Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 512.542

НОВАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТОЙ ГРУППЫ $A_1(p^n)$

Л. Ли, Г. Чень

Аннотация. Доказано, что простая группа $A_1(p^n)$ однозначно определяется множеством порядков максимальных абелевых подгрупп группы $A_1(p^n)$.

Ключевые слова: простая группа, максимальная абелева подгруппа, порядковая компонента.

Пусть G — конечная группа и $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка. Обозначим граф простых чисел группы G через $\Gamma(G)$, число компонент графа простых чисел группы G — через $t(\Gamma(G))$, множества вершин компонент графа простых чисел группы G — через $\pi_i(G)$ $(1 \leq i \leq t(\Gamma(G)))$, и множество порядков максимальных абелевых подгрупп группы G — через $M(G)$.

Как было установлено в ряде работ, некоторые простые группы однозначно определяются множеством порядков их максимальных абелевых подгрупп. Например, в [1] доказано, что если G — одна из групп $Sz(2^{2m+1})$, A_n $(n \leq 10)$ или является K_3-группой, M-группой или J-группой, то G однозначно задается множеством порядков своих максимальных абелевых подгрупп. В [2] доказано, что любая знакопеременная группа, граф простых чисел которой имеет три компоненты связности, однозначно задается множеством порядков своих максимальных абелевых подгрупп, а в [3] показано, что подобным свойством обладает и любая спорадическая простая группа. В настоящей работе мы продолжаем исследования в данном направлении и показываем, что простая группа $A_1(p^n)$ однозначно определяется множеством порядков своих максимальных абелевых подгрупп.

Лемма 1 [1]. *Пусть G, A — конечные группы. Если $M(G) = M(A)$, то $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq t(\Gamma(G))\} = \{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq t(\Gamma(A))\}$. В частности, $\pi(G) = \pi(A)$.*

Лемма 2. *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *G — группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса;*

(б) *в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что H и G/K являются π_1-группами, H нильпотентна, K/H — неабелева простая группа и $|G/K| \mid |\operatorname{Aut}(K/H)|$.*

This work was supported by NSFC (Grant N 11171364, 11001226); Graduate-Innovation Funds of SWU (ky2009013). Guiyun Chen is the corresponding author.

Лемма 3 [4]. *Пусть G — конечная группа и N — неабелева простая группа. Если $t(\Gamma(G)) \geq 2$, $M(G) = M(N)$ и в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что H, G/K являются π_1-группами, а K/H — неабелева простая группа, то выполнены следующие утверждения:*

(1) *нечетные компоненты группы N совпадают с некоторыми нечетными компонентами группы K/H и, более того, $t(\Gamma(K/H)) \geq t(\Gamma(G))$;*

(2) *если $H = 1$, то $G/K \leq \mathrm{Out}(K)$.*

Лемма 4 [4]. *Пусть G — конечная группа, $t(\Gamma(G)) \geq 2$ и $N \trianglelefteq G$. Если N является π_1-группой и $a_1, a_2, \dots, a_r$ — нечетные порядковые компоненты группы G, то $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r$ делит $|N| - 1$.*

Теорема 5. *Пусть G — конечная группа. Если $M(G) = M(A_1(p^n))$, то $G \cong A_1(p^n)$, где p — простое число и $p^n > 3$.*

Доказательство. Пусть $T = A_1(p^n)$, $p^n > 3$. Если $p = 2$, то заключение теоремы следует из [1]. Таким образом, можно считать, что $p > 3$.

Из табл. 1 по лемме 1 заключаем, что $\pi_1(G) = \pi(p^n \pm 1)$, $\pi_2(G) = \{p\}$, $\pi_3(G) = \pi((p^n \mp 1)/2)$. Следовательно, $t(G) = 3$, и по лемме 2 в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что H и G/K — π_1-группы, H нильпотентна и K/H — неабелева простая группа.

Шаг 1. Покажем, что $H = 1$.

Пусть $H \neq 1$ и M — силовская подгруппа группы H. Группа H нильпотентна, поэтому $1 \neq Z(M) \operatorname{char} H$, и так как $H \trianglelefteq G$, получаем, что $Z(M) \trianglelefteq G$. С одной стороны, $(p^n(p^n \mp 1)/2) \mid |Z(M)| - 1$ по лемме 4, поэтому $|Z(M)| \geq (p^{2n} \mp p^n + 2)/2$. С другой стороны, в силу включения $\pi(H) \subseteq \pi_1(G)$, равенства $M(G) = M(T)$ и табл. 2 выполнено неравенство $|Z(M)| \leq p^n \pm 1$. Значит, $p^n \pm 1 \geq (p^{2n} \mp p^n + 2)/2$, что невозможно. Таким образом, $H = 1$.

Шаг 2. Покажем, что $K = A_1(p^n)$, $p^n > 3$.

Поскольку $H = 1$, из леммы 3 и равенства $t(\Gamma(G)) = 3$ следует, что $t(\Gamma(K)) \geq 3$ и что нечетные порядковые компоненты группы T совпадают с некоторыми порядковыми компонентами группы K. Далее мы рассматриваем различные возможности для группы K, следуя табл. 1–3.

Случай 1. Покажем, что K не может быть изоморфна группе $E_8(p')$.

Если $K \cong E_8(p')$, $p' \equiv 0, 1, 4 (\operatorname{mod} 5)$, то множества нечетных порядковых компонент групп K и T — это множества $\{p'^8 + p'^7 - p'^5 - p'^4 - p'^3 + p' + 1,\ p'^8 - p'^4 + 1,\ p'^8 - p'^6 + p'^4 - p'^2 + 1,\ p'^8 - p'^7 + p'^5 - p'^4 + p'^3 - p' + 1\}$ и $\{p^n, (p^n \mp 1)/2\}$ соответственно. Получаем следующую систему уравнений:

$p^n = p'^8 + p'^7 - p'^5 - p'^4 - p'^3 + p' + 1$, $p'^8 - p'^4 + 1$ или $p'^8 - p'^6 + p'^4 - p'^2 + 1$;

$(p^n \mp 1)/2 = p'^8 - p'^4 + 1$, $p'^8 - p'^6 + p'^4 - p'^2 + 1$ или $p'^8 - p'^7 + p'^5 - p'^4 + p'^3 - p' + 1$.

Но эта система не имеет решений; противоречие. Рассуждая подобным образом, можно также показать, что $K \ncong E_8(p')$, $p' \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 5)$.

Случай 2. Группа K не может быть изоморфна спорадической простой группе.

Подслучай 1. Утверждение верно, если $4 \mid p^n + 1$.

При данном условии множество нечетных порядковых компонент группы T равно $\{p^n, (p^n - 1)/2\}$.

Если $K \cong M_{11}$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{11, 5\}$, откуда следует, что $p^n = 11$. Из равенств $|T| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ и $M(G) =$

Таблица 1. Простые группы лиева типа G
с условием $t(\Gamma(G)) \geq 3$ и их порядковые компоненты

Группа	orcmp1	orcmp2	orcmp3	orcmp4
$A_1(q),\ 4 \mid q+1$	$q+1$	q	$(q-1)/2$	
$A_1(q),\ 4 \mid q-1$	$q-1$	q	$(q+1)/2$	
$A_1(q),\ 2 \mid q$	q	$q+1$	$q-1$	
A_p, $p, p-2$ простые	$3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (p-3)(p-1)$	p	$p-2$	
$G_2(3^m)$	$3^{6m}(3^{2m}-1)^2$	$3^{2m}+3^m+1$	$3^{2m}-3^m+1$	
${}^2G_2(p)$, $p=3^{2m+1}$	$p^3(p^2-1)$	$p+(3p)^{1/2}+1$	$p-(3p)^{1/2}+1$	
${}^2D_p(3)$, $p=2^n+1$, $n \geq 2$	$3^{p(p-1)}(3^{p-1}-1)\cdot \prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1)$	$(3^p+1)/4$	$(3^{p-1}+1)/2$	
${}^2D_{p+1}(2)$, $p=2^n-1, n \geq 2$	$2^{p(p+1)}(2^p-1)\cdot \prod_{i=1}^{p-1}(2^{2i}-1)$	$2^{p+1}+1$	2^p+1	
$F_4(p),\ 2 \mid p$	$p^{24}(p^6-1)^2(p^4-1)^2$	p^4+1	p^4-p^2+1	
${}^2F_4(p)$, $p=2^{2m+1}$, $m \geq 1$	$p^{12}(p-1)(p^2+1)\cdot (p^3+1)(p^4-1)$	$p^2+(2p^3)^{1/2}+ p+(2p)^{1/2}+1$	$p^2-(2p^3)^{1/2}+ p-(2p)^{1/2}+1$	
$E_7(2)$	$2^{63}\cdot 3^{11}\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 43$	127	73	
$E_7(3)$	$2^{23}\cdot 3^{63}\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13^3\cdot 19\cdot 37\cdot 41\cdot 61\cdot 73\cdot 547$	1093	757	
${}^2A_5(2)$	$2^{15}\cdot 3^9\cdot 5$	7	11	
${}^2B_2(p),\ p=2^{2m+1}$	p^2	$p+(2p)^{\frac{1}{2}}+1$	$p-1$	$p-(2p)^{\frac{1}{2}}+1$
$A_2(4)$	2^6	9	7	5
${}^2E_6(2)$	$2^{36}\cdot 3^9\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11$	19	17	13

$M(T)$ заключаем, что $9 \nmid |G|$. Однако $9 \mid |K|$; противоречие. Аналогичные рассуждения показывают, что $K \ncong M_{23}$, M_{24} и Co_2.

Если $K \cong M_{22}$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{11, 7, 5\}$. Получаем уравнение $p^n = 11$ или $p^n = 7$. Если $p^n = 11$, то $9 \nmid |G|$, так как $|T| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ и $M(G) = M(T)$. Но $9 \mid |K|$; противоречие. Если же $p^n = 7$, то $(p^n-1)/2 = 3 \notin \{11, 7, 5\}$; противоречие.

Если $K \cong F'_{24}$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{29, 23, 17\}$. Значит, p^n равно 29 или 23. По условию $4 \mid p^n + 1$, поэтому $p^n = 23$. Но в этом случае $(p^n-1)/2 = 11 \notin \{29, 23, 17\}$; противоречие. Используя аналогичные рассуждения, мы можем показать, что K не изоморфна ни одной из оставшихся спорадических простых групп.

Подслучай 2. Утверждение выполнено, если $4 \mid p^n - 1$.

При этом условии множество нечетных порядковых компонент группы T равно $\{p^n, (p^n+1)/2\}$.

Поскольку нечетные порядковые компоненты группы T совпадают с некоторыми порядковыми компонентами группы K и $4 \mid p^n - 1$, группа K изоморфна F'_{24}, J_4, Suz или Ly.

Если $K \cong F'_{24}$, тогда множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{29, 23, 17\}$. Значит, p^n равно 29 или 23. Но $4 \mid p^n - 1$, поэтому $p^n = 29$. Следовательно, $(p^n+1)/2 = 15 \notin \{29, 23, 17\}$; противоречие. По аналогичным соображениям $K \ncong J_4$, Suz и Ly.

Таблица 2. Спорадические простые группы G с условием $t(\Gamma(G)) \geq 3$ и их порядковые компоненты

J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$	19	17			
HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3$	11	7			
Suz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7$	13	11			
F_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	23	17			
B	$2^{41} \cdot 3^{31} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	47	31			
Th	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$	31	19			
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2$	11	5			
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	23	11			
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2$	11	7	5		
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	19	11	7		
J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3$	43	37	31	29	23
ON	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3$	31	19	11		
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$	67	37	31		
F'_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13$	29	23	17		
M	$2^{46} \cdot 3^{30} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 47$	71	59	41		
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	23	11			
CO_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$	23	11			

Таблица 3. Порядковые компоненты группы $E_8(p)$

Группа	$E_8(p),\ p \equiv 0, 1, 4 (\operatorname{mod} 5)$
orcmp1	$p^{120}(p^{18}-1)(p^{14}-1)(p^{12}-1)^2(p^{10}-1)^2(p^8-1)^2(p^4+p^2+1)$
orcmp2	$p^8+p^7-p^5-p^4-p^3+p+1$
orcmp3	p^8-p^4+1
orcmp4	$p^8-p^6+p^4-p^2+1$
orcmp5	$p^8-p^7+p^5-p^4+p^3-p+1$
Группа	$E_8(p),\ p \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 5)$
orcmp1	$p^{120}(p^{20}-1)(p^{18}-1)(p^{14}-1)^2(p^{12}-1)(p^{10}-1)(p^8-1)(p^4+1)(p^4+p^2+1)$
orcmp2	$p^8+p^7-p^5-p^4-p^3+p+1$
orcmp3	p^8-p^4+1
orcmp4	$p^8-p^7+p^5-p^4+p^3-p+1$

Случай 3. Группа K не может быть изоморфна ни одной простой группе лиева типа, кроме группы T.

Подслучай 1. Утверждение выполнено, если $4 \mid p^n+1$.

Множество нечетных порядковых компонент группы T равно $\{p^n, (p^n-1)/2\}$.

Поскольку нечетные порядковые компоненты группы T совпадают с некоторыми порядковыми компонентами группы K и $4 \mid p^n+1$, сразу получаем, что $K \not\cong E_7(3)$, ${}^2F_4(p')$, $p' = 2^{2m+1}$, $F_4(p')$, $2 \mid p'$, ${}^2D_{p+1}(2)$, $p = 2^n-1$, $n \geq 2$ и $A_1(p'^m)$, $4 \nmid p'^m+1$.

Если $K \cong A_2(4)$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{9, 7, 5\}$. Получаем, что p^n равно 9 или 7. По условию $4 \mid p^n + 1$, поэтому $p^n = 7$, откуда следует, что $(p^n - 1)/2 = 3 \notin \{9, 7, 5\}$; противоречие. Рассуждая подобным образом, можно показать, что $K \ncong^2 E_6(2)$, ${}^2B_2(p')$, $p' = 2^{2m+1}$, ${}^2A_5(2)$ и $E_7(2)$.

Если $K \cong {}^2D_{p'}(3)$, $p' = 2^n + 1$, $n \geq 2$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{(3^p + 1)/4,\ (3^{p-1} + 1)/2\}$. Получаем систему уравнений

$$p^n = (3^p + 1)/4, \quad (p^n - 1)/2 = (3^{p-1} + 1)/2.$$

Легко видеть, что эта система не имеет решений; противоречие. Используя подобные рассуждения, так же доказываем, что $K \ncong A_{p'}$, где p', $p' - 2$ — простые числа.

Если $K \cong^2 G_2(p')$, $p' = 3^{2m+1}$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{p' + (3p')^{1/2} + 1,\ p' - (3p')^{1/2} + 1$. Получаем систему уравнений

$$p^n = (3^{p'} + 1)/4, \quad (p^n - 1)/2 = (3^{p'-1} + 1)/2.$$

Легко видеть, что эта система не имеет решений; противоречие. По тем же соображениям $K \ncong G_2(3^m)$.

Подслучай 2. Утверждение верно, если $4 \mid p^n - 1$.

Множество нечетных порядковых компонент T равно $\{p^n, (p^n + 1)/2\}$.

Поскольку нечетные порядковые компоненты группы T совпадают с некоторыми порядковыми компонентами группы K и $4 \mid p^n - 1$, заключаем, что $K \ncong^2 A_5(2)$ и $A_1(p'^m)$, $4 \nmid p'^m - 1$.

Если $K \cong {}^2D_{p'+1}(2)$, $p' = 2^n - 1$, $n \geq 2$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{2^{p'+1} + 1, 2^{p'} + 1\}$. Значит, $p^n = 2^{p'+1} + 1$. Следовательно, $p^n - 1 = 2^{p'+1}$, откуда вытекает, что $|\pi_1(T)| = 1$. Но $|\pi_1(K)| \geq 2$; противоречие.

Если $K \cong {}^2B_2(p')$, $p' = 2^m + 1$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{p' + (2p')^{1/2} + 1, p' - 1, p' - (2p')^{1/2} + 1\}$. Получаем, что $p^n = p' + (2p')^{1/2} + 1$ или $p' - 1$; $(p^n + 1)/2 = p' - 1$ или $p' - (2p')^{1/2} + 1$.

По условию $4 \mid p^n - 1$, поэтому $p^n = p' + (2p')^{1/2} + 1$. Значит, $(p^n + 1)/2 = p'/2 + (2p')^{1/2}/2 = 2^{2m} + 2^m \notin \{p' - 1, p' - (2p')^{1/2} + 1\}$; противоречие. Аналогичным образом можно показать, что $K \ncong E_7(3)$, ${}^2E_6(2), E_7(2)$ и ${}^2A_2(4)$.

Если $K \cong {}^2F_4(p')$, $p' = 2^{2m} + 1$, $m \geq 1$, то множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{p'^2 + (2p'^3)^{1/2} + p' + (2p')^{1/2} + 1,\ p'^2 - (2p'^3)^{1/2} + p' - (2p')^{1/2} + 1\}$. Получаем систему уравнений

$$p^n = p'^2 + (2p'^3)^{1/2} + p' + (2p')^{1/2} + 1,$$

$$(p^n + 1)/2 = p'^2 - (2p'^3)^{1/2} + p' - (2p')^{1/2} + 1.$$

Можно показать, что эта система не имеет решений; противоречие. Используя подобные рассуждения, проверяем, что $K \ncong F_4(p')$, $2 \mid p'$, ${}^2D_{p'}(3)$, $p' = 2^n + 1$, $n \geq 2$ и ${}^2G_2(p')$, $p' = 3^{2m+1}$.

Если $K \cong A_{p'}$, то p' и $p' - 2$ — простые числа.

Поскольку $A_1(5) \cong A_5$, можно считать, что $p' \geq 7$. В силу того, что множество нечетных порядковых компонент группы K равно $\{p',\ p' - 2\}$, получаем систему уравнений $p^n = p'$ и $(p^n + 1)/2 = p' - 2$. Эта система имеет решение $p^n = p' = 5$; противоречие.

Шаг 3. Докажем, что $G \cong A_1(p^n)$.

Из условия $C_G(K) = 1$ следует, что $K \trianglelefteq G \trianglelefteq \mathrm{Aut}(K)$. Поскольку $K \cong A_1(p^n)$, каждый элемент группы $\mathrm{Out}(K)$ — это произведение полевого автоморфизма, порядок которого делит n, и диагонального автоморфизма, порядок которого делит 2. Так как любой полевой автоморфизм ρ централизует элементы группы $A_1(p)$ и $\{2,\ p\} \subseteq \pi(A_1(p))$, число $|\rho|$ соединено с 2 и p, а это противоречит тому, что $p \in \pi_2(A_1(p^n))$. Поскольку порядок диагонального автоморфизма группы $A_1(p^n)$ равен 2, если некоторый диагональный автоморфизм $\varphi \neq 1$ действует на G, то нормализатор силовской p-подгруппы K в K имеет порядок $p^n(p^n-1)$ и, значит, G содержит элемент порядка $p^n - 1$; противоречие. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wang L. H.* Characterization of some classes of finite simple groups. Thesis for master of science. Southwest China Normal Univ., 2000.
2. *Чень Г.* Характеризация знакопеременных групп с помощью множества порядков их максимальных абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 718–720.
3. *Хань Ч., Чэнь Г., Го С.* Характеризационная теорема для спорадических групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1430–1440.
4. *Chen G. Y.* A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3. P. 49–58.

Статья поступила 5 ноября 2009 г., окончательный вариант — 21 сентября 2011 г.

Li Lili (Ли Лили)
Mathematics and Computer Science College,
Zhanjiang Normal University,
524048 Zhanjiang, China
hljsys1982@126.com

Chen Guiyun (Чень Гуйюнь)
School of Mathematics and Statistics,
Southwest University,
400715 Chongqing, China
gychen1963@163.com