Q^i)} \le c_1\|g\|_{L_p(Q)}. \tag{26}$$

Функция u удовлетворяет условиям (24). Имеем

$$L_0 u = \sum_{i=1}^{3} \psi_i L_0 u_i + \sum_{i=1}^{3} [L_0, \psi_i] u_i = \sum_{i=1}^{3} \psi_i \varphi_i g + \sum_{i=1}^{3} [L_0, \psi_i] u_i$$
$$= g + \sum_{i=1}^{3} [L_0, \psi_i] u_i = g + R(g), \tag{27}$$

где $[L_0,\psi_i]v = L_0(\psi_i v) - \psi_i L_0 v$, а выражение $R(g)$ — оператор, сопоставляющий функции g выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{3}[L_0,\psi_i]u_i$. В силу оценки (26) этот оператор непрерывен. Легко получить оценку

$$\|R(g)\|_{L_p(Q)} \le c_1\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{W_p^{1,0}(Q)} + c_1\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{L_r(Q)}, \quad r = \frac{r_0 p}{r_0 - p}.$$

Чтобы оценить $\|u_i\|_{L_r(Q)}$, используем вложение $W_p^s(Q) \subset L_r(Q)$ ($r \le \frac{(n+1)p}{(n+1)-sp}$). Поскольку $r_0 > \max(p, n+2)$, можем выбрать $s < 1$ такое, что $\frac{r_0 p}{r_0 - p} \le \frac{(n+1)p}{(n+1)-sp}$. Таким образом,

$$\|R(g)\|_{L_p(Q)} \le c_1\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{W_p^{1,0}(Q)} + c_2\sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{W_p^{s}(Q)}, \tag{28}$$

где $s < 1$. В силу компактности вложений $W_p^{2,1}(Q) \subset W_p^{1,0}(Q) \cap W_p^s(Q)$ (см. [20]) оператор $R : L_p(Q) \to L_p(Q)$ вполне непрерывен. Надо доказать разрешимость уравнения

$$g + R(g) = f. \tag{29}$$

Если g — решение (29), то функция $\sum\limits_{i=1}^{3} u_i\psi_i$ — решение задачи (23), (24). Покажем единственность решений уравнения (29) и сошлемся на альтернативу Фредгольма. Действительно, пусть g — решение (29) с $f = 0$. Тогда соответствующая функция $u = \sum\limits_{i=1}^{3} u_i\psi_i$ — решение задачи (23), (24) с $f = 0$. Умножив уравнение (23) на функцию φ_i, получим, что функция $u\varphi_i = u_i$ — решение задачи (23), (24), где в правой части стоит выражение $[-L,\varphi_i]u$. Таким образом, $u_i = L_0^{-1}([-L,\varphi_i]u)$. Имеем

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \le \sum_{i=1}^{3}\|u_i\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)} \le \sum_{i=1}^{3}\left\|L_0^{-1}([L_0,\varphi_i]u)\right\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)}, \quad Q_i^\gamma = G_0^i \times (0,\gamma).$$

Как и при выводе оценки (28), получим ($s < 1$)

$$\left\|L_0^{-1}[L,\varphi_i]u\right\|_{W_p^{2,1}(Q_i^\gamma)} \le \ c_0\|[L,\varphi_i]u\|_{L_p(Q^\gamma)} \le c_1\|u\|_{W_p^{1,0}(Q^\gamma)} + c_2\|u\|_{W_p^s(Q^\gamma)}.$$

Используя лемму 1 и интерполяционное неравенство из этой леммы, правую часть последнего неравенства можем оценить так:

$$c_3\|u\|^{\frac12}_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}\|u\|^{\frac12}_{L_p(Q^\gamma)} + c_4\|u\|^{s/2}_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)}\|u\|^{1-s/2}_{L_p(Q^\gamma)} \le \gamma^{\beta_1}c\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)},$$

где $\beta_1 > 0$ — минимальная из двух постоянных, возникающих при применении леммы 1 в левой части последнего неравенства. Таким образом, если $\gamma^{\beta_1}c < 1$, то $u \equiv 0$ в $L_p(Q^\gamma)$. Продолжая рассуждения в $G \times (\gamma, 2\gamma)$, получим $u \equiv 0$ также и в этой области, и т. д.

Покажем утверждение леммы об оценке. Из вышеприведенных рассуждений вытекает существование постоянной $c > 0$ такой, что любое решение задачи (23), (24) удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le c\|f\|_{L_p(Q)}.$$

Без ограничения общности считаем, что аналогичная оценка имеет место в любой области Q^γ, и имеем

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

Иначе рассмотрим функцию $f_\gamma = \begin{cases} f, & t \in [0,\gamma], \\ 0, & t \in (\gamma, T], \end{cases}$ из $L_p(Q)$ и найдем решение u_γ задачи (23), (24) с правой частью f_γ. Тогда $\|u_\gamma\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\|f_\gamma\|_{L_p(Q^\gamma)} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}$. Но в цилиндре Q^γ в силу теоремы единственности имеем $u_\gamma = u$.

Таким образом,

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} = \|u_\gamma\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \le c\|f\|_{L_p(Q^\gamma)}. \tag{30}$$

Запишем уравнение (23) в виде

$$u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j} = f + \left(Lu - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_ix_j}\right) = g_0. \tag{31}$$

Имеем $g_0 \in L_p(Q)$, и существует $g_{0x_n} \in L_p(Q)$. Фиксируем $\delta_0 < \delta$. Продолжая решение и правую часть четным образом в область $\widetilde{Q}_{\delta_0} = \Omega \times (-\delta_0, \delta_0) \times (0,T)$, коэффициенты a_{ij} $(i,j < n)$, a_{nn} — четным образом и a_{in} $(i = 1,2,\dots,n-1)$ — нечетным образом, получим, что продолжение является четным решением из $W_p^{2,1}(\widetilde{Q}_{\delta_0})$ уравнения (31), удовлетворяющим на $\Gamma_{\delta_0} = \partial\Omega \times (-\delta_0,\delta_0) \times (0,T)$ однородным условиям Дирихле.

Пусть снова $\gamma = T$ и $\Delta_h u = (u(x+he_n) - u(x))/h$ $(e_n = (0,0,\dots,0,1))$ — конечная разность по переменной x_n. Возьмем четную по переменной x_n функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\delta_0,\delta_0))$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-\delta_1,\delta_1)$ $(\delta_1 < \frac{\delta}{2})$, $\varphi \equiv 1$ при $x \in \Omega \times (-\delta_2,\delta_2)$ $(\delta_2 < \delta_1)$. Пусть $h < \frac{\delta_0}{2} - \delta_1$. Применяя оператор Δ_h к (31), получим

$$(\Delta_h u)_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\Delta_h u_{x_ix_j} = \Delta_h g_0 + \sum_{i,j=1}^n (\Delta_h a_{ij})u_{x_ix_j}(x+e_nh)$$

$$\left(\Delta_h(uv) = \frac{u(x+e_nh)v(x+e_nh) - u(x)v(x)}{h} = \Delta_h uv(x+e_nh) + u(x)\Delta_h v\right).$$

Таким образом, для $v_h = \Delta_h u\varphi$ приходим к уравнению

$$v_{ht} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{hx_ix_j} = g_h, \tag{32}$$

$$g_h = \varphi\Delta_h g_0 + \varphi\sum_{i,j=1}^n (\Delta_h a_{ij})u_{x_ix_j}(x+e_nh) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\varphi\Delta_h u)_{x_ix_j} + \varphi\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta_h u_{x_ix_j}).$$

Поскольку $g_0, g_{0x_n} \in L_p(\widetilde{Q}_{\delta_0})$, семейство $\Delta_h g_0$ равномерно по h ограничено и

$$\|\Delta_h g_0\|_{L_p(\widetilde{Q}_{\delta_1})} \le c\|g_{x_n}\|_{L_p(Q_{\delta_0})}. \tag{33}$$

Так как $\partial\Omega \in C^2$, найдется область $G_1 \subset \Omega \times (-\delta_1, \delta_1)$ с границей класса C^2 такая, что $\varphi(x) \equiv 0$ на $\Omega \times (-\delta_1, \delta_1) \setminus G_1$. Таким образом, функция v_h есть решение первой начально-краевой задачи для уравнения (32) в области $G_1 \times (0, T)$ с однородными краевыми условиями. В силу теоремы 9.1 из [21] справедлива оценка

$$\|v_h\|_{W_p^{2,1}(\widetilde{Q}_{\delta_1})} \leq c\|g_h\|_{L_p(\widetilde{Q}_{\delta_1})}.$$

Из оценки (33) и определения функции g_h легко увидеть, что норма правой части здесь равномерно по h ограничена. Тогда лемма 4.6 в [21] и уже полученная оценка для нормы $\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)}$ влекут существование обобщенной производной $v_{x_n} \in W_p^{2,1}(\widetilde{Q}_{\delta_1})$, причем имеет место оценка

$$\|u_{x_n}\|_{W_p^{2,1}(\widetilde{Q}_{\delta_2})} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|f_{x_n}\|_{L_p(Q_\delta)})$$

или

$$\|u_{x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_2})} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|f_{x_n}\|_{L_p(Q_\delta)}).$$

Используя ту же идею, что и ранее, легко получить оценку вида

$$\|u_{x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma_{\delta_2})} \leq c(\|f\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|f_{x_n}\|_{L_p(Q^\gamma_\delta)})$$

для всех $\gamma \leq T$ с постоянными c, не зависящими от γ. Доказательство леммы в случае задачи (1)–(3), (6) полностью аналогично. Единственное отличие состоит в том, что мы используем нечетное продолжение решения относительно плоскости $x_n = d$ вместо четного, поэтому доказательство опустим.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Имеем уравнение

$$u_t - Lu = f(x,t), \quad Lu = L_0 u + q(x', t) L_1 u. \tag{34}$$

Рассмотрим, например, задачу (1)–(4), (6). Сделаем замену $u = v + \Phi$. Получим задачу

$$v_t - L_0 v - q(x', t)(L_1 v + L_1\Phi) = f(x,t) + L_0\Phi - \Phi_t, \tag{35}$$

$$v|_{S\setminus S_0} = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v_{x_n}|_{S_0} = 0, \quad v|_{S_0} = 0.$$

Полагая $x_n = 0$, получим

$$-a^0_{nn} v_{x_n x_n}(x', 0, t) - q(x', t)\big(a^1_{nn} v_{x_n x_n} + L_1\Phi\big)(x', 0, t) = (f + L_0\Phi - \Phi_t)(x', 0, t). \tag{36}$$

Определим функцию $q_0(x', t)$ как решение уравнения

$$-q_0(x', t) L_1\Phi(x', 0, t) = (f(x,t) + L_0\Phi - \Phi_t)|_{x_n=0}.$$

Поскольку $\Phi \in W_p^{2,1}(Q)$, $\Phi_{x_n} \in W_p^{2,1}(Q_{\delta_2})$ для всех $\delta_2 < \delta$, теоремы вложения (см. [20, 21]) и неравенство $p > n + 2$, а также условия (16) гарантируют, что $L_1\Phi(x', 0, t), L_0\Phi(x', 0, t), \Phi_t(x', 0, t) \in C(\overline{Q_0})$, $L_1\Phi(x', 0, 0) = u_0(x)$, $\Phi_t(x', 0, t) = h_{0t}(x', 0)$. Тогда в силу (17), (18) найдется $t^* > 0$ такое, что $|L_1\Phi(x', 0, t)| \geq 2\beta_0/3$ для всех $(x', t) \in Q_0^{t^*}$, $q_0 \in C(\overline{Q_0^{t^*}})$, $q_0(x', t)|_{t=0} = q_0(x', 0)$, где функция $q_0(x', 0)$ определена в § 1 перед условием (18) и, более того, на Q^{t^*} выполнено неравенство (18), где вместо функции $q_0(x', 0)$ стоит $q_0(x', t)$, а вместо δ_1 — постоянная $2\delta_1/3$. Сделаем в (35), (36) замену $q = q_1 + q_0$, где функция q_0 определена в § 1. Имеем

$$v_t - (L_0 v + q_0 L_1 v) - q_1(L_1 v + L_1\Phi) = f + (L_0\Phi + q_0 L_1\Phi) - \Phi_t = g(x,t), \tag{37}$$

$$v|_{S\setminus S_0}=0,\quad v(x,0)=0,\quad v_{x_n}|_{S_0}=0, \tag{38}$$

$$v|_{S_0}=0. \tag{39}$$

Соответственно

$$-\big(a^0_{nn}+a^1_{nn}q_0\big)v_{x_nx_n}(x',0,t)-q_1\big(a^1_{nn}v_{x_nx_n}+L_1\Phi\big)(x',0,t)=0. \tag{40}$$

Уравнение (40) можно переписать в виде

$$q_1=-\frac{1}{a^1_{nn}(v_{x_nx_n}+L_1\Phi)(x',0,t)}\big(a^0_{nn}+a^1_{nn}q_0\big)v_{x_nx_n}(x',0,t).$$

Правую часть в этом равенстве можно записать в виде $R(q_1)$, считая, что функция v, содержащаяся в правой части, есть решение задачи (37), (38), которое определяется единственным образом по данной функции q_1, входящей в уравнение. Таким образом, имеем уравнение

$$q_1=-\frac{1}{a^1_{nn}(v_{x_nx_n}+L_1\Phi)(x',0,t)}\big(a^0_{nn}+a^1_{nn}q_0\big)v_{x_nx_n}(x',0,t)=R(q_1). \tag{41}$$

Следующая наша цель — доказать локальную (по времени) разрешимость уравнения (41). Пусть v_0 — решение задачи

$$v_{0t}-(L_0v_0+q_0L_1v_0)=g, \tag{42}$$

$$v_0|_{S\setminus S_0}=0,\quad v_0(x,0)=0,\quad v_{0x_n}|_{S_0}=0. \tag{43}$$

Тогда уравнение (41) можно записать в виде

$$q_1=-\frac{\big(a^0_{nn}+a^1_{nn}q_0\big)(v_{0x_nx_n}+v_{1x_nx_n})(x',0,t)}{\big(a^1_{nn}v_{1x_nx_n}+a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi\big)(x',0,t)},$$

где v_1 — решение задачи

$$\begin{gathered} v_{1t}-(L_0+q_0L_1)v_1=q_1(L_1(v_0+\Phi)+L_1v_1),\\ v_{1x_n}|_{S_0}=0,\quad v_1|_{S\setminus S_0}=0,\quad v_1(x,0)=0. \end{gathered} \tag{44}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} q_1=-\frac{\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)v_{0x_nx_n}}{a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi}-\frac{\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)v_{1x_nx_n}}{a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi}\\ +\frac{a^1_{nn}v_{1x_nx_n}\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)(v_{0x_nx_n}+v_{1x_nx_n})}{\big(a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi\big)\big(a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+a^1_{nn}v_{1x_nx_n}+L_1\Phi\big)}\\ =g_0+R_1(v_1)=R(q_1), \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$g_0=-\frac{\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)v_{0x_nx_n}}{a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi},$$

$$\begin{aligned} R_1(v_1)=-\frac{\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)v_{1x_nx_n}}{a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi}\\ +\frac{a^1_{nn}v_{1x_nx_n}\big(a^0_{nn}+q_0a^1_{nn}\big)(v_{0x_nx_n}+v_{1x_nx_n})}{\big(a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+L_1\Phi\big)\big(a^1_{nn}v_{0x_nx_n}+a^1_{nn}v_{1x_nx_n}+L_1\Phi\big)}. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 имеем $v_0 \in W_p^{2,1}(Q^{t^*})$, $v_{0x_n} \in W_p^{2,1}\big(Q_{\delta_2}^{t^*}\big)$ для всех $\delta_2 < \delta$. Ввиду теорем вложения (см. [20, 21]) и неравенства $p > n+2$ имеем $v_{0x_nx_n} \in C^{1-\frac{n+2}{p},\frac{1}{2}-\frac{n+2}{2p}}(\overline{Q_{\delta_2}^{t^*}})$ и определен след $v_{0x_nx_n}(x',0,0) = 0$. Следовательно, найдется $\gamma_0 \in (0,t^*]$ такое, что $\big(L_1\Phi + a_{nn}^1 v_{0x_nx_n}\big)(x',0,t) \geq \frac{\beta_0}{2}$ для всех $(x',t) \in \overline{Q_0^{\gamma_0}}$. Фиксируем γ_0. Рассмотрим оператор $\widetilde{L} = L_0 + q_0L_1 + q_1L_1$. Его главная часть имеет вид $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}^0 + (q_0+q_1)a_{ij}^1\big)$. В силу свойств функции q_0, указанных при построении, существует постоянная постоянная $r^0 > 0$ такая, что при выполнении условия $\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^{\gamma_0}})} \leq r^0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}^0 + (q_0+q_1)a_{ij}^1\big)\zeta_i\zeta_j \geq \frac{\delta_1}{2}|\zeta|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in Q^{\gamma_0}.$$

Таким образом, к задаче (44) применима лемма 3, и, следовательно, при условии $\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^{\gamma_0}})} \leq r^0$ решение задачи (44) существует, единственно и $v_1 \in W_p^{2,1}(Q^{\gamma_0})$, $v_{1x_n} \in W_p^{2,1}\big(Q_{\delta_2}^{\gamma_0}\big)$ $\forall \delta_2 < \delta$. Фиксируем $\delta_3 < \delta_2 < \delta$. Уточним оценки на функцию v_1. Из леммы 3 и уравнения в (44) имеем ($\gamma \leq \gamma_0$)

$$\|v_1\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|L_1(v_0+\Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)} + c_1\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|v_1\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)},$$

$$\|v_{1x_n}\varphi\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_2}^\gamma)} \leq c\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|\partial_{x_n}(L_1(v_0+\Phi))\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)}$$
$$+ c_1\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|v_{1x_n}\varphi\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} + c_2\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|v_1\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)},$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция такая, что $\operatorname{supp}\varphi \cap G \subset G_{\delta_2}$. Таким образом, если $c_1\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq \frac{1}{2}$, то справедливы оценки

$$\|v_1\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq 2c\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\|L_1(v_0+\Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)}, \tag{46}$$

$$\|v_{1x_n}\varphi\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c_3\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\left(\|L_1(v_0+\Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_n}L_1(v_0+\Phi)\right\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)}\right). \tag{47}$$

Пусть $\varphi \equiv 1$ при $x_n \leq \delta_3 < \delta_2$, $\varphi \equiv 0$ при $x_n > \delta_2$. Тогда (47) можно переписать в виде

$$\|v_{1x_n}\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_3}^\gamma)} \leq c_3\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}\left(\|L_1(v_0+\Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_n}L_1(v_0+\Phi)\right\|_{L_p(Q_\delta^\gamma)}\right). \tag{48}$$

Постоянные c, c_3 в (46), (48) не зависят от γ и q. Таким образом, при выполнении условия $\|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq \min(1/(2c_1), r^0)$ задача (44) имеет единственное решение из нужного класса, и справедливы оценки (46), (48). Имеем $R_\gamma \equiv 2\|g_0\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \to 0$ при $\gamma \to 0$, поскольку $g_0(x',0) = 0$. Следовательно, найдется постоянная $\gamma_1 \leq \gamma_0$ такая, что

$$R_\gamma \leq \min(1/(2c), r^0) \quad \forall \gamma \leq \gamma_1. \tag{49}$$

Фиксируем γ_1. Решение уравнения (45) ищем в шаре $B_{R_\gamma} = \{q_1 : \|q_1\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq R_\gamma\}$, где $\gamma \leq \gamma_1$. Покажем, что найдется $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такое, что решение q_1 уравнения (45) из шара B_{R_γ} существует для всех $\gamma \leq \gamma_2$. Оператор $R : C(\overline{Q_0^\gamma}) \to$

$C(\overline{Q_0^\gamma})$, стоящий в правой части (45), удовлетворяет как условиям теоремы Шаудера, так и условиям теоремы о неподвижной точке при подходящем выборе параметра γ. Проверим, например, выполнение условия теоремы о неподвижной точке. Покажем, что найдется $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такая, что оператор R переводит шар $B_{R_{\gamma_2}}$ в себя и удовлетворяет неравенству

$$\|R(q_1) - R(q_2)\|_{C(\overline{Q_0^{\gamma_2}})} \leq \alpha \|q_1 - q_2\|_{C(\overline{Q_0^{\gamma_2}})},$$

где $\alpha = \text{const} < 1$. Функции $v^1 = v_1(q^1)$, $v^2 = v_1(q^2)$ удовлетворяют уравнениям ($q^i \in B_{R_\gamma}, \gamma \leq \gamma_1$)

$$v_t^i - (L_0 + q_0 L_1) v^i = q^i (L_1(v_0 + \Phi) + L_1 v^i).$$

Вычитая уравнения, получим, что функция $v^0 = v_1(q^1) - v_1(q^2)$ есть решение уравнения

$$v_t^0 - (L_0 + q_0 L_1) v^0 = (q^1 - q^2)(L_1(v_0 + \Phi) + L_1 v^1) + q^2 L_1 v^0.$$

Отметим, что оценки (46), (48) для функций v^1, v^2 справедливы, поскольку $q^1, q^2 \in B_{R_\gamma}$ с $\gamma \leq \gamma_1$. Как и при выводе оценок (46), (48), получим

$$\|v^0\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq 2c\|q^1 - q^2\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} (\|L_1(v_0 + \Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)} + \|L_1 v^1\|_{L_p(Q^\gamma)}). \tag{50}$$

В силу (46) имеем

$$\|L_1 v^1\|_{L_p(Q^\gamma)} \leq c_3 \|v^1\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq 2cc_3 R(\gamma_1) \|L_1(v_0 + \Phi)\|_{L_p(Q^\gamma)}.$$

Тогда оценку (50) можно переписать в виде

$$\|v^0\|_{W_p^{2,1}(Q^\gamma)} \leq c_4 \|q^1 - q^2\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}, \tag{51}$$

где $c_4 = 2c(1 + 2cc_3 R(\gamma_1)) \|L_1(v_0 + \Phi)\|_{L_p(Q^{\gamma_1})}$. Аналогично приходим к оценке

$$\|v_{x_n}^0 \varphi\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_3}^\gamma)} \leq c_5 \|q^1 - q^2\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}, \tag{52}$$

где величина c_5 не зависит от $\gamma \leq \gamma_1$, но зависит от норм функций v_0, Φ. Оценим норму $\|R(q^1) - R(q^2)\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})}$. Из оценок (46), (48) и леммы 2 с $q = \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|v_{x_n x_n}^i(x', 0, t)\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} &\leq c_6 \|v_{x_n}^i\|_{L_p(0,\gamma; W_p^{1+s_0}(G_{\delta_3}))} \\ &\leq c_7 \|v_{x_n}^i\|_{L_p(0,\gamma; W_p^2(G_{\delta_3}))}^\theta \|v_{x_n}^i\|_{L_p(Q_{\delta_3}^\gamma)}^{1-\theta} \\ &\leq c_8 \|v_{x_n}^i\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_3}^\gamma)} \gamma^{\frac{1-\theta}{2}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{53}$$

Следовательно, найдется $\gamma_1' \leq \gamma_1$ такое, что

$$\big(a_{nn}^1 v_{0x_n x_n} + a_{nn}^1 v_{1x_n x_n} + L_1 \Phi\big)(x', 0, t) \geq \beta_0/4 \quad \forall (x', t) \in Q_0^{\gamma_1'}. \tag{54}$$

Тогда знаменатели в определении функций $R_1(v^i)$ не обращаются в нуль. Из определения вытекает представление

$$R(q^1) - R(q^2) = R_1(v^1) - R_1(v^2) = v_{x_n x_n}^0(x', 0, t) J(x, t, v^1, v^2),$$

где функция $J(x, t, v^1, v^2)$ выписывается с использованием теоремы Лагранжа. Как и при выводе неравенства (53), применяя оценки (46), (48) для функций v^i, имеем

$$\|R(q^1) - R(q^2)\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq c(\gamma_1) \|v_{x_n x_n}^0(x', 0, t)\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq c_3 \|v_{x_n}^0\|_{W_p^{2,1}(Q_{\delta_3^\gamma})} \gamma^{\frac{1-\theta}{2}},$$

где $\theta = \frac{1+s_0}{2}$ с некоторым $s_0 \in \left(\frac{1}{p}, 1\right)$. С помощью оценок (51), (52) получим

$$\|R(q^1) - R(q^2)\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})} \leq C\gamma^{\frac{1-\theta}{2}} \|q^1 - q^2\|_{C(\overline{Q_0^\gamma})},$$

где постоянная C зависит от данных задачи и не зависит от γ. Выбрав $\gamma_2 \leq \gamma_1'$ такое, что $C\gamma^{\frac{1-\theta}{2}} = \alpha < 1/2$, получим, что при $\gamma \leq \gamma_2$ выполнены условия теоремы о неподвижной точке, применив которую, заключаем, что решение уравнения (45) из шара $B_{R_{\gamma_2}}$ существует и единственно. Найдем функцию v_1 как решение задачи (44) и соответственно

$$v = v_0 + v_1 \in W_p^{2,1}(Q^{\gamma_2}), \quad v_{x_n} \in W_p^{2,1}\left(Q_{\delta_3}^{\gamma_2}\right) \quad (\delta_3 < \delta_2 < \delta).$$

Из леммы 3 вытекает, что $v_{x_n} \in W_p^{2,1}\left(Q_{\delta_3}^{\gamma_2}\right)$ $\forall \delta_3 < \delta$. Функция v есть решение задачи (37), (38). Покажем, что функция v удовлетворяет условию (39). Полагая в (37) $x_n = 0$, получим

$$v_t(x', 0, t) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(a_{ij}^0 + (q_0 + q_1)a_{ij}^1\right)v_{x_i x_j}(x', 0, t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(b_i^0 + (q_0 + q_1)b_i^1\right)v_{x_i}(x', 0, t)$$
$$+ (c^0 + (q_0 + q_1)c^1)v(x', 0, t) - \left(a_{nn}^0 + (q_0 + q_1)a_{nn}^1\right)v_{x_n x_n}(x', 0, t) = g(x', 0, t).$$

Вычитая из этого равенства равенство (40), будем иметь

$$v_t(x', 0, t) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(a_{ij}^0 + (q_0 + q_1)a_{ij}^1\right)v_{x_i x_j}(x', 0, t)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(b_i^0 + (q_0 + q_1)b_i^1\right)v_{x_i}(x', 0, t) + (c^0 + (q_0 + q_1)c^1)v(x', 0, t) = 0.$$

Поскольку $v|_{S_1} = 0$, имеем $v(x', 0, t)|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$, $v(x', 0, 0) = 0$. По построению оператор $L_0 + (q_0 + q_1)L_1$ эллиптичен. В силу единственности решений параболических задач заключаем, что $v(x', 0, t) \equiv 0$, т. е. выполняется условие (39). $\square$

Замечание. Как видно из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы, разность между любыми двумя решениями из указанного в теореме класса оценивается на некотором малом интервале времени через разность соответствующих этим решениям данных задачи, т. е. имеет место оценка устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belov Yu. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
2. *Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya.* Determining of two unknown coefficients of parabolic type equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9, N 5. P. 469–488.
3. *Pyatkov S. G., Tsybikov B. N.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. Evol. Equat. 2011. V. 11, N 1. P. 155–186.
4. *Pyatkov S. G.* On some classes of inverse problems for parabolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 18, N 8. P. 917–934.
5. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. Lviv: WNTL Publ., 2003. (Math. Stud. Monogr. Ser.; V. 10).
6. *Саяхов Ф. Л., Смирнов Г. П., Фатыхок М. А.* Некоторые задачи теплопроводности и акустическое взаимодействие с электромагнитными диэлектриками // Инж.-физ. журн. 1981. Т. 41, № 5. С. 916–921.

7. *Dinh Nho Hao.* A non-characteristic Cauchy problem for linear parabolic equations and related inverse problems: I. Solvability // Inverse Probl. 1994. V. 10. P. 295–315.

8. *He Guo-qiang, Meng Ze-hong.* A Newton type iterative method for heat-conduction inverse problems // Appl. Math. Mech. 2007. V. 28, N 2. P. 531–539.

9. *Shidrar A.* An inverse heat conduction problem // South. Asian Bull. Math. 2002. V. 26. P. 503–507.

10. *Шишко Н. П.* Обратная задача для параболического уравнения // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 1. С. 55–62.

11. *Гольдман Н. Л.* Теоремы единственности и свойства сопряженных задач для одного класса параболических уравнений с данными Коши // Вычисл. методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 184–194.

12. *Iskenderov A. D., Akhundov A. Ya.* Inverse problem for a linear system of parabolic equations // Dokl. Math. 2009. V. 79, N 1. P. 73–75.

13. *Choulli M., Yamamoto M.* Conditional stability in determining a heat source // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 3. P. 233–243.

14. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2006.

15. *Isakov V.* Inverse source problems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. (Math. Surv. Monogr.; N 34).

16. *Ramm A. G.* Inverse problems. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. Boston: Springer Sci.; Business Media, Inc., 2005.

17. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.

18. *Prilepko A. I. , Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.

19. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

20. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

21. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

22. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Науч. кн., 1998.

23. *Grisvard P.* Equations differentialles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. IV Sér. 1969. V. 2. P. 311–395.

24. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53–161.

Статья поступила 4 апреля 2012 г., окончательный вариант — 27 сентября 2012 г.

Боричевская Альбина Геннадьевна
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Тюменская обл., Ханты-Мансийск 628012
a_borichevskaya@ugrasu.ru

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Тюменская обл., Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
s_pyakov@ugrasu.ru, pyatkov@math.nsc.ru