Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2012. Том 53, № 5

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЕННОСТЕЙ

А. Г. Липчинский

Аннотация. Рассматривается интерполяционный процесс для класса функций, имеющих конечное число особых точек, с помощью рациональных функций, полюсы которых совпадают с особыми точками интерполируемой функции. Узлы интерполяции образуют треугольную матрицу. Найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости на любом компакте, не содержащем особых точек функции, последовательности интерполяционных дробей к интерполируемой функции, а также другие условия сходимости. Обобщаются и улучшаются известные результаты по интерполированию функций с конечным числом особых точек рациональными дробями и целых функций многочленами.

Ключевые слова: аналитическая функция, особая точка функции, интерполяционный процесс, рациональная дробь, равномерная сходимость, условия сходимости.

Класс однозначных аналитических функций, не имеющих других особых точек, кроме, быть может, точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $a_{p+1} = \infty$, обозначим через $A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$.

Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, обладает следующим свойством. При всех $n > N$ n-ю строку матрицы можно разбить на $p+2$ группы точек $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, и $\{z_{0,j}^{(n)}\}$ так, что узлы $\{z_{s,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(s)}$, при неограниченном возрастании n имеют единственную точку сгущения a_s, $z_{p+1,j}^{(n)} \neq 0$, а множество точек $\{z_{0,j}^{(n)}\}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(0)}$, принадлежит некоторому компакту, не содержащему точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$. Класс матриц, обладающих таким свойством, обозначим символом $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$.

Известно (см. [1, гл. VIII, с. 226; 2, гл. V, с. 275]), что существует единственная рациональная функция вида

$$R_{n-1}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{m_n}(z)}, \tag{1}$$

где $P_{n-1}(z)$ — многочлен степени $n-1$, $Q_{m_n}(z) = \prod\limits_{k=1}^{p} (z - a_k)^{m_n^{(k)}}$, $m_n^{(k)}$ — целые неотрицательные числа, $\sum\limits_{k=1}^{p} m_n^{(k)} = m_n \leq n-1$, интерполирующая функцию $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ в узлах $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$.

© 2012 Липчинский А. Г.

Пусть замкнутая область $\overline{D}$ определяется неравенствами $|z| \le 1/d$, $|z-a_k| \ge d$, $k = 1, 2, \dots, p$, где $d < 1$ так мало, что окружности $|z-a_k| = d$ не пересекаются и расположены внутри круга $|z| \le 1/d$.

Будем пользоваться обозначениями

$$\min_j \bigl|a_k - z_{k,j}^{(n)}\bigr| = \rho_n^{(k)},\ k = 1, 2, \dots, p, \quad \bigl\{\max_j \bigl|z_{p+1,j}^{(n)}\bigr|\bigr\}^{-1} = \rho_n^{(p+1)}.$$

Для остаточного члена интерполяции с помощью дробей (1) имеет место равенство (см. [1, гл. VIII, с. 228; 3, гл. 1, с. 65])

$$r_{n-1}(z) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\omega_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k^{(n)}} \frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)} + \frac{\omega_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{p+1}^{(n)}} \frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)} = \omega_n(z) \sum_{s=1}^{p+1} I_n^{(s)}, \tag{2}$$

где $\omega_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \bigl(z - z_j^{(n)}\bigr)[Q_{m_n}(z)]^{-1}$, $z \in \overline{D}$, $\Gamma_k^{(n)} : |a_k - t| = r_n^{(k)} < \min\bigl[d, \rho_n^{(k)}\bigr]$, $k = 1, 2, \dots, p$, $\Gamma_{p+1}^{(n)} : |t| = \bigl(r_n^{(p+1)}\bigr)^{-1}$, $r_n^{(p+1)} < \min\bigl\lfloor d, \rho_n^{(p+1)}\bigr\rfloor$ и контуры $\Gamma_s^{(n)}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, положительно ориентированы относительно $\overline{D}$. Символом $I_n^{(s)}$ в правой части равенства (2) обозначен интеграл по контуру $\Gamma_s^{(n)}$, умноженный на $\frac{1}{2\pi i}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$. На основании леммы 1 из [4] запишем

$$r_{n-1}(z) = \omega_n(z) \Biggl[\sum_{\nu = m_n^{(p+1)}+1}^{\infty} \tau_\nu^{(p+1)}(z) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{\nu = m_n^{(k)}+1}^{\infty} \tau_\nu^{(k)}(z) \Biggr],$$

где $\tau_\nu^{(s)}(z) = b_\nu^{(s)} c_{\nu - m_n^{(s)} - 1}^{(s)}(z)$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, $c_l^{(k)}(z)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции $\varphi_{n,k}(t) = [(t-a_k)^{m_n^{(k)}} \omega_n(t)(t-z)]^{-1}$ в окрестности точки a_k, $b_\nu^{(s)}$ — коэффициент при ν-м члене главной части ряда Лорана в окрестности точки a_k функции $f(t)$, $c_l^{(p+1)}(z)$ — коэффициенты разложения функции $\varphi_{n,p+1}(t) = [\omega_n(t)(t-z)]^{-1} t^{m_n^{(p+1)}+2}$ в окрестности бесконечно удаленной точки, $m_n^{(p+1)} = n - 1 - m_n$.

Пусть функция $f(z)$ в каждой из точек a_s, $s = 1, 2, \dots, p+1$, имеет существенную особенность и $m_n^{(s)}$ неограниченно возрастает с возрастанием n. Введем обозначения

$$\alpha_n^{(s)}(z) = \bigl(\tau_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}(z)\bigr)^{-1} \sum_{\nu = \eta_n^{(s)}}^{\infty} \tau_\nu^{(s)}(z), \quad z \in \overline{D},$$

где $\eta_n^{(s)} = m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} \ne 0$, и $\eta_n^{(s)}$ — наименьший номер отличных от нуля членов $b_\nu^{(s)}$ при $\nu > m_n^{(s)} + 1$, если $b_{m_n^{(s)}+1}^{(s)} = 0$.

При таких обозначениях остаточный член можно записать следующим образом:

$$r_{n-1}(z) = \omega_n(z) \alpha_n^{(p+1)}(z) \tau_{\eta_n^{(p+1)}}^{(p+1)}(z) - \omega_n(z) \sum_{k=1}^{p} \alpha_n^{(k)}(z) \tau_{\eta_n^{(k)}}^{(k)}(z).$$

Так как функция $f(t)$ аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки a_s, для коэффициентов главной части ее ряда Лорана в окрестности a_s имеют место равенства $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \bigl|b_\nu^{(s)}\bigr|^{1/\nu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1.$

Поскольку $\rho_n^{(k)} \to 0$ при $n \to \infty$, существует N_1 такое, что при всех $n > N_1$ будут выполняться неравенства $\rho_n^{(k)} < d$, $k = 1, 2, \dots, p$. При таких n функции $\varphi_{n,k}(t)$ аналитические в $\rho_n^{(k)}$-окрестностях точек a_k и не являются таковыми на границах окрестностей, следовательно,

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \left|c^{(k)}_{\nu-\eta_n^{(k)}}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}} = \varlimsup_{\nu\to\infty} \left[\left|c^{(k)}_{\nu-\eta_n^{(k)}}(z)\right|^{\frac{1}{\nu-\eta_n^{(k)}}}\right]^{1-\frac{\eta_n^{(k)}}{\nu}} = \frac{1}{\rho_n^{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Аналогично для бесконечно удаленной точки получаем

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \left|c^{(p+1)}_{\nu-\eta_n^{(p+1)}}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}} = \rho_n^{(p+1)}.$$

Значит, для всех $s = 1, 2, \dots, p+1$, выполняются равенства

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} \left|\tau_\nu^{(s)}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}} = \varlimsup_{\nu\to\infty} \left|b_\nu^{(s)} c^{(s)}_{\nu-\eta_n^{(s)}}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}} = \varlimsup_{\nu\to\infty} \left|c^{(s)}_{\nu-\eta_n^{(s)}}(z)\right|^{\frac{1}{\nu}} \cdot \varlimsup_{\nu\to\infty} \left|b_\nu^{(s)}\right|^{\frac{1}{\nu}} = 0.$$

Из последних равенств заключаем, что при всех достаточно больших $\eta_n^{(s)}$ члены рядов $\sum\limits_{\nu=\eta_n^{(s)}}^{\infty} \left|\tau_\nu^{(s)}(z)\right|$ убывают быстрее, чем геометрическая прогрессия, т. е. для любого $o < \varepsilon \le 1/2$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $\eta_n^{(s)} > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства

$$\left|\tau_\nu^{(s)}(z)\right| < \left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right| \varepsilon^{\nu-\eta_n^{(s)}}, \quad s = 1, 2, \dots, p+1.$$

В таком случае

$$\left|\alpha_n^{(s)}(z)\right| < \left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right|^{-1} \sum_{\nu=\eta_n^{(s)}}^{\infty} \left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right| \varepsilon^{\nu-\eta_n^{(s)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu = \frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

С другой стороны,

$$\left|\alpha_n^{(s)}(z)\right| > \left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right|^{-1} \left(\left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right| - \sum_{\nu=\eta_n^{(s)}}^{\infty} \left|\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z)\right| \varepsilon^{\nu-\eta_n^{(s)}+1} \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Таким образом, при всех $\eta_n^{(s)} > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$\left|\left|\alpha_n^{(s)}(z)\right| - 1\right| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \le 2\varepsilon,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\alpha_n^{(s)}(z)\right| = 1, \quad s = 1, 2, \dots, p+1.$

Положим $\lim\limits_{t\to a_s} \varphi_{n,s}(t) = \varphi_{n,s}(a_s)$, $s = 1, 2, \dots, p+1$. Поскольку $\tau^{(s)}_{\eta_n^{(s)}}(z) = b^{(s)}_{\eta_n^{(s)}} c_0^{(s)}(z)$, где $c_0^{(k)}(z) = \varphi_{n,k}(a_k)$, $c_0^{(p+1)}(z) = 1$, остаточный член рассматриваемого интерполяционного процесса можно записать так:

$$r_{n-1}(z) = \omega_n(z) \alpha_n^{(p+1)}(z) b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}} - \sum_{k=1}^{p} \omega_{n,k}(z) \alpha_n^{(k)}(z) b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}, \tag{3}$$

где $\left|\alpha_n^{(s)}(z)\right| \to 1$ равномерно при $n \to \infty$, $z \in \overline{D}$ и $\omega_{n,k}(z) = \omega_n(z) \cdot \varphi_{n,k}(a_k)$.

Заметим, что доказательство леммы 5 из [4], где $\Phi_{n,s}(z) = I_n^{(s)}$, справедливо и для узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$. На основании этой леммы заключаем, что с учетом (1) интерполяционный процесс, построенный для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходится к $f(z)$ в замкнутой области $\overline{D}$ тогда и только тогда, когда в равенстве (3) при $n \to \infty$ каждое слагаемое равномерно сходится в нулю в $\overline{D}$.

Если функция $f(z)$ аналитическая в одной или нескольких точках a_τ, $1 \le \tau \le p+1$, или эти точки являются устранимыми особыми точками функции $f(z)$, то в ряде Лорана функции в окрестности точек a_τ главная часть отсутствует и $I_n^{(\tau)} = 0$ при любом $m_n^{(\tau)} \ge 0$. Если же $f(z)$ в точках a_τ имеет полюсы порядка не выше l_τ, то при $m_n^{(\tau)} \ge l_\tau$ интегралы $I_n^{(\tau)}$ равны 0, так как при $m_n^{(\tau)} \ge l_\tau$ точка a_τ будет правильной или нулем подынтегральной функции в $I_n^{(\tau)}$.

Пусть матрица узлов $\{z_j^{(n)}\}$ принадлежит классу $\bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$. Тогда можно записать

$$\prod_{j=1}^{n}\bigl(z - z_j^{(n)}\bigr) = \prod_{s=0}^{p+1} v_{n,s}(z), \quad \text{где } v_{n,s}(z) = \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}}\bigl(z - z_{s,j}^{(n)}\bigr).$$

Лемма 1. *При любом фиксированном $d > 0$ в замкнутой области $\overline{D}$, $z \neq z_j^{(n)}$, имеют место равенства*

$$|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)|^{1/n}$$
$$= \exp\Biggl\{\sum_{s=1, s\neq k}^{p} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} \ln\biggl|\frac{z-a_s}{a_k - a_s}\biggr| + \frac{\lambda_n^{(k)} - m_n^{(k)}}{n} \ln|z-a_k| + c_1^{(k)}(z)\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} + o(1)\Biggr\},$$

$$\biggl|\frac{\omega_n(z)}{v_{n,p+1}(z)}\biggr|^{1/n} = \exp\Biggl\{\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda_n^{(k)} - m_n^{(k)}}{n} \ln|z-a_k| + c_2(z)\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} + o(1)\Biggr\},$$

где

$$c_1^{(k)}(z) = \frac{1}{\lambda_n^{(0)}} \sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\biggl|\frac{z - z_{0,j}^{(n)}}{a_k - z_{0,j}^{(n)}}\biggr|, \quad c_2(z) = \frac{1}{\lambda_n^{(0)}} \sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\bigl|z - z_{o,j}^{(n)}\bigr|.$$

Доказательство. Имеем

$$|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)|^{1/n} = \left|\frac{\prod\limits_{s=0}^{p+1} v_{n,s}(z) \prod\limits_{s=1,s\neq k}^{p} (a_k - a_s)^{m_n^{(s)}}}{Q_{m_n}(z) \prod\limits_{s=0,s\neq k}^{p+1} v_{n,s}(a_k)(a_k - z)}\right|^{1/n}$$
$$= \prod_{s=1}^{p}\biggl|\frac{v_{n,s}(z)}{(z-a_s)^{m_n^{(s)}}}\biggr|^{1/n} \prod_{s=1,s\neq k}^{p}\biggl|\frac{v_{n,s}(a_k)}{(a_k-a_s)^{m_n^{(s)}}}\biggr|^{-1/n}$$
$$\times \biggl|\frac{v_{n,p+1}(z)}{v_{n,p+1}(a_k)}\biggr|^{1/n} \biggl|\frac{v_{n,0}(z)}{v_{n,0}(a_k)}\biggr|^{1/n} |a_k - z|^{-1/n}.$$

С помощью лемм 1–3 из [5] при $z \neq z_j^{(n)}$ для логарифма произведения $\prod\limits_{s=1}^{p}$ получим

$$\ln\left[\prod_{s=1}^{p}\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}}\left(\left|\frac{z-z_{s,j}^{(n)}}{z-a_s}\right||z-a_s|^{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}\right)\right]^{1/n}=\sum_{s=1}^{p}\ln\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}}\left|1+\frac{a_s-z_{s,j}^{(n)}}{z-a_s}\right|^{1/n}$$
$$+\sum_{s=1}^{p}\ln|z-a_s|^{\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}}=o(1)+\sum_{s=1}^{p}\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}\ln|z-a_s|.$$

Аналогично для других сомножителей будем иметь

$$\ln\prod_{s=1,s\neq k}^{p}\left|\frac{v_{n,s}(a_k)}{(a_k-a_s)^{m_n^{(s)}}}\right|^{-1/n}=\sum_{s=1,s\neq k}^{p}\ln\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}}\left|1+\frac{a_s-z_{s,j}^{(n)}}{a_k-a_s}\right|^{-1/n}$$
$$-\sum_{s=1,s\neq k}^{p}\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}\ln|a_k-a_s|=o(1)-\sum_{s=1,s\neq k}^{p}\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}\ln|a_k-a_s|,$$

$$\ln\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}}\left|\frac{z-z_{0,j}^{(n)}}{a_k-z_{0,j}^{(n)}}\right|^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}}\ln\left|\frac{z-z_{o,j}^{(n)}}{a_k-z_{o,j}^{(n)}}\right|,$$

$$\ln\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(p+1)}}\left|\frac{z-z_{p+1,j}^{(n)}}{a_k-z_{p+1,j}^{(n)}}\right|^{1/n}=o(1),\quad \ln|a_k-z|^{-1/n}=o(1).$$

Суммируя полученные результаты, имеем первое из равенств.

Докажем справедливость второго равенства. Воспользовавшись теми же леммами из [5], найдем

$$\ln\left|\frac{\omega_n(z)}{v_{n,p+1}(z)}\right|^{1/n}=\ln\left[\prod_{k=1}^{p}\left|\frac{v_{n,k}(z)}{(z-a_k)^{m_n^{(k)}}}\right||v_{n,0}(z)|\right]^{1/n}$$
$$=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_n^{(k)}-m_n^{(k)}}{n}\ln|z-a_k|+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\lambda_n^{(0)}}\ln\left|z-z_{o,j}^{(n)}\right|+o(1).$$

Второе равенство доказано.

Равенство (3) запишем в виде

$$r_{n-1}(z)\frac{\omega_n(z)}{v_{n,p+1}(z)}v_{n,p+1}(z)\alpha_n^{(p+1)}(z)b_{\eta_n^{(p+1)}}^{(p+1)}$$
$$-\sum_{k=1}^{p}\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)\frac{\alpha_n^{(k)}(z)}{v_{n,k}(a_k)}b_{\eta_n^{(k)}}^{(k)},\quad z\neq z_j^{(n)}. \quad (4)$$

Для упрощения записи положим

$$F_{n,k}(z)=\exp\left\{\sum_{s=1,s\neq k}^{p}\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}\ln\left|\frac{z-a_s}{a_k-a_s}\right|+\frac{\lambda_n^{(k)}-m_n^{(k)}}{n}\ln|z-a_k|+c_1^{(k)}(z)\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right\},$$

$$F_{n,p+1}(z)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_n^{(k)}-m_n^{(k)}}{n}\ln|z-a_k|+c_2(z)\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right\}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек a_k, $k = 1, 2, \dots, p$, к функции $f(z)$, необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{\overline{D}} F_{n,k}(z)\bigl[\bigl|b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\bigr||v_{n,k}(a_k)|^{-1}\bigr]^{1/n} \le 1, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{5}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \max_{\overline{D}} F_{n,p+1}(z)\bigl[\bigl|b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}}\bigr||v_{n,p+1}(0)|\bigr]^{1/n} \le 1, \tag{6}$$

и достаточно, чтобы они были строгими.

Замечание 1. Так как $|v_{n,p+1}(z)|^{1/n} \sim |v_{n,p+1}(0)|^{1/n}$ при $n \to \infty$, $z \in \overline{D}$, $z^{(n)}_{p+1,j} \ne 0$, в неравенстве (6) проведена замена $|v_{n,p+1}(z)|^{1/n}$ на $|v_{n,p+1}(0)|^{1/n}$.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для замкнутой области $\overline{D}$.

Как уже отмечалось, необходимым и достаточным условием сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса в $\overline{D}$ является равномерная сходимость каждого слагаемого в правой части (3) к нулю при $z \in \overline{D}$, $n \to \infty$.

Из леммы 1 и обозначений $F_{n,s}(z)$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, следует, что для всех $z \ne z_j^{(n)}$, $z \in \overline{D}$, при $n \to \infty$ имеют место равенства

$$|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)|^{1/n} = e^{o(1)}F_{n,k}(z),\ k = 1, 2, \dots, p, \quad \left|\frac{\omega_n(z)}{v_{n,p+1}(z)}\right|^{1/n} = e^{0(1)}F_{n,p+1}(z),$$

стало быть,

$$|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)|^{1/n} \sim F_{n,k}(z), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad \left|\frac{\omega_n(z)}{v_{n,p+1}(z)}\right|^{1/n} \sim F_{n,p+1}(z)$$

в замкнутой области $\overline{D}$ при $n \to \infty$, $z \ne z_j^{(n)}$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\bigl|\alpha_n^{(s)}(z)\bigr| = 1$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, равномерно в $\overline{D}$, можем записать

$$\bigl|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)[v_{n,k}(a_k)]^{-1}\alpha_n^{(k)}(z)b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\bigr|^{1/n} \sim F_{n,k}(z)\bigl[\bigl|b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\bigr||v_{n,k}(a_k)|^{-1}\bigr]^{1/n},$$

$$k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\bigl|\omega_n(z)[v_{n,p+1}(z)]\bigr|^{-1}v_{n,p+1}(z)\alpha_n^{(k)}(z)b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}}\bigr|^{1/n} \sim F_{n,p+1}(z)\bigl[\bigl|b^{(p+1)}_{\eta_n^{(p+1)}}\bigr||v_{n,p+1}(0)|\bigr]^{1/n},$$

$$z \in \overline{D} \text{ при } n \to \infty, \quad z \ne z_j^{(n)}.$$

Необходимость. Пусть рассматриваемый интерполяционный процесс равномерно сходится к $f(z)$ в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда каждое из слагаемых в правой части (4) равномерно стремится к нулю в $\overline{D}$ при $n \to \infty$. Так как k-е слагаемое в (4) равномерно стремится к нулю в $\overline{D}$ при $n \to \infty$, существует последовательность $\{\varepsilon_n^{(k)}\}$, где $\varepsilon_n^{(k)} > 0$, такая, что $\varepsilon_n^{(k)} \to 0$ при $n \to \infty$, и для достаточно больших n выполняются неравенства

$$\bigl|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)[v_{n,k}(a_k)]\bigr|^{-1}\alpha_n^{(k)}(z)b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\bigr| \le \varepsilon_n^{(k)}, \quad z \in \overline{D},$$

откуда, учитывая, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\bigl(\varepsilon_n^{(k)}\bigr)^{1/n} \le 1$, находим

$$\varlimsup_{n\to\infty}\bigl|\omega_{n,k}(z)v_{n,k}(a_k)[v_{n,k}(a_k)]^{-1}\alpha_n^{(k)}(z)b^{(k)}_{\eta_n^{(k)}}\bigr|^{1/n} \le 1.$$

Из последнего неравенства следует (5).

Доказательство неравенства (6) аналогично.

Достаточность (5) и (6) очевидна с использованием последних асимптотических равенств. Теорема доказана.

Предъявляя различные требования к $\lambda_n^{(0)}$, $\lambda_n^{(s)}$, $m_n^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, и функции $f(z)$, из доказанной теоремы можно получить конкретные условия равномерной сходимости.

Следствие 1. *Если функция $f(z)$ в одной или нескольких точках a_τ имеет полюсы порядка не выше l_τ, то (при выполненных условиях (5) и (6) в других особых точках функции) для сходимости процесса достаточно потребовать выполнения неравенств $m_n^{(\tau)} \geq l_\tau$.*

Доказательство. В ряде Лорана функции $f(z)$ по степеням $(z - a_\tau)$ присутствует лишь не более l_τ членов главной части. Следовательно, все $b_{\eta_n}^{(\tau)}$, где $\eta_n > l_\tau$, равны нулю. Отсюда ясно, что при $m_n^{(\tau)} \geq l_\tau$ слагаемые с индексом $k = \tau$ или $p + 1 = \tau$ в равенстве (3) обращаются в нуль. Значит, при $m_n^{(\tau)} \geq l_\tau$ неравенства (5) и (6) выполняются.

Следствие 2. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ принадлежит $\bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, т. е. бесконечно удаленная точка является точкой сгущения узлов. Для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов $P_{n-1}(z)$, построенная для целой функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходилась к $f(z)$ на любом компакте $\overline{G}$, необходимо выполнение неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\max_{\overline{G}}\exp\left\{c_2(z)\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\right\}|b_n|^{1/n}\cdot|v_n(0)|^{1/n}\right] \leq 1, \quad z \in \overline{G}, \tag{7}$$

и достаточно, чтобы оно было строгим.

Доказательство. Действительно, в условиях следствия $\lambda_n^{(k)} = m_n^{(k)} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, значит, все слагаемые под знаком суммы в обозначении $F_{n,p+1}(z)$ равны нулю. Без индекса $p + 1$ условие (6) запишем в виде (7). Следствие доказано.

Теорема 2. *Пусть узлы интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ принадлежит $\bigcup_1^1 a$, $a = \infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$. Для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов $P_{n-1}(z)$, построенная для целой функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходились к $f(z)$ на любом компакте $\overline{G}$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty}|b_n v_n(0)|^{1/n} \leq 1, \quad z \in \overline{G}, \tag{8}$$

и достаточно, чтобы оно было строгим.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для замкнутой области $\overline{D}_1 : |z| < 1/d$, $d < 1$ такое, что $1/d > \max\limits_j |z_{0,j}^{(n)}|$. В силу неравенства $1/d \leq \max\limits_j |z - z_{0,j}^{(n)}| < 2/d$, $z \in \overline{D}_1$, имеем

$$\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\ln\frac{1}{d} \leq \max_j \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}c_2(z) = \max_j \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\frac{1}{\lambda_n^{(0)}}\sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}}\ln|z - z_{0,j}^{(n)}| < \frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\ln\frac{2}{d}.$$

Поскольку правая и левая части последнего неравенства стремятся к нулю при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\overline{D}} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} c_2(z) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\overline{D}} F_{n,p+1}(z) = 1$. Из последнего равенства заключаем, что если выполняется (8), то выполняется и (7), причем если (8) строгое неравенство, то неравенство (7) также строгое.

С помощью следствия 2 убеждаемся в справедливости теоремы.

Введем обозначения

$$u_{n,j}^{(k)} = \left|a_k - z_{k,j}^{(n)}\right|^{-1},\ k = 1, 2, \dots, p, \quad u_{n,j}^{(p+1)} = \left|z_{p+1,j}^{(n)}\right|.$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, p+1. \tag{9}$$

Для того чтобы последовательность интерполяционных дробей (1), построенная для функции $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ по матрице узлов $\left\{z_j^{(n)}\right\} \in \bigcup\limits_{k=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек a_k, к интерполируемой функции, необходимо выполнение неравенств

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left[\left|b_{\eta_n^{(s)}}^{(s)}\right| \prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)}\right]^{1/n} \le 1, \quad s = 1, 2, \dots, p+1, \tag{10}$$

и достаточно, чтобы они были строгими.

Доказательство. Так как по условию теоремы выполняются равенства (9), имеем

$$\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 1 - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n}$$
$$= 1 - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{m_n^{(s)}}{n} = 1 - \sum_{s=1}^{p+1} \frac{\lambda_n^{(s)} - m_n^{(s)}}{n} - \frac{n-1}{n} = o(1).$$

Теорему достаточно доказать для замкнутой области $\overline{D}$. Обозначая $\min\limits_{1\le j\le\lambda_n^{(0)}} \left|a_s - z_{0,j}^{(n)}\right|$, $k = 1, 2, \dots, p$, через ρ, а $\max\limits_{1\le j\le\lambda_n^{(0)}} \left|z_{0,j}^{(n)}\right|$ — через q, найдем

$$\rho \le \left|a_k - z_{0,j}^{(n)}\right| \le |a_k| + q, \quad \max_{\overline{D}} \left|z - z_{0,j}^{(n)}\right| = (1/d) + q.$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \ln \frac{(1/d) + q}{|a_k| + q} \le \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \max_{\overline{D}} c_1^{(k)}(z)$$
$$= \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \max_{\overline{D}} \frac{1}{\lambda_n^{(0)}} \sum_{j=1}^{\lambda_n^{(0)}} \ln\left|\frac{z - z_{0,j}^{(n)}}{a_k - z_{0,j}^{(n)}}\right| \le \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \ln \frac{(1/d) + q}{\rho}.$$

Поскольку величины $1/d$, $|a_k|$, q, ρ положительны и ограничены, правая и левая части последнего неравенства стремятся к нулю при $n \to \infty$, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} \max_{\overline{D}} c_1^{(k)}(z) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}\max_{\overline{D}}c_2(z)=0,$$

полученное при доказательстве теоремы 2, выполняется и в замкнутой области $\overline{D}$.

В силу того, что величины $|z-a_k|$ и $\left|\frac{z-a_s}{a_k-a_s}\right|$, $k=1,2,\dots,p$, $s\neq k$, ограничены в $\overline{D}$, с учетом равенств (9) находим, что все слагаемые, содержащие сомножители $\left(\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}\right):n$ в $F_{n,s}(z)$, $s=1,2,\dots,p+1$, стремятся к нулю при $n\to\infty$. Отсюда следуют равенства

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\max_{\overline{D}}F_{n,s}(z)=1,\quad s=1,2,\dots,p+1.$$

Из последних равенств вытекает утверждение, что если выполняются неравенства (10), то выполняются неравенства (5) и (6), причем если (10) строгие для всех $s=1,2,\dots,p+1$, то неравенства (5) и (6) будут также строгими.

С помощью теоремы 1 убеждаемся в том, что теорема 3 верна.

Подчиняя узлы интерполяции $\left\{z_{s,j}^{(n)}\right\}$ различным требованиям, из теорем 1–3 можно получать различные условия равномерной сходимости последовательности (1) к интерполируемой функции на любом компакте, не содержащем точек a_k.

Для характеристики поведения последовательности $\left\{z_j^{(n)}\right\}$ около точек a_s, $s=1,2,\dots,p+1$, воспользуемся порядком θ_s и типом A_s сходимости последовательности около точек a_s, определяемыми формулами [6, 7]

$$\frac{1}{\theta_s}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln u_{n,j}^{(s)}}{\ln j},\quad A_s=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n,j}^{(s)}}{(j)^{1/\theta_s}},\quad j=1,2,\dots,\lambda_n^{(s)},\ s=1,2,\dots,p+1.$$

Будем говорить, что последовательность $\left\{z_j^{(n)}\right\}$ *принадлежит классу* $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}[\theta_s,A_s]$, если около точки a_s ее порядок сходимости больше θ_s, а если он равен θ_s, то тип сходимости не превосходит A_s.

Порядок ρ_s и тип σ_s функции $f(z)$ около особой точки a_s определяются формулами

$$\rho_s=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M_s(f,r)}{\ln r},\ \rho_s>0,\quad \sigma_s=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_s(f,r)}{r^{\rho_s}},\ s=1,2,\dots,p+1,$$

где $M_k(f,r)=\max\limits_{|z-a_k|=1/r}|f(z)|$, $k=1,2,\dots,p$, $M_{p+1}(f,r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Класс функций $f(z)\in A(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$, у которых порядок около точки a_s либо меньше ρ_s, либо равен ρ_s, а тип около этой точки меньше σ_s, обозначим через $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}[\rho_s,\sigma_s)$, а если при тех же условиях на порядок тип не превосходит σ_s, то — через $\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}[\rho_s,\sigma_s]$.

Теорема 4. *Пусть выполняются равенства* (9), $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(s)}}{n}=\chi_s>0$ *и* $\left\{z_j^{(n)}\right\}\in\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}[\theta_s,A_s]$. *Для того чтобы последовательность дробей* (1), *построенная для* *функции* $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек* a_k, *к функции* $f(z)$, *достаточно, чтобы* $f(z) \in \bigcup_{s=1}^{p+1} \big[\theta_s, \big(A_s^{\theta_s}\theta_s\big)^{-1}\big)$. *Если же, кроме того, при всех достаточно больших* n *выполняются неравенства* $u_{n,j}^{(s)} \le A_s j^{1/\theta_s}$, *то условие* $f(z) \in \bigcup_{s=1}^{p+1} \big[\theta_s, \big(A_s^{\theta_s}\theta_s\big)^{-1}\big]$ *является необходимым.*

Доказательство. Достаточность. Заметим сначала, что из равенств (9) следует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(s)}}{n} = \chi_s, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{m_n^{(s)}}{\lambda_n^{(s)}} = 1.$$

Так как последовательность $\{z_j^{(n)}\}$ принадлежит классу $\bigcup_{s=1}^{p+1} [\theta_s, A_s]$, для любого $\varepsilon > 0$ при всех $j > N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $u_{n,j}^{(s)} \le (A_s+\varepsilon) j^{1/\theta_s}$, $s = 1, 2, \ldots, p+1$. Далее в доказательстве теоремы в целях упрощения записи индекс s писать не будем.

При $j > N(\varepsilon)$ запишем

$$\prod_{j=N(\varepsilon)+1}^{\lambda_n} u_{n,j} \le (A+\varepsilon)^{\lambda_n - N(\varepsilon)} \left[\prod_{j=N(\varepsilon)+1}^{\lambda_n} j\right]^{1/\theta}.$$

Поскольку $\prod_{j=1}^{N(\varepsilon)} u_{n,j}$ — произведение $N(\varepsilon)$ чисел, то

$$\lim_{n\to\infty} \left[\prod_{j=1}^{N(\varepsilon)} u_{n,j}\right]^{1/n} = 1.$$

При достаточно больших n будем иметь

$$\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} = \prod_{j=1}^{N(\varepsilon)} u_{n,j} \cdot \prod_{j=N(\varepsilon)+1}^{\lambda_n} u_{n,j}$$
$$\le (1+o(1))^n (A+\varepsilon)^{\lambda_n} \left[\prod_{j=1}^{\lambda_n} j\right]^{1/\theta} \le (1+o(1))^n (A+\varepsilon)^{\lambda_n} (\lambda_n!)^{1/\theta}.$$

По формуле Стирлинга (см. [8, гл. 1, с. 19]) получаем

$$\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j} \le (1+o(1))^n (A+\varepsilon)^{\lambda_n} \left[\left(\frac{\lambda_n}{e}\right)^{\lambda_n} \sqrt{2\pi\lambda_n}\right]^{1/\theta},$$

откуда окончательно найдем

$$\left[\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j}\right]^{1/n} \le (1+o(1))(A+\varepsilon)^{\frac{\lambda_n}{n}} \left(\frac{\lambda_n}{e}\right)^{\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\lambda_n}{n}}. \tag{11}$$

Поскольку функция $f(z)$ по условию теоремы принадлежит классу $\bigcup\limits_{1}^{p+1}[\theta,\sigma)$, где $\sigma<(\theta A^{\theta})^{-1}$, можно положить $\sigma=(\theta B^{\theta})^{-1}$, где $B>A$. Имеет место равенство (см. [9, гл. 7, с. 251])

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\eta_n^{1/\theta}\sqrt[\eta_n]{b_{\eta_n}}=[\theta e(\theta B^{\theta})^{-1}]^{1/\theta}.$$

Получим

$$\sqrt[n]{|b_{\eta_n}|}=(\sqrt[\eta_n]{b_{\eta_n}})^{\eta_n/n}\le(1+o(1))\left[\left(\frac{eB^{-\theta}}{\eta_n}\right)^{1/\theta}\right]^{\eta_n/n}.$$

Перемножая последнее неравенство с (11) и переходя к пределу, будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{|b_{\eta_n}|}\left[\prod_{j=1}^{\lambda_n}u_{n,j}\right]^{1/n}\le\left(\frac{A+\varepsilon}{B}\right)^{\chi}. \tag{12}$$

Так как $B>A$, то $\varepsilon>0$ можно взять таким, чтобы выполнялось неравенство $A+\varepsilon<B$. Тогда правая часть (12) будет меньше единицы, значит, выполняются неравенства (10) и $I_n\to0$ при $n\to\infty$, и процесс сходится.

Необходимость. При доказательстве второй части теоремы можно положить $\varepsilon=0$, а $B=A$. Тогда левая часть (12) будет не больше единицы и с помощью теоремы 3 заключаем, что необходимость доказана.

Следствие 3. *Пусть матрица узлов интерполяции $\{z_j^{(n)}\}$ принадлежит $\bigcup\limits_{1}^{1}a$, где $a=\infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}=0$. Если при всех достаточно больших n выполняются неравенства $|z_j^{(n)}|\le A_j^{1/\theta}$, то для того чтобы последовательность полиномов $P_{n-1}(z)$, построенная для целой функции $f(z)$ по узлам $\{z_j^{(n)}\}$, равномерно сходилась к $f(z)$ на любом компакте, достаточно, чтобы $f(z)=\lfloor\theta,(A^{\theta}\theta)^{-1})$, и необходимо $f(z)\in\lfloor\theta,(A^{\theta}\theta)^{-1}\rfloor$.*

Справедливость следствия очевидна и вытекает из теорем 2 и 4.

Теорема 4 обобщает и улучшает результат В. Л. Гончарова [6] и теорему 1 из [10]. Действительно, в указанных работах узлы интерполяции обладают свойствами:

1) образуют линейную систему,

2) различны между собой,

3) каждая особая точка функции является предельной точкой узлов интерполяции,

4) последовательность узлов не имеет иных предельных точек, кроме особых точек функции,

5) узлы отличны от особых точек интерполируемой функции.

В теореме 4 узлы образуют треугольную матрицу, обладающую только свойствами 3 и 5, узлы могут иметь предельные точки, отличные от точек a_s, $s=1,2,\dots,p+1$. Кроме того, в теореме 4 ослаблены требования на разности $\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}$, так как в [6] и теореме 1 из [10] эта разность удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(s)}-m_n^{(s)}}{n}\ln n=b_s.$$

В теореме 1 из [10] получены условия (при $b_s = 0$)

$$\sigma_s < A_s^{-\theta_s} h_s(2), \quad h_s(2) = \theta_s \int_2^\infty t^{-1-\theta_s} \ln(t-1)\, dt,$$

достаточные для равномерной сходимости интерполяционного процесса, которые при $\chi_s < 2^{-\theta_s}$ улучшают результат [6] $\sigma_s < A_s^{-\theta_s} h_s(\chi_s^{-1/\theta_s})$ в силу неравенства $h_s(\chi_s^{-1/\theta_s}) < h_s(2)$ при $\chi_s \neq 2^{-\theta_s}$. Отсюда следует, что класс сходимости, указанный в теореме 1 из [10], шире, чем в работе [6] при $\chi_s < 2^{-\theta_s}$ и $b_s = 0$.

Вместе с тем теорема 4 улучшает результат теоремы 1 из [10]. В самом деле, при любом $\theta_s > 0$ имеем

$$A_s^{-\theta_s} h_s(2) = A_s^{-\theta_s} \theta_s \int_2^\infty \frac{\ln(t-1)}{t^{1+\theta_s}}\, dt < A_s^{-\theta_s} \theta_s \int_2^\infty \frac{\ln(t-1)}{(t-1)^{1+\theta_s}}\, d(t-1)$$
$$= A_s^{-\theta_s} \theta_s \int_1^\infty \frac{\ln \varphi}{\varphi^{1+\theta_s}}\, d\varphi = A_s^{-\theta_s} \theta_s \cdot \frac{1}{\theta_s^2} = A_s^{-\theta_s} \frac{1}{\theta_s}.$$

Из последнего соотношения и определения класса функций $\bigcup_{s=1}^{p+1} [\rho_s, \sigma_s)$ заключаем, что класс сходимости теоремы 4 шире, чем в теореме 1 из [10]. Таким образом, теорема 4 улучшает результаты, полученные в теореме 1 из [10] и [6], если $b_s = 0$. Кроме того, в теореме 4 указаны необходимые условия сходимости процесса.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (9), $\chi_s > 0$ *и матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\} \in \bigcup_{s=1}^{p+1} a_s$ *при всех достаточно больших* n *обладает свойством* $u_{n,j}^{(s)} = A_s(\lambda_n^{(s)})^{1/\theta_s}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(s)}$. *Для того чтобы последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z) \in A(a_1, a_2, \dots, a_{p+1})$ *по матрице узлов* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась на любом компакте, не содержащем точек* a_k, *к интерполируемой функции* $f(z)$, *достаточно, чтобы* $f(z) \in \bigcup_{s=1}^{p+1} [\theta_s, (A_s^{\theta_s}\theta_s e)^{-1})$, *и необходимо* $f(z) \in \bigcup_{s=1}^{p+1} [\theta_s, (A^{\theta_s}\theta_s e)^{-1}]$.

Доказательство. Поскольку все $u_{n,j}^{(s)}$ в n-й строке группы точек $\{z_{s,j}^{(n)}\}$ равны $A_s(\lambda_n^{(s)})^{1/\theta_s}$, имеем

$$\left[\prod_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)}\right]^{1/n} = \left[A_s(\lambda_n^{(s)})^{1/\theta_s}\right]^{\frac{\lambda_n^{(s)}}{n}}. \tag{13}$$

Далее в доказательстве теоремы индекс s писать не будем. Так как $f(z) \in \bigcup_1^{p+1} [\theta, (A^\theta \theta e)^{-1})$, существует $B > A$ такое, что $f(z) \in \bigcup_1^{p+1} [\theta, (B^\theta \theta e)^{-1}]$. В таком случае

$$\varlimsup_{n\to\infty} \eta_n^{1/\theta} \sqrt[\eta_n]{|b_{\eta_n}|} = [\theta e, (B^\theta \theta e)^{-1}]^{1/\theta} = B^{-1},$$

откуда
$$\sqrt[n]{|b_{\eta_n}|} = (1 + o(1))[B^{-1}(\eta_n)^{-1/\theta}]^{\eta_n/n}.$$

Перемножая последнее равенство с (13), переходя к пределу и учитывая при этом, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \chi$, получаем
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_{\eta_n}|}\left[\prod_{j=1}^{\lambda_n} u_{n,j}\right]^{1/n} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\chi}.$$
Поскольку $A < B$, выполняются неравенства (10), значит, $I_n \to 0$ при $n \to \infty$, процесс сходится.

При доказательстве второй части теоремы возьмем $A = B$, откуда следует необходимое условие сходимости.

Следствие 4. *Если матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\}$ *принадлежит* $\bigcup\limits_1^1 a$, $a = \infty$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0, \quad \left|z_1^{(p+1)}\right| = \left|z_2^{(p+1)}\right| = \dots = \left|z_{\lambda_n^{(p+1)}}^{(p+1)}\right| = A\lambda_n^{1/\theta},$$
то для того чтобы последовательность интерполяционных полиномов $P_{n-1}(z)$, *построенная для целой функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, достаточно, чтобы* $f(z) \in \bigcup\limits_1^1[\theta, (A^\theta\theta e)^{-1})$, *и необходимо* $f(z) \in \bigcup\limits_1^1[\theta, (A^\theta\theta e)^{-1}]$.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 5.

Замечание 2. Из теорем 4, 5 и следствий из них ясно, что с заменой последовательности $\{u_{n,j}^{(s)}\}$, $u_{n,j}^{(s)} \le u_{n,j+1}^{(s)}$, последовательностью $\{u_{n,j}^{(s)}\}$, $u_{n,j}^{(s)} = u_{n,j+1}^{(s)}$, $j = 1, 2, \dots, \lambda_n^{(s)}$, где в обоих случаях $u_{n,\lambda_n^{(s)}}^{(s)}$ равны между собой, при оценке остаточного члена, класс сходимости сужается, поскольку $\prod\limits_{j=1}^{\lambda_n^{(s)}} u_{n,j}^{(s)}$ увеличивается.

Пусть последовательность $\{u_n\}$, $0 < u_1 \le u_2 \le \dots \le u_n \le \dots$, имеет функцию плотности $n(R)$, определяемую как число точек u_n, попавших в круг $|z| \le R$ (см. [11, гл. II, с. 131]). Если функция $\varphi(t)$ дифференцируема и $\varphi(t)$ интегрируема на каждом конечном интервале $t > 0$, то имеет место формула
$$\sum_{u_n \le R} \varphi(u_n) = n(R)\varphi(R) - \int_0^R n(t)\varphi(t)\,dt \tag{14}$$
(см. [12, отд. II, гл. 3, с. 93, 94]).

Не нарушая общности, далее будем полагать, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства $u_{n,j}^{(s)} \le u_{n,j+1}^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, в противном случае узлы интерполяции в строках матрицы можно перенумеровать.

Учитывая обозначения $u_{n,j}^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, p+1$, будем полагать, что функция плотности узлов интерполяции в окрестности точки a_k, обозначаемая через $n_k(R)$, равна количеству чисел из группы $\{z_{k,j}^{(n)}\}$, находящихся вне круга $|z - a_k| < \frac{1}{R}$, $k = 1, 2, \dots, p$, и $n_{p+1}(R)$ — число точек группы $\{z_{p+1,j}^{(n)}\}$, попавших в круг $|z| \le R$.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (9) *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(s)}}{n}=\chi_s>0$. *Для того чтобы последовательность* (1), *построенная для функции* $f(z)\in A(a_1,a_2,\dots,a_{p+1})$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}\in\bigcup\limits_{s=1}^{p+1}a_s$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, не содержащем точек* a_k, *достаточно, чтобы при всех* $n>N$ *выполнялись неравенства*

$$\ln\bigl|b_{\eta_n}^{(s)}\bigr|-N_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)\le -c_n\bigl(R_n^{(s)}\bigr)n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)\ln R_n^{(s)},$$

где $n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)$ — *функция плотности узлов интерполяции около точек* a_s, $R_n^{(s)}=u^{(s)}_{n,\lambda_n^{(s)}}$, $N_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)=\int\limits_0^{R_n^{(s)}}\frac{n(t)}{t}\,dt$ — *функция Неванлинна* (*см.* [12, *гл.* III, *с.* 204]) *и* $c_n(R)\ge 1+c[\chi_s\ln R]^{-1}$, $c>0$, *и условие необходимо в случае* $c\ge 0$.

Доказательство. В доказательстве индекс s писать не будем. При доказательстве воспользуемся теоремой 3.

Прологарифмировав обе части неравенств (10), получим

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln|b_{\eta_n}|+\sum_{j=1}^{\lambda_n}\ln u_{n,j}\right]\le 0. \tag{15}$$

Функция $\ln t$, последовательность $\{u_{n,j}\}$, $j=1,2,\dots,\lambda_n$, и R_n удовлетворяют всем требованиям формулы (14).

С помощью этой формулы выражение под знаком предела в (15) перепишем в виде

$$\frac{1}{n}[\ln|b_{\eta_n}|+\ln R_n\cdot n(R_n)-N(R_n)]. \tag{16}$$

Учитывая условия теоремы, можем утверждать, что выражение под знаком предела в (15) не превосходит

$$\frac{1}{n}[-c_n(R_n)n(R_n)\ln R_n+n(R_n)\ln R_n]=\frac{1}{n}n(R_n)\ln R_n(1-c_n(R_n)),$$

откуда для левой части (15) получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n(R_n)}{n}\ln R_n(1-c_n(R_n))\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}\ln R_n(-c[\chi\ln R_n]^{-1})=-c.$$

Поскольку $c>0$, неравенство (15) имеет место и на основании теоремы 3 заключаем, что интерполяционный процесс сходится. Достаточные условия сходимости доказаны.

Доказательство необходимых условий очевидно. Действительно, если $c\ge 0$, то, как следует из последнего неравенства, (15) может быть нестрогим, и из теоремы 3 заключаем о выполнении необходимых условий сходимости.

Следствие 5. *Если матрица узлов интерполяции* $\{z_j^{(n)}\}$ *принадлежит* $\bigcup\limits_1^1 a$, $a=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^0}{n}=0$, *то для того чтобы последовательность полиномов* $P_{n-1}(z)$, *построенная для целой функции* $f(z)$ *по узлам* $\{z_j^{(n)}\}$, *равномерно сходилась к* $f(z)$ *на любом компакте, достаточно, чтобы при всех* $n>N$ *выполнялось неравенство*

$$\ln|b_{\eta_n}|-N(u_n)\le -c_n n(u_n)\ln u_n,$$

где $n(u_n)$ — функция плотности узлов интерполяции, $u_n = \max\limits_j \bigl|z_j^{(n)}\bigr|$, $N(u_n)$ — функция Неванлинна и $c_n \geq 1 + c(\ln u_n)^{-1}$, $c > 0$, и условие необходимо в случае $c \geq 0$.

Доказательство. Поскольку для интерполяционного многочлена $P_{n-1}(z)$, построенного для целой функции, $\lambda_n^{(p+1)} = n - \lambda_n^{(0)}$, $m_n^{(p+1)} = n - 1$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(0)}}{n} = 0$, получаем, что $\chi_{p+1} = 1$, значит, $c_n(R) = c_n \geq 1 + c(\ln R)^{-1}$. Из этого неравенства и теоремы 6 непосредственно убеждаемся в справедливости необходимого и достаточного условий сходимости процесса, указанных в следствии.

Теорема 7. *Пусть $\bigl\{z_j^{(n)}\bigr\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, $m_n^{(s)} = \lambda_n^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, p+1$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^{(s)}}{n} = \chi_s > 0$. Если функция $f(z) \in A(a_1, a_2, \ldots, a_{p+1})$ при всех $n > N$ удовлетворяет неравенствам*

$$\ln M_s\bigl(f, r_n^{(s)}\bigr) - N_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr) < c_n n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr), \tag{17}$$

где $n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)$ — функция плотности узлов интерполяции около точек a_s, $R_n^{(s)} = u^{(s)}_{n,\lambda_n^{(s)}}$, $N_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)$ — функция Неванлинна, $r_n^{(s)} = R_n^{(s)}\bigl[\theta_n^{(s)}\bigr]^{-1}$, $0 < \theta_n^{(s)} < \frac{1}{2}$, и $0 < c_n < \varliminf\limits_{n\to\infty} \ln\bigl[\theta_n^{(s)}\bigr]^{-1}$, то последовательность (1), построенная для функции $f(z)$ по узлам $\bigl\{z_j^{(n)}\bigr\} \in \bigcup\limits_{s=1}^{p+1} a_s$, равномерно сходится к $f(z)$ на любом компакте, не содержащем точек a_k.

Доказательство. В доказательстве теоремы символ s писать не будем.

На основании неравенства Коши для коэффициентов ряда можем записать $\ln|b_{\eta_n}| \leq \ln M(f, r_n) - \eta_n \ln r_n$. Следовательно, выражение (16) не превосходит

$$(1/n)[\ln M(f, r_n) - \eta_n \ln r_n + n(R_n)\ln R_n - N(R_n)].$$

Воспользовавшись условиями теоремы (17), заключаем, что выражение под знаком предела в (15) не превосходит правой части равенства

$$\frac{1}{n}[c_n n(R_n) - \eta_n \ln r_n + n(R_n)\ln R_n] = \frac{n(R_n)}{n}\left[c_n - \frac{\eta_n}{n(R_n)}\ln r_n + \ln R_n\right].$$

Поскольку $\frac{\eta_n}{n(R_n)} = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(R_n)}{n} = \chi$, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n(R_n)}{n}\left[c_n - \frac{\eta_n}{n(R_n)}\ln r_n + \ln R_n\right] = \chi \varlimsup_{n\to\infty}\left[c_n - \ln\frac{1}{\theta_n}\right] < 0.$$

Отсюда следует, что неравенства (10) выполняются, значит, рассматриваемый интерполяционный процесс сходится. Теорема доказана.

Теорема 7 улучшает результаты из [13] в случае $B_s = 0$ в том смысле, что классы сходимости, указанные в работе [13] при $B_s = 0$, уже, чем в теореме 7, поскольку при $\theta_s(r) = \theta_n^{(s)}$ и любом $\varepsilon > 0$

$$n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr)\left[\ln\frac{1 - \theta_s(r)}{\theta_s(r)} - \varepsilon\right] < c_n n_s\bigl(R_n^{(s)}\bigr) + N\bigl(R_n^{(s)}\bigr).$$

В [7] при узлах, обладающих вышеуказанными свойствами 1–5, сформулирована теорема 1 (см. [7, теорема 1]), и в [14] (см. [14, теорема 2.6.1.]) она доказывается.

Теорема 1 [7]. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, имеющая лишь конечное число особых точек $a_1, a_2, \dots, a_p$ на всей комплексной плоскости z с максимумом модуля:*

$$M_\nu(f; r^\nu) = \max_{|z-a_v| \geq r^{(\nu)}} |f(z)|$$

в окрестности каждой особой точки.

Далее, пусть числа $a_1, a_2, \dots, a_p$ и лишь эти числа являются предельными точками множества чисел x_n $(n = 1, 2, \dots)$, которое разбивается на p подпоследовательностей $\{x_m^{(\nu)}\}$ $(\nu = 1, 2, \dots, p)$, сходящихся соответственно к числам a_ν $(\nu = 1, 2, \dots, p)$.

Наконец, пусть $n_\nu(r^\nu)$ означает количество чисел последовательности $\{x_m^{(\nu)}\}$, находящихся вне круга $|z - a_\nu| \leq r^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \dots, p)$.

Тогда интерполяционный процесс типа Ньютона рациональных функций $r_n(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ в каждой конечной области $G(|z - a_\nu| \geq \eta > 0, |z| \leq \rho)$, если выполняются неравенства

$$\ln M_\nu(f; \theta r^{(\nu)}) \leq c(\theta) n_\nu(r^{(\nu)}), \tag{18}$$

где $c(\theta) < \ln \frac{1-\theta}{\theta}$, $0 < \theta < 1/2$, $\nu = 1, 2, \dots, p$.

Взаимосвязь кратностей плюсов дробей (1) в точках a_k и количества связанных с этой точкой узлов интерполяции, а также отношение их к общему числу узлов интерполяции существенно влияют на класс сходимости функций [10]. Однако в теореме 1 из [7], как и в теореме 2.6.1 из [14], упущены требования на отношения $m_n^{(\nu)}$ и $\lambda_n^{(\nu)}$ к общему числу узлов интерполяции и разности $\lambda_n^{(\nu)} - m_n^{(\nu)}$. Лишь в доказательстве теоремы 2.6.1 в [14] из равенства (6.3) следует, что $\lambda_n^{(\nu)} = m_n^{(\nu)}$.

Условие $m_n^{(\nu)} \to \infty$ не обеспечивает сходимости интерполяционного процесса в теореме 1 из [7] на любом компакте G, не содержащем точек a_ν.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = e^{1/z} + 1/(z-5)$. Она имеет две особые точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 5$ с максимумом модуля (в обозначениях теоремы 1 из [7], цитированной выше):

$$M_1(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = e^{1/r} + 1/(5-r), \quad M_2(f; r) = \max_{|z-5|=r} |f(z)| = e^{1/(5-r)} + 1/r$$

соответственно.

Будем интерполировать $f(z)$ с помощью дробей

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \tag{19}$$

где $Q_n(z) = z^{m_n^{(1)}}(z-5)^{m_n^{(2)}}$, $m_n^{(\nu)}$ — целые неотрицательные числа, узлы $\{x_j\}$, x_j, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, обладают свойствами:

1. $x_0 = -1$.

2. Пусть j_1 — какое-либо натуральное число. Рассмотрим множество натуральных чисел j таких, что $\lfloor \ln \sqrt[3]{j} \rfloor = j_1$, $[x]$ — целая часть числа x. Наименьшее из чисел j, удовлетворяющих этому равенству, обозначим через $j(j_1)$. Узлы $\{x_j\}$ с номерами $j(j_1)$, $j_1 = 1, 2, \dots$, образуют подпоследовательность $\{x_{j_1}^{(n)}\}$, $j_1 = 1, 2, \dots, [\ln \sqrt[3]{n}] = m_n^{(1)}$, $x_{j_1}^{(n)} = 4/j_1$.

3. Остальные узлы являются членами подпоследовательности $\{x_{j_2}^{(n)}\}$, $j_2 = 1, 2, \ldots, n - [\ln \sqrt[3]{n}] = m_n^{(2)}$, причем $x_{j_2}^{(n)} = 5 + 1/j_2$, $P_n(z)$ — многочлен степени n.

Для такой матрицы узлов интерполяции $\{x_j\}$ можем записать

$$\prod_{j=0}^{n}(z - x_j) = (z+1)\prod_{\nu=0}^{2} v_{n,\nu}(z), \quad v_{n,\nu}(z) = \prod_{j_\nu=0}^{m_n^{(\nu)}}\bigl(z - x_{j_\nu}^{(n)}\bigr).$$

Функция $f(z)$, последовательность (19), узлы интерполяции, полюсы интерполяционных дробей и их кратности удовлетворяют всем требованиям теоремы 1 из [7].

Покажем, что оба неравенства (18) выполняются.

Пусть $r < 1$, $\theta = 1/4$. При $\nu = 1$ имеем $\ln(1-\theta)/\theta = \ln 3$, $n_1(r) \geq [4/r] - 1$, причем равенство достигается, если $4/r$ — целое число. Имеем далее

$$\begin{aligned}\ln M_1(f; r/4) &= \ln(\exp\{4/r\} + 4/(20-r))\\ &= (4/r) + \ln(1 + 4/(20-r)\exp\{-4/r\}) < 4/r + 4/(20-r)\exp\{-4/r\},\end{aligned}$$

откуда заключаем, что если выполняется неравенство

$$(4/r) + 4/(20-r)\exp\{-4/r\} \leq \ln 3([4/r] - 1), \tag{20}$$

то выполняется и (18) при $\nu = 1$.

Так как $[4/r] > (4/r) - 1$ и $\ln 3 = 1{,}0986\ldots$, из неравенства

$$4/(20-r)\exp\{-4/r\} < 0{,}0986 \cdot 4/r - 1{,}0986 \cdot 2$$

следует неравенство (20). Последнее соотношение имеет место при всех $r \leq 1/6$, поскольку $24/119 \cdot \exp\{-24\} < 8 \cdot 10^{-12} < 2{,}3664 - 2{,}1972 = 0{,}1692$. Пусть $\theta = 1/4$. Если $\nu = 2$, то в этом случае $n_2(r) \geq [1/r] - 1$, неравенство (18) можно записать так:

$$\ln M_2(f; r/4) = \ln(4/r + \exp\{4/(20-r)\}) \leq \ln 3([1/r] - 1), \tag{21}$$

оно при всех $r \leq 1/6$ также выполняется.

Действительно, для средней части неравенства (21) имеем

$$\ln(4/r) + \ln(1 + (r/4)\exp\{4/(20-r)\}) < \ln(4/r) + (r/4)\exp\{4/(20-r)\}.$$

Отсюда ясно, что если выполняется неравенство

$$\ln 3([1/r] - 1) - \ln(4/r) - (r/4)\exp\{4/(20-r)\} \geq 0, \tag{22}$$

то выполняется и (21). Поскольку $[1/r] > (1/r) - 1$, из неравенства

$$(1/r)\ln 3 - 2\ln 3 - \ln(4/r) - (r/4)\exp\{4/(20-r)\} \geq 0$$

следует (22). В силу того, что $(r/4)\exp\{4/(20-r)\}$ возрастает, а $1/r \cdot \ln 3 - \ln(4/r)$ убывает, можем записать при $r \in (0, (1/6)]$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r} - 2\right)\ln 3 - \ln\frac{4}{r} - \frac{r}{4}\exp\left\{\frac{4}{20-r}\right\}\\ &\qquad\qquad \geq 4\ln 3 - \ln 24 - \frac{1}{24}\exp\left\{\frac{24}{119}\right\} \approx 1{,}165 > 0,\end{aligned}$$

откуда следует справедливость неравенства (21).

Таким образом, неравенства (18) в окрестностях точек $z_1 = 0$ и $z_2 = 5$ выполняются, следовательно, все условия теоремы 1 из [7] справедливы.

Рассмотрим теперь остаточный член интерполяционного процесса. Так как функция $f(z)$ аналитическая в бесконечно удаленной точке, а количество узлов на единицу больше степени знаменателя дроби (19), остаточный член интерполяции можно представить в виде суммы

$$r_n(z) = \frac{\omega_n(z)}{2\pi i}\left[\int\limits_{\Gamma_1^{(n)}} \frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)} + \int\limits_{\Gamma_2^{(n)}} \frac{f(t)\,dt}{\omega_n(t)(t-z)}\right], \tag{23}$$

где $\omega_n(z) = (z+1)\prod\limits_{\nu=1}^{2} v_{n,\nu}(z)[Q_n(z)]^{-1}$, для $z \in \overline{D}$, определяемых неравенствами $|z| \le 1/d$, $|z| \ge d$, $|z-5| \ge d$, здесь d может быть как угодно малым,

$$\Gamma_1^{(n)} : |t| = r_n^{(1)} < \min\left(d, \frac{4}{m_n^{(1)}}\right), \quad \Gamma_2^{(n)} : |t-5| = r_n^{(2)} < \min\left(d, \frac{1}{m_n^{(2)}}\right)$$

и оба контура обходятся в отрицательном направлении.

Поскольку у функции $f(z)$ в точке $z_2 = 5$ полюс кратности единица и при $m_n^{(2)} \ge 1$ второй интеграл в остаточном члене (23) равен нулю, можем записать

$$r_n(z) = \frac{\omega_n(z)}{2\pi i}\left[\int\limits_{\Gamma_1^{(n)}} \frac{e^{1/t}\,dt}{\omega_n(t)(t-z)} + \int\limits_{\Gamma_1^{(n)}} \frac{dt}{(t-5)\omega_n(t)(t-z)}\right].$$

Так как во втором интеграле последнего равенства подынтегральная функция аналитическая внутри контура $\Gamma_1^{(n)}$ и на нем, этот интеграл также равен нулю.

Итак,

$$|r_n(z)| = \left|\frac{\omega_n(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1^{(n)}} \frac{\sum\limits_{\eta=0}^{\infty} \frac{1}{\eta! t^\eta}\cdot t^{m_n^{(1)}}(t-5)^{m_n^{(2)}}\,dt}{(t+1)\prod\limits_{\nu=1}^{2} v_{n,\nu}(t)(t-z)}\right|.$$

Для оценки интеграла воспользуемся равенством (3) и получим

$$|r_n(z)| = \left|(z+1)\prod_{\nu=1}^{2}\frac{v_n(z)}{v_n(0)}\cdot\frac{(-5)^{m_n^{(2)}}\alpha_n(z)}{(z-5)^{m_n^{(2)}} z^{m_n^{(1)}}(m_n^{(1)}+1)!}\right|$$
$$= |z+1|\left(\prod_{j_1=1}^{m_n^{(1)}}\left|1-\frac{4}{zj_1}\right|\frac{m_n^{(1)}!}{4^{m_n^{(1)}}(m_n^{(1)}+1)!}\right)\cdot\prod_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\left|\frac{5\cdot(z-(5+(1/j_2)))}{(5+(1/j_2))(z-5)}\right|\cdot|\alpha_n(z)|.$$

Пусть $z = x \in [a,b]$, где $a > 4$, $b < 5$. Тогда будем иметь

$$\ln\prod_{j_1=1}^{m_n^{(1)}}\left|1-\frac{4}{zj_1}\right| = \sum_{j_1=1}^{m_n^{(1)}}\ln\left(1-\frac{4}{xj_1}\right) = \sum_{j_1=1}^{3}\ln\left(1-\frac{4}{xj_1}\right)$$
$$+\sum_{j_1=4}^{m_n^{(1)}}\ln\left(1-\frac{4}{xj_1}\right) > c_1 + m_n^{(1)}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) > c_1 + m_n^{(1)}\ln\frac{3}{4},$$

где $c_1 = 3\ln|1-(4/a)|$. Далее, заметим, что

$$\left|\frac{5\cdot(z-(5+(1/j_1)))}{(5+(1/j_2))(z-5)}\right| = \left|1+\frac{x/j_2}{25-5x+(5-x)/j_2}\right| > 1+\frac{x/j_2}{6(5-x)}.$$

Используя это соотношение, в силу неравенств

$$\sum_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\frac{1}{j_2^2} < 2, \quad \frac{4}{6} < \frac{x}{6(5-x)} = \frac{b}{6(5-b)}, \quad \sum_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\frac{1}{j_2} > \ln m_n^{(2)}$$

(см. [11, гл. II, с. 108]) получим

$$\ln\prod_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\left|\frac{5(z-(5+(1/j_2)))}{(5+(1/j_2))(z-5)}\right|$$
$$> \sum_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\ln\left(1+\frac{x/j_2}{6(5-x)}\right) > \sum_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\left[\frac{x/j_2}{6(5-x)}-\frac{1}{2}\left(\frac{x/j_2}{6(5-x)}\right)^2\right]$$
$$= \frac{x}{6(5-x)}\sum_{j_2=1}^{m_n^{(2)}}\frac{1}{j_2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6(5-x)}\right)^2\sum_{j=1}^{m_n^{(2)}}\frac{1}{j_2^2} > \frac{4}{6}\ln m_n^{(2)}-c_2, \quad c_2 = \left(\frac{b}{6(5-b)}\right)^2.$$

Стало быть, на отрезке $[a,b]\subset(4,5)$ имеет место неравенство

$$\ln|r_n(z)| > m_n^{(1)}\ln(3/4)+c_1-m_n^{(1)}\ln 4-\ln\big(m_n^{(1)}+1\big)+(4/6)\ln m_n^{(2)}-c_2+\ln|\alpha_n(z)|,$$

где $|\alpha_n(z)|\to 1$ равномерно на $[a,b]$ при $n\to\infty$. Последнее неравенство запишем так:

$$\ln|r_n(z)| > m_n^{(1)}\ln(3/16)+(4/6)\ln m_n^{(2)}-\ln m_n^{(1)}+c, \quad c = c_1-c_2+o(1).$$

Поскольку $m_n^{(1)} = [\ln\sqrt[3]{n}] \le (1/3)\ln n$, $m_n^{(2)} \ge n-(1/3)\ln n$, окончательно получим

$$\ln|r_n(z)| > \frac{1}{3}\ln n\cdot(-1,674)+\frac{2}{3}\ln\left(n-\frac{1}{3}\ln n\right)-\ln\left(\frac{1}{3}\ln n\right)+c$$
$$= \left(\frac{2}{3}-\frac{1,674}{3}\right)\ln n-\ln\ln n+(c+0(1)).$$

Правая часть последнего неравенства неограниченно возрастает при $n\to\infty$. Отсюда следует, что рассматриваемый интерполяционный процесс расходится на $[a,b]\subset(4,5)$.

Из приведенного примера заключаем, что если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m_n^{(\nu)}}{n} = 0$, то в теореме 1 из [7] нельзя гарантировать сходимости процесса на любом компакте, не содержащем точек a_ν. Следовательно, теорема 1 из [7] и следствия из нее (см. также теорему 2.6.1 из [14] и следствия из нее), сформулированные без условий на разности $m_n^{(\nu)}-\lambda_n^{(\nu)}$ и отношения кратностей полюсов дробей $m_n^{(\nu)}$ в точках a_k и связанных с этой точкой количества узлов $\lambda_n^{(\nu)}$ к общему числу узлов интерполяции, неверны.

Следствие 6. *Если матрица узлов интерполяции* $\left\{z_j^{(n)}\right\}$ *принадлежит* $\bigcup\limits_1^1 a$, $a=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lambda_n^{(0)}}{n}=0$ *и целая функция* $f(z)$ *при всех* $n>N$ *удовлетворяет неравенству* $\ln M(f,r_n)-N(R_n)<c_n n(R_n)$, *где* $n(R_n)$ — *функция плотности узлов интерполяции в окрестности бесконечно удаленной точки,* $R_n=u_{n,\lambda_n}$, $N(R_n)$ — *функция Неванлинна,* $r_n=R_n[\theta_n]^{-1}$, $0<\theta_n<1/2$, *и* $0<\lim\limits_{n\to\infty}c_n<\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln(\theta_n)^{-1}$, *то последовательность полиномов* $P_{n-1}(z)$, *построенная для функции* $f(z)$ *по узлам* $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, *равномерно сходится на любом компакте.*

Справедливость следствия вытекает из теоремы 7, в частности из условий равномерной сходимости (17) при $s=p+1=1$.

Следствие 6 обобщает теорему 1 из [15] и условие сходимости 8 из [16] на случай треугольной матрицы узлов интерполяции, при этом узлы могут иметь предельные точки, отличные от бесконечно удаленной. Кроме того, следствие 6 улучшает достаточные условия сходимости, указанные в теореме 1 из [15] и в [16–18].

Дело в том, что оценка остаточного члена интерполяционных процессов в указанных работах проведена с помощью замены матрицы узлов $\{z_j\}$, где $|z_j|\le|z_{j+1}|$, матрицей $\left\{z_j^{(n)}\right\}$, где $\left\{z_j^{(n)}\right\}=\left\{z_n^{(n)}\right\}$, $j=1,2,\dots,n$, а в теореме 7 и следствии 6 такой замены при оценке $r_{n-1}(z)$ не проводилось. Следовательно, на основании замечания 2 можем утверждать, что классы сходимости, указанные в следствии 6, шире, чем в упомянутых работах.

В самом деле, например, в теореме 1 из [15] указаны условия

$$\ln M(r)<\lambda n(\theta r),\quad 0<\lambda<\ln\frac{1-\theta}{\theta},\ 0<\theta<\frac{1}{2},\tag{24}$$

где $n(\theta r)$ — функция плотности узлов интерполяции, $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, достаточные для равномерной сходимости интерполяционных полиномов к интерполируемой функции на любом компакте, а в следствии 6

$$\ln M(f,r_n)<c_n n(\theta_n r_n)+N(R_n),$$

где $0<\theta_n<\frac{1}{2}$, $0<\lim\limits_{n\to\infty}c_n<\varliminf\limits_{n\to\infty}\ln\frac{1}{\theta_n}$.

В силу того, что при $\lambda\le c_n$ имеет место неравенство $\lambda n(\theta_n r_n)<c_n n(\theta_n r_n)+N(R_n)$, убеждаемся, что класс сходимости в теореме 1 из [15] является подклассом класса равномерной сходимости на любом компакте, указанном в следствии 6.

Достаточные условия сходимости из [16–18] легко преобразуются к условиям (24), в частности в [17] получены достаточные условия равномерной сходимости при узлах $x_n=\ln^s n$:

$$|f(z)|<\exp\{(1-\varepsilon)\ln(\alpha-1)e^{(|z|/\alpha)^{1/s}}\},\tag{25}$$

где $\alpha>2,\varepsilon>0$. Полагая $|z|=r$, $\alpha=1/\theta$, $\lambda=(1-\varepsilon)\ln(\alpha-1)<\ln[(1-\theta)/\theta]$, учитывая, что при заданных узлах функция плотности $n(r)$ равна $[\exp\{r^{1/s}\}]$, где $[x]$ — целая часть числа x, и прологарифмировав (25), получим условия (24). Отсюда следует, что класс сходимости, указанный в следствии 6, шире, чем в [17].

Условия равномерной сходимости на любом компакте

$$M(f,z)<\exp\{\theta n(r/\alpha)\ln(\alpha-1)\},\quad 0<\theta<1,\ \alpha>2,$$

где $|z_j| < |z_{j+1}|$, и $M(|z|) < \exp\{h \ln(d-1) \exp_s(|z|/d)\}$, где $0 < h < 1$, $d > 2$, при узлах $z_n = \ln_s(I+n)$, $\ln_s(I+n) = \ln[\ln_{s-1}(I+n)]$, где $I > 0$ таково, что $\ln_s(I+1) \geq 0$, $\exp_s\{|z|/d\} = \exp[\exp_{s-1}\{|z|/d\}]$, полученные в [16, 18], соответственно также преобразуются к условию (24).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

2. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954.

3. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1967.

4. *Липчинский А. Г.* Условия сходимости интерполяционных дробей при узлах, отделенных от особых точек функции // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 822–832.

5. *Липчинский А. Г.* Об интерполировании функций с конечным числом предельных точек полюсов // Респ. сб. тр. (мат. анализ и теория функций). 1974. № 3. С. 229–235.

6. *Гончаров В. Л.* Об интерполировании функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. № 2. С. 171–189.

7. *Ибрагимов И. И.* Интерполирование функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 6. С. 1314–1316.

8. *Де Брейн Н. Г.* Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. М.: Наука, 1968. Т. 2.

10. *Липчинский А. Г.* Об интерполировании аналитических функций рациональными дробями // Тр. Центр ЗОН. Объединения мат. кафедр (функцион. анализ и теория функций). Калинин, 1971. № 2. С. 85–94.

11. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. М.: Гостехиздат, 1956. Т. 1.

13. *Липчинский А. Г.* О сходимости интерполяционных рациональных дробей // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 4. С. 815–823.

14. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971.

15. *Ибрагимов И. И., Келдыш М. В.* Об интерполировании целых функций // Мат. сб. 1947. Т. 20. С. 283–292.

16. *Дворкин Б. С.* Интерполяционная проблема Ньютона для целой функции со специальными узлами интерполяции // Тр. Ставропольского педагогич. ин-та. 1958. № 10. С. 67–75.

17. *Дворкин Б. С.* О разложении целой функции комплексного переменного в сходящийся ряд Ньютона // Мат. сб. 1943. Т. 12, № 3. С. 377–380.

18. *Дворкин Б. С.* Об одном случае разложения целой функции комплексного переменного в сходящийся ряд Ньютона // Тр. Ставропольского педагогич. ин-та. 1953. № 8. С. 145–153.

Статья поступила 12 апреля 2011 г.

Липчинский Александр Григорьевич
Ишимский гос. педагогический институт им. П. П. Ершова,
ул. Ленина, 1, Ишим 627750 Тюменской обл.
igpi@ishim.ru