Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 512.552.16

ВЫСШИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИЕВЫХ ИДЕАЛОВ ТРЕУГОЛЬНЫХ АЛГЕБР

Х. Дун

Аннотация. Пусть $\mathscr{T}$ — треугольная алгебра и $\mathscr{U}$ — допустимый лиев идеал в $\mathscr{T}$. Рассмотрен вопрос о том, будет ли любое йорданово высшее дифференцирование из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$ являться высшим дифференцированием из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$. Даны некоторые характеризации йордановых тройных высших дифференцирований на $\mathscr{U}$.

Ключевые слова: допустимый лиев идеал, треугольная алгебра, высшее дифференцирование, йорданово (тройное) высшее дифференцирование

1. Введение

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — унитальные алгебры над коммутативным кольцом R, $\mathscr{M}$ — унитальный $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-бимодуль, который точен как левый $\mathscr{A}$-модуль и правый $\mathscr{B}$-модуль. R-алгебра

$$\mathrm{Tri}(\mathscr{A},\mathscr{M},\mathscr{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in \mathscr{A},\ m \in \mathscr{M},\ b \in \mathscr{B} \right\}$$

с обычными матричными операциями называется *треугольной алгеброй.* Обычно мы обозначаем треугольную алгебру через $\mathscr{T}$. Этот тип алгебр впервые был введен Чейзом в [1]. Он применил треугольные алгебры для исследования асимптотического поведения полунаследственных колец и построил классический пример левого полунаследственного кольца, которое не является полунаследственным справа. Харада называет треугольные алгебры *обобщенными треугольными матричными кольцами* в [2], где он использует их для изучения структуры наследственных полупервичных колец. Определение треугольной алгебры является до некоторой степени формальным, поэтому они называются *формальными треугольными матричными алгебрами* в случае некоммутативных алгебр [3].

Пусть R — кольцо, возможно, без единицы. Аддитивная подгруппа L в R называется *лиевым идеалом* в R, если $[u,r] = ur - ru \in L$ для любых $u \in L$ и $r \in R$. Последние 30 лет интенсивно изучалась связь между обычными дифференцированиями и лиевыми идеалами первичных колец, в частности в случае, когда эта связь включает действие на лиевых идеалах. В [4] доказано, что если L — лиев идеал первичного кольца R характеристики не 2 такой, что $u^2 \in L$ для любого $u \in L$, а $d : R \to R$ — аддитивное отображение такое, что $d|_L$ является йордановым дифференцированием из L в R, то $d|_L$ — дифференцирование L в R. В [5] этот результат обобщен на высшие дифференцирования с использованием йордановых тройных высших дифференцирований. Высшие дифференцирования, которые могут не быть ни ассоциативными, ни коммутативными, также являются активным объектом изучения в алгебрах [5–10]. В [11] исследованы йордановы высшие дифференцирования треугольных алгебр. Таким образом, естественно рассмотреть действие высших дифференцирований и йордановых (тройных) высших дифференцирований на лиевых идеалах треугольных алгебр.

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 рассмотрен вопрос о том, будет ли любое йорданово высшее дифференцирование лиевых идеалов в треугольных алгебрах являться высшим дифференцированием лиевых идеалов в треугольных алгебрах. В разд. 3 исследовано действие йордановых тройных высших дифференцирований на лиевых идеалах треугольных алгебр.

2. Йордановы высшие дифференцирования лиевых идеалов треугольных алгебр

В данной статье $\mathscr{T}$ всегда означает треугольную алгебру, состоящую из алгебр $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ без 2-кручения и модуля $\mathscr{M}$ без 2-кручения. Аддитивная подгруппа $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$ называется *лиевым идеалом* в $\mathscr{T}$, если $[U,T] = UT - TU \in \mathscr{U}$ для любых $U \in \mathscr{U}$ и $T \in \mathscr{T}$; при этом $\mathscr{U}$ можно записать в виде $\mathscr{U} = \mathrm{Tri}(\mathscr{U}_{\mathscr{A}}, \mathscr{M}', \mathscr{U}_{\mathscr{B}})$. Легко проверить, что если $\mathscr{U}$ является лиевым идеалом в $\mathscr{T}$, то $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ — лиевы идеалы в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно.

Пусть R — кольцо с центром $Z(R)$. Лиев идеал L в R называется *допустимым лиевым идеалом*, если L не содержится в $Z(R)$ и $u^2 \in L$ для любого $u \in L$. Пусть $\mathscr{U}$ — лиев идеал треугольной алгебры $\mathscr{T}$. Если $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ и $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ — допустимые лиевы идеалы в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно, а $U^2 \in \mathscr{U}$ для любого $U \in \mathscr{U}$, то $\mathscr{U}$ называется *допустимым лиевым идеалом* в $\mathscr{T}$. Если $\mathscr{U}$ является лиевым идеалом в $\mathscr{T}$, то всегда предполагаем, что либо действие каждого $a \neq 0$ из $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ на любой $m \in \mathscr{M}$ нетривиально, либо действие каждого $b \neq 0$ из $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ на любой $m \in \mathscr{M}$ нетривиально.

Определение 2.1. Пусть $\mathscr{U}$ — лиев идеал в $\mathscr{T}$, $\mathbb{N}$ — множество всех неотрицательных целых чисел и $D = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — семейство аддитивных отображений на $\mathscr{T}$, $d_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{T}}$. Тогда D называется:

(1) *высшим дифференцированием* (HD для краткости) из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$, если $d_n(UV) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(U)d_j(V)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $U, V \in \mathscr{U}$;

(2) *йордановым высшим дифференцированием* (JHD для краткости) из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$, если $d_n(U^2) = \sum\limits_{i+j=n} d_i(U)d_j(U)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $U \in \mathscr{U}$;

(3) *йордановым тройным высшим дифференцированием* (JTHD для краткости) из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$, если $d_n(UVU) = \sum\limits_{i+j+k=n} d_i(U)d_j(V)d_k(U)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $U, V \in \mathscr{U}$.

Предположим, что $\mathscr{U}$ — лиев идеал, удовлетворяющий условию $U^2 \in \mathscr{U}$ для любого $U \in \mathscr{U}$. Для $U, V \in \mathscr{U}$ имеем $(UV + VU) = (U+V)^2 - (U^2 + V^2)$, а потому $UV + VU \in \mathscr{U}$. Также $[U,V] = UV - VU \in \mathscr{U}$, и отсюда следует, что $2UV \in \mathscr{U}$. Стало быть, $4UVW = 2(2UV)W \in \mathscr{U}$ для любых $U, V, W \in \mathscr{U}$. Это замечание будет использоваться во всей статье.

Лемма 2.2 [12, лемма 4]. *Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 и L — лиев идеал в R такой, что $L \not\subset Z(R)$. Если $a, b \in R$ и $aLb = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.*

Лемма 2.3 [5, лемма 2.2]. *Пусть R — полупервичное кольцо без 2-кручения (соответственно первичное кольцо), а L — допустимый идеал в R. Если $a, b \in R$*

(*соответственно* $a \in L$ *и* $b \in R$) *таковы, что* $axb + bxa = 0$ *для любого* $x \in R$ ($x \in L$), *то* $axb = bxa = 0$ *для любого* $x \in R$ ($a = 0$ *или* $b = 0$).

Лемма 2.4 [5, лемма 2.3]. *Предположим, что* R — *полупервичное кольцо без 2-кручения (соответственно первичное кольцо), а* L — *допустимый лиев идеал в* R. *Пусть* $G_1, G_2, \dots, G_n$ — *аддитивные группы,* $S : G_1 \times \dots \times G_n \to R$ *и* $T : G_1 \times \dots \times G_n \to R$ — *отображения, аддитивные по каждому аргументу. Если* $S(a_1, \dots, a_n)xT(a_1, \dots, a_n) = 0$ *для любых* $x \in R$ (*соответственно* $x \in L$), $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, *то* $S(a_1, \dots, a_n)xT(b_1, \dots, b_n) = 0$ *для любых* $x \in R$, $a_i, b_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (*соответственно либо* $S(a_1, \dots, a_n) = 0$ *для любых* $a_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, *либо* $T(b_1, \dots, b_n) = 0$ *для любых* $b_i \in G_i$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Лемма 2.5 [13, лемма 7]. *Пусть* L_1, L_2 — *лиевы идеалы в* R *такие, что* $[L_1, L_2] \subset Z(R)$. *Тогда либо* $L_1 \subset Z(R)$, *либо* $L_2 \subset Z(R)$.

Пусть $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — JHD из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$. Положим

$$\Phi_n(U, V) = d_n(UV) - \sum_{i+j=n} d_i(U)d_j(V)$$

для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и любых $U, V \in \mathscr{U}$. Непосредственно замечается, что если $\Phi_n(U, V) = 0$, то $D = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — высшее дифференцирование на $\mathscr{T}$. Также можно увидеть, что функция $\Phi_n(U, V)$ аддитивна по обоим аргументам.

Пусть $\mathscr{T}$ — треугольная алгебра, а $\mathscr{U}$ — лиев идеал в $\mathscr{T}$ такой, что $\mathscr{U}^2 \in \mathscr{T}$.

Лемма 2.6. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Предположим, что* $U, V \in \mathscr{U}$. *Если* $\Phi_k(U, V) = 0$ *для каждого* $k < n$, *то* $\Phi_n(U, V)W[U, V] + [U, V]W\Phi_n(U, V) = 0$ *для всех* $W \in \mathscr{U}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.3 из [8]. □

Теорема 2.7. *Пусть* $\mathscr{T}$ — *треугольная алгебра, состоящая из* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *и* $\mathscr{M}$. *Предположим, что* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ — *первичные алгебры, а* $\mathscr{U}$ — *допустимый лиев идеал из* $\mathscr{T}$. *Тогда любое* JHD *из* $\mathscr{U}$ *в* $\mathscr{T}$ *является* HD *из* $\mathscr{U}$ *в* $\mathscr{T}$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. Известно, что $\Phi_0(U, V) = 0$ для $n = 0$. Следовательно, можно предполагать, что $\Phi_k(U, V) = 0$ для всех $k < n$.

Используя лемму 2.6, имеем

$$\Phi_n(U, V)W[U, V] + [U, V]W\Phi_n(U, V) = 0 \tag{2.1}$$

для всех $U, V, W \in \mathscr{U}$. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} a_3 & m_3 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

соответственно и $U, V, W \in \mathscr{U}$. Тогда

$$[U, V] = \begin{pmatrix} [a_1, a_2] & m_0 \\ 0 & [b_1, b_2] \end{pmatrix}$$

для некоторого $m_0 \in \mathscr{M}'$. Предположим, что

$$\Phi_n(U, V) = \begin{pmatrix} \Phi_{na}(U, V) & \Phi_{nm}(U, V) \\ 0 & \Phi_{nb}(U, V) \end{pmatrix},$$

где $\Phi_{na}(U,V) \in \mathscr{A}$, $\Phi_{nm}(U,V) \in \mathscr{M}$, $\Phi_{nb}(U,V) \in \mathscr{B}$. Тогда (2.1) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} \Phi_{na}(U,V) & \Phi_{nm}(U,V) \\ 0 & \Phi_{nb}(U,V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & m_3 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [a_1,a_2] & m_0 \\ 0 & [b_1,b_2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [a_1,a_2] & m_0 \\ 0 & [b_1,b_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & m_3 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{na}(U,V) & \Phi_{nm}(U,V) \\ 0 & \Phi_{nb}(U,V) \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \Phi_{na}(U,V)a_3[a_1,a_2] & \Phi_{na}(U,V)a_3m_0+(\Phi_{na}(U,V)m_3+\Phi_{nm}(U,V)b_3)[b_1,b_2] \\ 0 & \Phi_{nb}(U,V)b_3[b_1,b_2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [a_1,a_2]a_3\Phi_{na}(U,V) & [a_1,a_2]a_3\Phi_{nm}(U,V)+([a_1,a_2]m_3+m_0b_3)\Phi_{nb}(U,V) \\ 0 & [b_1,b_2]b_3\Phi_{nb}(U,V) \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\Phi_{na}(U,V)a_3[a_1,a_2] + [a_1,a_2]a_3\Phi_{na}(U,V) = 0; \tag{2.2}$$

$$\Phi_{nb}(U,V)b_3[b_1,b_2] + [b_1,b_2]b_3\Phi_{nb}(U,V) = 0; \tag{2.3}$$

$$\Phi_{na}(U,V)a_3m_0 + \Phi_{na}(U,V)m_3[b_1,b_2] + \Phi_{nm}(U,V)b_3[b_1,b_2] + [a_1,a_2]a_3\Phi_{nm}(U,V) + [a_1,a_2]m_3\Phi_{nb}(U,V) + m_0b_3\Phi_{nb}(U,V) = 0 \tag{2.4}$$

для всех $U,V,W \in \mathscr{U}$ и $m_0 \in \mathscr{M}'$. Используя (2.2) и лемму 2.3, получаем, что для каждой фиксированной пары $U,V \in \mathscr{U}$ выполняется $\Phi_{na}(U,V)\mathscr{U}_{\mathscr{A}}[a_1,a_2] = 0$. Таким образом, либо $\Phi_{na}(U,V) = 0$ для всех $U,V \in \mathscr{U}$, либо $[a_1',a_2'] = 0$ для всех $a_1',a_2' \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ по лемме 2.4. Таким образом, $\Phi_{na}(U,V) = 0$ для всех $U,V \in \mathscr{U}$ по лемме 2.5. Аналогично $\Phi_{nb}(U,V) = 0$ для всех $U,V \in \mathscr{U}$. Теперь (2.4) превращается в

$$\Phi_{nm}(U,V)b_3[b_1,b_2] + [a_1,a_2]a_3\Phi_{nm}(U,V) = 0 \tag{2.5}$$

для всех $U,V,W \in \mathscr{U}$. По предположению из второго абзаца данного раздела действие каждого $b \neq 0$ из $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ на любой $m \in \mathscr{M}$ нетривиально. Пусть $a_3 = 0$ в (2.5). Тогда

$$\Phi_{nm}(U,V)b_3[b_1,b_2] = 0,$$

что может быть записано в виде

$$\Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1,b_2,m_1,m_2)b_3[b_1,b_2] = 0 \tag{2.6}$$

для всех $U,V,W \in \mathscr{U}$. По лемме 2.5 существуют $b_1',b_2' \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ такие, что $[b_1',b_2'] \neq 0$. Из (2.6) следует, что

$$\Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1',b_2',m_1,m_2) = 0 \tag{2.7}$$

для всех $a_1,a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ и $m_1,m_2 \in \mathscr{M}'$. Заменяя b_1 на $b_1 + b_1'$ в (2.6), получаем

$$\Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1',b_2,m_1,m_2)b_3[b_1,b_2] + \Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1,b_2,m_1,m_2)b_3[b_1',b_2] = 0 \tag{2.8}$$

для всех $a_1,a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_2,b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2 \in \mathscr{M}'$. Заменим в равенстве (2.8) b_2 на $b_2 + b_2'$. Тогда

$$\Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1,b_2,m_1,m_2)b_3[b_1',b_2'] + \Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1,b_2',m_1,m_2)b_3[b_1',b_2] + \Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1,b_2',m_1,m_2)b_3[b_1',b_2'] + \Phi_{nm}(a_1,a_2,b_1',b_2,m_1,m_2)b_3[b_1,b_2'] = 0 \tag{2.9}$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$. Заменяя b_1 на b_1' в (2.9) и используя (2.7), получаем

$$\Phi_{nm}(a_1, a_2, b_1', b_2, m_1, m_2)b_3[b_1', b_2'] = 0 \tag{2.10}$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_2, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$. Снова заменим b_2 на b_2' в (2.8) и используем (2.7), чтобы получить

$$\Phi_{nm}(a_1, a_2, b_1, b_2', m_1, m_2)b_3[b_1', b_2'] = 0$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$. Следовательно,

$$\Phi_{nm}(a_1, a_2, b_1, b_2', m_1, m_2) = 0 \tag{2.11}$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$. Комбинируя (2.9)–(2.11), имеем

$$\Phi_{nm}(a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2)b_3[b_1', b_2'] = 0$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$. Значит,

$$\Phi_{nm}(a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2) = 0$$

для всех $a_1, a_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2 \in \mathscr{M}'$, т. е. $\Phi_{nm}(U, V) = 0$ для всех $U, V \in \mathscr{U}$. Таким образом,

$$\Phi_n(U, V) = \begin{pmatrix} \Phi_{na}(U, V) & \Phi_{nm}(U, V) \\ 0 & \Phi_{nb}(U, V) \end{pmatrix} = 0$$

для всех $U, V \in \mathscr{U}$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

3. Йордановы тройные высшие дифференцирования лиевых идеалов треугольных алгебр

В данном разделе $\mathscr{T}$ обозначает треугольную алгебру, а $\mathscr{U}$ — лиев идеал в $\mathscr{T}$. Пусть $D = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — JTHD из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$.

Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и для любых $U, V, W \in \mathscr{U}$ положим

$$\Psi_n(U, V, W) = d_n(UVW) - \sum_{i+j+k=n} d_i(U)d_j(V)d_k(W).$$

Непосредственно видно, что функция $\Psi_n(U, V, W)$ аддитивна по всем аргументам и $\Psi_n(U, V, U) = 0$. Для $U, V, W \in \mathscr{U}$ положим $[U, V, W] = UVW - WVU$.

Лемма 3.1. *Для любых $U, V, W \in \mathscr{U}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$d_n(UVW + WVU) = \sum_{i+j+k=n} d_i(U)d_j(V)d_k(W) + \sum_{i+j+k=n} d_i(W)d_j(V)d_k(U).$$

Доказательство получается из соотношения $\Psi_n(U+W, V, U+W) = 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Для любых $U, V, W \in \mathscr{U}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо*
(i) $\Psi_n(U, V, W) = -\Psi_n(W, V, U)$,
(ii) $2\Psi_n(U, V, W) = d_n([U, V, W]) + \sum_{i+j+k=n} [d_i(W), d_j(V), d_k(U)]$.

Доказательство. (i) Легко следует из леммы 3.1.
(ii) Доказательство подобно доказательству леммы 3.2 из [5]. $\square$

Пусть $\mathscr{U}$ — лиев идеал треугольной алгебры $\mathscr{T}$ такой, что $\mathscr{U}^2 \in \mathscr{T}$. Тогда справедлива следующая

Лемма 3.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Если* $\Psi_k(U,V,W) = 0$ *для любых* $k < n$, $U,V,W \in \mathscr{U}$, *то*

$$\Psi_n(U,V,W)X[U,V,W] + [U,V,W]X\Psi_n(U,V,W) = 0$$

для любых $U,V,W,X \in \mathscr{U}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.3 из [5].

Лемма 3.4 [5, лемма 2.4]. *Пусть* R *— первичное кольцо характеристики не* 2 *и* $L \not\subset Z(R)$. *Тогда существуют* $a,b,c \in L$ *такие, что* $[a,b,c] \neq 0$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\mathscr{T}$ *— треугольная алгебра, состоящая из* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *и* $\mathscr{M}$. *Предположим, что* $\mathscr{A}$ *и* $\mathscr{B}$ *— первичные алгебры, а* $\mathscr{U}$ *— допустимый лиев идеал в* $\mathscr{T}$. *Тогда* $\Psi_n(U,V,W) = 0$ *для любых* $U,V,W \in \mathscr{U}$.

Доказательство. Для любых $U,V,W \in \mathscr{U}$ имеем $\Psi_0(U,V,W) = 0$. По индукции предположим, что $\Psi_k(U,V,W) = 0$ для любых $U,V,W \in \mathscr{U}$ и $k < n$. По лемме 3.3 имеем

$$\Psi_n(U,V,W)X4[U,V,W] + 4[U,V,W]X\Psi_n(U,V,W) = 0 \tag{3.1}$$

для всех $U,V,W,X \in \mathscr{U}$. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} a_3 & m_3 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_4 & m_4 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$4[U,V,W] = \begin{pmatrix} 4[a_1,a_2,a_3] & 4m_0 \\ 0 & 4[b_1,b_2,b_3] \end{pmatrix}$$

для некоторого $4m_0 \in \mathscr{U}'$. Предположим, что

$$\Psi_n(U,V,W) = \begin{pmatrix} \Psi_{na}(U,V,W) & \Psi_{nm}(U,V,W) \\ 0 & \Psi_{nb}(U,V,W) \end{pmatrix},$$

где $\Psi_{na}(U,V,W) \in \mathscr{A}$, $\Psi_{nm}(U,V,W) \in \mathscr{M}$, $\Psi_{nb}(U,V,W) \in \mathscr{B}$. Тогда (3.1) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi_{na}(U,V,W) & \Psi_{nm}(U,V,W) \\ 0 & \Psi_{nb}(U,V,W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 & m_4 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4[a_1,a_2,a_3] & 4m_0 \\ 0 & 4[b_1,b_2,b_3] \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 4[a_1,a_2,a_3] & 4m_0 \\ 0 & 4[b_1,b_2,b_3] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 & m_4 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{na}(U,V,W) & \Psi_{nm}(U,V,W) \\ 0 & \Psi_{nb}(U,V,W) \end{pmatrix} = 0.$$

Значит, справедливы следующие равенства:

$$\Psi_{na}(U,V,W)a_4 4[a_1,a_2,a_3] + 4[a_1,a_2,a_3]a_4\Psi_{na}(U,V,W) = 0, \tag{3.2}$$

$$\Psi_{nb}(U,V,W)b_4 4[b_1,b_2,b_3] + 4[b_1,b_2,b_3]b_4\Psi_{nb}(U,V,W) = 0, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\Psi_{na}(U,V,W)a_4 4m_0 + \Psi_{na}(U,V,W)m_4 4[b_1,b_2,b_3] \\ &\quad + \Psi_{nm}(U,V,W)b_4 4[b_1,b_2,b_3] + 4[a_1,a_2,a_3]a_4\Psi_{nm}(U,V,W) \\ &\quad\quad + 4[a_1,a_2,a_3]m_4\Psi_{nb}(U,V,W) + 4m_0 b_4\Psi_{nb}(U,V,W) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

для всех $U,V,W,X \in \mathscr{U}$. Используя (3.2) и лемму 2.3, находим, что для каждых фиксированных $U,V,W \in \mathscr{U}$ выполняется

$$\Psi_{na}(U,V,W)\mathscr{U}_{\mathscr{A}} 4[a_1,a_2,a_3] = 0.$$

Значит, либо $\Psi_{na}(U,V,W)=0$ для всех $U,V,W\in\mathscr{U}$, либо $[a_1',a_2',a_3']=0$ для всех $a_1',a_2',a_3'\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ по лемме 2.4. Применяя лемму 3.4, имеем $\Psi_{na}(U,V,W)=0$ для всех $U,V,W\in\mathscr{U}$. Аналогично $\Psi_{nb}(U,V,W)=0$ для всех $U,V,W\in\mathscr{U}$. Теперь (3.4) превращается в

$$\Psi_{nm}(U,V,W)b_4[b_1,b_2,b_3]+[a_1,a_2,a_3]a_4\Psi_{nm}(U,V,W)=0.$$

Предположим, что действие каждого $b\neq 0$ из $\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ на любой $m\in\mathscr{M}$ нетривиально. Пусть $a_4=0$. Тогда

$$\Psi_{nm}(U,V,W)b_4[b_1,b_2,b_3]=0$$

для всех $U,V,W\in\mathscr{U}$ и $b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$, что может быть записано как

$$\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2,b_3]=0 \tag{3.5}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_2,b_3,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. По лемме 3.4 существуют $b_1',b_2',b_3'\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ такие, что $[b_1',b_2',b_3']\neq 0$, откуда

$$\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2',b_3',m_1,m_2,m_3)=0 \tag{3.6}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Заменяя в (3.5) b_1 на b_1+b_1', получаем

$$\begin{split}\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2,b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2,b_3]\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2,b_3]=0\end{split} \tag{3.7}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_2,b_3,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Заменим в (3.7) b_2 на b_2+b_2'. Тогда

$$\begin{split}\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2',b_3]\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2',b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2,b_3]\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2',b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2,b_3]\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2,b_3,m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2',b_3]=0\end{split} \tag{3.8}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_2,b_3,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Заменяя b_3 на b_3' в (3.8), получим

$$\begin{split}\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2',b_3']\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2',b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2,b_3']\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2',b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2,b_3']\\ +\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2,b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1,b_2',b_3']=0\end{split} \tag{3.9}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_2,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Заменяя b_1 на b_1' в (3.9) и используя (3.6), приходим к равенству

$$2\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1',b_2,b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2',b_3']=0 \tag{3.10}$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_2,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Снова заменим b_2 на b_2' и b_3 на b_3' в (3.7) и используем (3.6), чтобы получить

$$\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2',b_3',m_1,m_2,m_3)b_4[b_1',b_2',b_3']=0$$

для всех $a_1,a_2,a_3\in\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1,b_4\in\mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1,m_2,m_3\in\mathscr{M}'$. Следовательно,

$$\Psi_{nm}(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2',b_3',m_1,m_2,m_3)=0 \tag{3.11}$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Комбинируя (3.9), (3.10) и (3.11), имеем

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3', m_1, m_2, m_3)b_4[b_1', b_2', b_3'] = 0,$$

откуда

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3', m_1, m_2, m_3) = 0$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Аналогично

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2', b_3, m_1, m_2, m_3) = 0 \tag{3.12}$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Также

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1', b_2, b_3, m_1, m_2, m_3) = 0 \tag{3.13}$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_2, b_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Подставляя (3.12) и (3.13) в (3.8), выводим

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3)b_4[b_1', b_2', b_3] = 0 \tag{3.14}$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Заменяя b_3 на $b_3 + b_3'$ в (3.14), приходим к равенству

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3)b_4[b_1', b_2', b_3'] = 0$$

для всех $a_1, a_2, a_3 \in \mathscr{U}_{\mathscr{A}}$, $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathscr{U}_{\mathscr{B}}$ и $m_1, m_2, m_3 \in \mathscr{M}'$. Значит,

$$\Psi_{nm}(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3) = 0$$

для всех $U, V, W \in \mathscr{U}$. Таким образом,

$$\Psi_n(U, V, W) = \begin{pmatrix} \Psi_{na}(U, V, W) & \Psi_{nm}(U, V, W) \\ 0 & \Psi_{nb}(U, V, W) \end{pmatrix} = 0$$

для всех $U, V, W \in \mathscr{U}$. $\square$

Докажем основной результат данного раздела.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathscr{T}$ — треугольная алгебра, состоящая из $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{M}$. Предположим, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — первичные алгебры, а $\mathscr{U}$ — допустимый лиев идеал в $\mathscr{T}$. Тогда любое* JTHD *из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$ является* HD *из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$.*

Доказательство. Так как $d_0 = \mathrm{id}$, можно по индукции предполагать, что $d_k(UV) = \sum\limits_{i+j=k} d_i(U)d_j(V)$ для любых $U, V \in \mathscr{U}$ и $k < n$. Возьмем $U, V, X \in \mathscr{U}$ и положим $W = UVXUV$. Тогда $4W = U(4VXU)V = (2UV)X(2UV)$, где $4VXU, 2UV \in \mathscr{U}$. Используя дважды лемму 3.5, легко получаем

$$d_n(W) = \sum_{\tau=n} d_i(U)d_l(V)d_s(X)d_t(U)d_q(V),$$

где $\tau = i + l + s + t + q$. С другой стороны,

$$d_n(W) = d_n((UV)X(UV)) = \sum_{i+j+l=n} d_i(UV)d_j(X)d_l(UV).$$

Сравнивая эти выражения $d_n(W)$ и используя индуктивное предположение, имеем

$$\Big(d_n(UV) - \sum_{i+j=n} d_i(U)d_j(V)\Big)XUV + UVX\Big(d_n(UV) - \sum_{i+j=n} d_i(U)d_j(V)\Big) = 0 \tag{3.15}$$

для любых $U, V, X \in \mathscr{U}$. Для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и любых $U, V \in \mathscr{U}$ определим $\Upsilon_n(U,V) = d_n(UV) - \sum\limits_{i+j=n} d_i(U)d_j(V)$ и предположим, что

$$\Upsilon_n(U,V) = \begin{pmatrix} \Upsilon_{na}(U,V) & \Upsilon_{nm}(U,V) \\ 0 & \Upsilon_{nb}(U,V) \end{pmatrix},$$

где $\Upsilon_{na}(U,V) \in \mathscr{A}$, $\Upsilon_{nm}(U,V) \in \mathscr{M}$, $\Upsilon_{nb}(U,V) \in \mathscr{B}$. Тогда можно записать (3.15) в виде $\Upsilon_n(U,V)XUV + UVX\Upsilon_n(U,V) = 0$, или $\Upsilon_n(U,V)X(2UV) + 2UVX\Upsilon_n(U,V) = 0$, для всех $U, V, X \in \mathscr{U}$. Как и в теореме 2.7, утверждаем, что $\Upsilon_n(U,V) = 0$. Это завершает доказательство в данном случае. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть $\mathscr{T}$ — треугольная алгебра, а $\mathscr{U}$ — лиев идеал в $\mathscr{T}$. Тогда любое* JHD *из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$ является* JTHD *из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{T}$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3 из [5].

Замечание. Результаты, доказанные в данной статье, справедливы, если $\mathscr{M}$ удовлетворяет некоторому условию. Однако мы не можем ответить на вопрос, будут ли соответствующие результаты верны в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chase S. U.* A generalization of the ring of triangular matrices // Nagoya Math. J. 1961. V. 18. P. 13–25.
2. *Harada M.* Hereditary semi-primary rings and triangular matrix rings // Nagoya Math. J. 1966. V. 27. P. 463–484.
3. *Haghany A., Varadarajan K.* Study of formal triangular matrix rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27. P. 5507–5525.
4. *Awtar R.* Lie ideals and Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. P. 9–14.
5. *Ferrero M., Haetinger C.* Higher derivations and a theorem by Herstein // Quaest. Math. 2002. V. 25. P. 249–257.
6. *Ashraf M., Khan A., Haetinger C.* On (σ, τ)-higher derivations in prime rings // Int. Electron. J. Algebra. 2010. V. 8. P. 65–79.
7. *Cortes W., Haetinger C.* On Jordan generalized higher derivations in rings // Turk. J. Math. 2005. V. 29. P. 1–10.
8. *Haetinger C.* Higher Derivations on Lie Ideals // Tend. Mat. Apl. Comput. 2002. V. 3. P. 141–145.
9. *Jung Y. S.* Generalized Jordan triple higher derivations on prime rings // Indian J. Pure Appl. Math. 2005. V. 36. P. 513–524.
10. *Nakajima A.* On generalized higher derivations // Turk. J. Math. 1992. V. 24. P. 485–487.
11. *Wei F., Xiao Z. H.* Jordan higher derivations on triangular algebras // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432. P. 2615–2622.
12. *Bergen J., Herstein I. N., Kerr J. W.* Lie ideals and derivations of prime rings // J. Algebra. 1981. V. 71. P. 259–267.
13. *Lanski C., Montgomery S.* Lie structure of prime rings of characteristic 2 // Pac. J. Math. 1972. V. 42. P. 117–136.

Статья поступила 6 октября 2011 г.

Dong Han (Дун Хань)
School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University,
Jiaozuo 454000, P. R. China
lishe@hpu.edu.cn