

## О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ $\mathbb{P}$ -СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

А. Ф. Васильев,  
Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов

**Аннотация.** Подгруппа  $H$  конечной группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , если  $H$  либо совпадает с группой  $G$ , либо ее можно соединить с группой  $G$  цепью подгрупп с простыми индексами. Если любая силовская подгруппа группы  $G$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , то  $G$  называется  $w$ -сверхразрешимой группой. Получены свойства  $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп и свойства групп, которые являются произведением двух своих  $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп, в частности, своих  $\mathbb{P}$ -субнормальных  $w$ -сверхразрешимых подгрупп.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа,  $w$ -сверхразрешимая группа, произведение подгрупп.

### 1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Строение группы, факторизуемой двумя циклическими подгруппами, приведено в [1, гл. 6, § 10]. Продолжая данные исследования, Л. С. Казарин [2] начал изучение строения группы  $G$ , представимой в виде  $G = X_1 X_2 \dots X_n$ , где  $X_i$  — циклическая группа для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $X_i(X_1 X_2 \dots X_{i-1}) = (X_1 X_2 \dots X_{i-1})X_i$  для всех  $i > 1$ . Он нашел все неабелевы композиционные факторы группы  $G$ , обладающей рядом подгрупп  $1 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = G$ , где  $|X_i : X_{i-1}|$  — простое число для всех  $i = 1, \dots, n$ . Отметим, что данная цепь начинается с единичной подгруппы  $X_0$ . В связи с этим в [3] введено следующее естественное

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$  (обозначается через  $H \mathbb{P}\text{-sn } G$ ), если либо  $H = G$ , либо существует цепь подгрупп  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$  такая, что  $|H_i : H_{i-1}|$  — простое число для любого  $i = 1, \dots, n$ .

Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является  $\mathbb{P}$ -субнормальной. Поскольку строение силовских подгрупп группы  $G$  и их вложение в данную группу в значительной мере определяет структуру группы  $G$ , естественно в качестве системы подгрупп рассматривать множество всех ее силовских подгрупп. Для изучения данной ситуации в [3] введено

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Группа  $G$  называется *расширенно сверхразрешимой* (кратко  $w$ -сверхразрешимой), если любая силовская подгруппа группы  $G$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ .

Класс  $w$ -сверхразрешимых групп обозначается через  $w\mathcal{U}$ . Заметим, что класс  $\mathcal{U}$  всех сверхразрешимых групп содержится в  $w\mathcal{U}$ . В [3] приведен пример,

показывающий, что обратное включение неверно. Как правило, произведение двух групп из заданного класса не является группой из этого же класса. В частности, хорошо известно, что произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп не всегда является сверхразрешимой группой. Бэр в [4] доказал сверхразрешимость группы  $G$  в случае, когда  $G$  есть произведение двух нормальных сверхразрешимых подгрупп и имеет нильпотентный коммутант. В [5, гл. 4, теорема 3.4] показано, что если группа  $G$  является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп взаимно простых индексов, то  $G$  сверхразрешима. Во многих работах, в частности в [6–10], ослабление понятий нормальности и сверхразрешимости позволило получить некоторые аналогичные результаты. В силу соотношений между классами  $\mathfrak{U}$  и  $w\mathfrak{U}$  естественно рассмотреть аналогичные факторизационные задачи в более широком классе  $w\mathfrak{U}$ . Данная работа является продолжением исследований, начатых авторами в [3]. В ней изучаются свойства групп, представимых в виде произведения  $\mathbb{P}$ -субнормальных  $w$ -сверхразрешимых подгрупп. Следствием полученных теорем является ряд хорошо известных результатов о факторизациях сверхразрешимыми подгруппами.

## 2. Предварительные результаты

Используются стандартные обозначения и терминология, при необходимости см. [11, 12]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через  $|G|$  обозначается порядок группы  $G$ ;  $\pi(G)$  — множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ ;  $\text{Core}_G(M)$  — ядро подгруппы  $M$  в  $G$ , т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с  $M$  в  $G$ ;  $O_p(G)$  — наибольшая нормальная  $p$ -подгруппа группы  $G$  для некоторого простого числа  $p$ ;  $F(G)$  — подгруппа Фиттинга группы  $G$ , т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы  $G$ , и  $F_p(G)$  —  $p$ -нильпотентный радикал группы  $G$ , т. е. произведение всех нормальных  $p$ -нильпотентных подгрупп группы  $G$ .

Группа  $G$  порядка  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$  ( $p_i$  — простое число,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) называется *дисперсивной по Оре* [11, с. 251], если  $p_1 > p_2 > \dots > p_n$  и  $G$  имеет нормальную подгруппу порядка  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$  для любого  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Используются следующие обозначения:  $\mathfrak{S}$  — класс всех разрешимых групп;  $\mathfrak{U}$  — класс всех сверхразрешимых групп;  $\mathfrak{A}(p-1)$  — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей  $p-1$ .

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из  $\mathfrak{F}$  также принадлежит  $\mathfrak{F}$ ; 2) из  $H/A \in \mathfrak{F}$ ,  $H/B \in \mathfrak{F}$  следует, что  $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$ .

Формация  $\mathfrak{F}$  называется: 1) *наследственной*, если  $\mathfrak{F}$  вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы; 2) *насыщенной*, если из  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$  следует, что  $G \in \mathfrak{F}$ .

Всякая функция  $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется *локальным экраном*. Формация  $\mathfrak{F}$  называется *локальной*, если существует локальный экран  $f$  такой, что  $\mathfrak{F}$  совпадает с классом групп  $(G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для любого } p \in \pi(G))$ .

По теореме Гашпоца — Любезедер — Шмида формация насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Пусть  $\mathfrak{F}$  — непустая формация. Через  $G^{\mathfrak{F}}$  обозначается  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , для которой  $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ .

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$\mathfrak{F}$ -субнормальной* в  $G$  [11, 13], если либо  $H = G$ , либо существует цепь подгрупп  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$

такая, что  $H_{i-1}$  максимальна в  $H_i$  и  $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

Отметим следующие свойства  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

**Лемма 2.1** [13, лемма 6.1.7]. Пусть  $\mathfrak{F}$  — наследственная формация и  $G$  — группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $H$  —  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в  $G$ ,  $K$  — подгруппа из  $G$ , то  $(H \cap K)$  —  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в  $K$ ;

2) если  $H_1$  и  $H_2$  —  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы в  $G$ , то  $(H_1 \cap H_2)$  —  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в  $G$ .

### 3. Свойства $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп

В данном разделе приведены основные свойства  $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп.

**Лемма 3.1.** Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ ,  $N \trianglelefteq G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ , то  $(H \cap N)$   $\mathbb{P}$ -sn  $N$  и  $HN/N$   $\mathbb{P}$ -sn  $G/N$ ;

2) если  $N \subseteq H$  и  $H/N$   $\mathbb{P}$ -sn  $G/N$ , то  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ;

3) если  $HN_i$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ,  $N_i \trianglelefteq G$ ,  $i = 1, 2$ , то  $(HN_1 \cap HN_2)$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ;

4) если  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $K$  и  $K$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ , то  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ;

5) если  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ , то  $H^x$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$  для любого  $x \in G$ ;

6) если  $G^{\mathfrak{M}} \subseteq H$ , то  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Ввиду  $\mathbb{P}$ -субнормальности  $H$  в  $G$  можно считать, что  $H \cap N \neq N$  и  $HN/N \neq G/N$ . В  $G$  найдется цепь подгрупп  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$  такая, что  $|H_i : H_{i-1}|$  — простое число для любого  $i = 1, \dots, n$ . Так как  $H \cap N \neq N$ , то  $H_j \cap N \neq H_{j-1} \cap N$  для некоторого  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Тогда  $|H_j \cap N : H_{j-1} \cap N| = |(H_j \cap N)H_{j-1} : H_{j-1}|$ . Из  $H_{j-1} \subseteq (H_j \cap N)H_{j-1} \subseteq H_j$  и максимальности  $H_{j-1}$  в  $H_j$  заключаем, что  $(H_j \cap N)H_{j-1} = H_j$  и  $|H_j \cap N : H_{j-1} \cap N| = |H_j : H_{j-1}|$  — простое число. Отбрасывая из цепи  $H \cap N = H_0 \cap N \subseteq H_1 \cap N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \cap N \subseteq H_n \cap N = N$  повторения, получим для  $H \cap N$  в  $G$  цепь подгрупп с простыми индексами. Значит,  $(H \cap N)$   $\mathbb{P}$ -sn  $N$ .

Заметим, что  $H_k N/N \neq H_{k-1} N/N$  для некоторого  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Тогда  $|H_k N/N : H_{k-1} N/N| = |H_k : H_{k-1}| \cdot |(H_k \cap N)H_{k-1} : H_{k-1}| \neq 1$ . Отсюда и из того, что  $H_{k-1} \subseteq (H_k \cap N)H_{k-1} \subseteq H_k$  и  $|H_k : H_{k-1}|$  — простое число, следует, что  $(H_k \cap N)H_{k-1} = H_{k-1}$  и  $|H_k N/N : H_{k-1} N/N|$  — простое число. Отбрасывая из цепи  $HN/N = H_0 N/N \subseteq H_1 N/N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} N/N \subseteq H_n N/N = G/N$  повторения, получим для  $HN/N$  в  $G/N$  цепь подгрупп с простыми индексами. Таким образом,  $HN/N$   $\mathbb{P}$ -sn  $G/N$ .

Утверждение 2 следует из того, что если существует цепь подгрупп  $H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \dots \subset H_{m-1}/N \subset H_m/N = G/N$  с простыми индексами  $|H_i/N : H_{i-1}/N|$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{m-1} \subset H_m = G$  является цепью подгрупп с  $|H_i : H_{i-1}| = |H_i/N : H_{i-1}/N|$ .

3. Пусть  $HN_i$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ,  $N_i \trianglelefteq G$ ,  $i = 1, 2$ . Если существует  $i \in \{1, 2\}$  такое, что  $HN_i = G$ , то  $HN_{3-i} \cap HN_i = HN_{3-i}$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ .

Пусть  $HN_1 \neq G \neq HN_2$ . Так как  $HN_1$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ , существует цепь подгрупп  $HN_1 = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{t-1} \subset K_t = G$  с простыми индексами  $|K_j : K_{j-1}|$ ,  $j = 1, \dots, t$ .

Если  $HN_1 \cap HN_2 = HN_2$ , то  $(HN_1 \cap HN_2)$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ .

Допустим, что  $HN_1 \cap HN_2 \neq HN_2$ . Тогда найдется такое  $j \in \{1, \dots, t\}$ , что  $K_j \cap HN_2 \neq K_{j-1} \cap HN_2$ . Так как  $K_{j-1} \subseteq (K_j \cap HN_2)K_{j-1} \subseteq K_j$  и  $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = (K_j \cap N_2)K_{j-1}$  — подгруппа в  $K_j$ , то  $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = K_j$ .

Поэтому  $|K_j \cap HN_2 : K_{j-1} \cap HN_2| = |(K_j \cap HN_2)K_{j-1} : K_{j-1}|$  — простое число. Отбрасывая в цепи  $HN_1 \cap HN_2 = K_0 \cap HN_2 \subseteq K_1 \cap HN_2 \subseteq \dots \subseteq K_{t-1} \cap HN_2 \subseteq K_t \cap HN_2 = HN_2$  повторения и учитывая  $\mathbb{P}$ -субнормальность  $HN_2$  в  $G$ , получим для  $HN_1 \cap HN_2$  в  $G$  цепь подгрупп с простыми индексами. Значит,  $HN_1 \cap HN_2$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ .

Утверждения 4 и 5 прямо следуют из определения  $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы, утверждение 6 справедливо ввиду утверждения 2. Лемма доказана.

Из свойств силовских подгрупп и леммы 3.1 получается

**Лемма 3.2.** Пусть силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппой в  $G$  и  $N \triangleleft G$ . Тогда силовская  $p$ -подгруппа группы  $N$  и силовская  $p$ -подгруппа группы  $G/N$  являются  $\mathbb{P}$ -субнормальными подгруппами в  $N$  и  $G/N$  соответственно.

В [11, замечание, с. 93] отмечено, что если  $G^M \subseteq M$  для максимальной подгруппы  $M$  группы  $G$ , то  $|G : M|$  — простое число. Обратно, если  $|G : M| = p$  — простое число и  $M$  не покрывает абелев главный фактор  $H/K$  группы  $G$ , то  $|H/K| = p$  и  $G^M \subseteq M$ .

Отсюда следует, что всякая  $\mathfrak{U}$ -субнормальная в группе  $G$  подгруппа является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ . В общем случае обратное не выполняется. Например, в знакопеременной группе степени 5 подгруппа, изоморфная знакопеременной группе степени 4,  $\mathbb{P}$ -субнормальна, но не  $\mathfrak{U}$ -субнормальна в группе. Однако для разрешимой группы из определения  $\mathfrak{U}$ -субнормальной подгруппы и отмеченного замечания из [11] получается

**Лемма 3.3.** Пусть  $G$  — разрешимая группа. Подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathfrak{U}$ -субнормальной в  $G$  тогда и только тогда, когда  $H$   $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ .

Применение лемм 2.1 и 3.3 дает следующие свойства  $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп.

**Лемма 3.4.** Пусть  $G$  — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $H$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ,  $K$  — подгруппа из  $G$ , то  $(H \cap K)$   $\mathbb{P}$ -sn  $K$ ;
- 2) если  $H_i$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ ,  $i = 1, 2$ , то  $(H_1 \cap H_2)$   $\mathbb{P}$ -sn  $G$ .

Нам потребуются следующие свойства  $w$ -сверхразрешимых групп, полученные в [3].

**Теорема 3.5** [3, теорема 2.3]. Любая  $w$ -сверхразрешимая группа разрешима.

**Теорема 3.6** [3, теорема 2.6]. Класс  $w\mathfrak{U}$  является наследственной насыщенной формацией.

**Теорема 3.7** [3, предложение 2.8]. Любая  $w$ -сверхразрешимая группа является дисперсивной по Оре.

Обозначим через  $\text{Syl}(G)$  множество всех силовских подгрупп группы  $G$ .

**Теорема 3.8** [3, теорема 2.10]. Формация  $w\mathfrak{U}$  является локальной и имеет локальный экран  $f$  такой, что  $f(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$  для любого простого  $p$ .

**Теорема 3.9** [3, теорема 2.11]. Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда она метанильпотентна и  $w$ -сверхразрешима.

#### 4. Произведения $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп

**Лемма 4.1.** Пусть группа  $G = AB$  — произведение подгрупп  $A$  и  $B$ . Если существуют цепи подгрупп

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G,$$

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$$

с простыми индексами  $|A_i : A_{i-1}|$ ,  $|B_j : B_{j-1}|$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то  $(A_{i-1} \cap B)$   $\mathbb{P}$ -sn  $A_{i-1}$  и  $(B_{j-1} \cap A)$   $\mathbb{P}$ -sn  $B_{j-1}$  для любого  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для тех  $k \in \{1, \dots, m\}$ , для которых  $A_{i-1} \cap B_{k-1} \neq A_{i-1} \cap B_k$ , выполняются равенства  $|A_{i-1} \cap B_k : A_{i-1} \cap B_{k-1}| = |(A_{i-1} \cap B_k) B_{k-1} : B_{k-1}| = |B_k : B_{k-1}|$ . Поэтому, отбросив в цепи подгрупп  $A_{i-1} \cap B = A_{i-1} \cap B_0 \subseteq A_{i-1} \cap B_1 \subseteq \dots \subseteq A_{i-1} \cap B_{m-1} \subseteq A_{i-1} \cap B_m = A_{i-1}$  повторения, получаем для  $A_{i-1} \cap B$  в  $A_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , цепь подгрупп с простыми индексами. Аналогичные рассуждения проводим для  $B_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Лемма доказана.

**Теорема 4.2.** Пусть группа  $G = AB$  — произведение разрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если  $A$  и  $B$   $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $G$ , то  $G$  разрешима.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G$  — группа наименьшего порядка такая, что  $G = AB$ ,  $A$  и  $B$  — разрешимые подгруппы,  $A$  и  $B$   $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $G$ , а  $G$  не является разрешимой. В  $G$  найдутся цепи подгрупп  $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G$  и  $B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$  с простыми индексами  $|A_{i+1} : A_i|$ ,  $|B_{j+1} : B_j|$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . По лемме 4.1  $(A_{n-1} \cap B)$   $\mathbb{P}$ -sn  $A_{n-1}$  и  $(B_{m-1} \cap A)$   $\mathbb{P}$ -sn  $B_{m-1}$ . Тогда  $A_{n-1} = A(B \cap A_{n-1})$  — произведение  $\mathbb{P}$ -субнормальных в  $A_{n-1}$  разрешимых подгрупп  $A$  и  $B \cap A_{n-1}$ ,  $B_{m-1} = (B_{m-1} \cap A)B$  — произведение  $\mathbb{P}$ -субнормальных в  $B_{m-1}$  разрешимых подгрупп  $B_{m-1} \cap A$  и  $B$ . Ввиду выбора  $G$  подгруппы  $A_{n-1}$  и  $B_{m-1}$  разрешимы.

Обозначим  $M = A_{n-1}$ ,  $W = B_{m-1}$  и  $D = M \cap W$ . Тогда  $G = MW$ ,  $|G : M| = p$ ,  $|G : W| = q$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа. Так как  $G \notin \mathfrak{S}$ , то  $D \neq 1$ .

Если  $\text{Core}_G(M) \neq 1$ , то  $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{S}$  ввиду выбора  $G$ . Отсюда получаем, что  $G \in \mathfrak{S}$ . Это противоречит выбору  $G$ . Аналогично приходим к противоречию при  $\text{Core}_G(W) \neq 1$ .

Значит,  $\text{Core}_G(M) = \text{Core}_G(W) = 1$ . Тогда, рассматривая представления  $\tau_1$  и  $\tau_2$  группы  $G$  перестановками смежных классов по подгруппам  $M$  и  $W$  соответственно, получим, что  $G/\text{Ker } \tau_1 \simeq G$  изоморфна подгруппе симметрической группы  $S_p$  на  $p$  символах, а  $G/\text{Ker } \tau_2 \simeq G$  изоморфна подгруппе симметрической группы  $S_q$  на  $q$  символах. Так как  $|S_p| = p!$  и  $|S_q| = q!$ , то  $p = q$  — наибольший делитель  $|G|$ . Подгруппа  $D$  является максимальной в  $M$  и  $W$ . По лемме 4.7 из [11]  $\text{Core}_M(D) \subseteq \text{Core}_G(W) = 1$  и  $\text{Core}_W(D) \subseteq \text{Core}_G(M) = 1$ .

Поскольку  $M$  и  $W$  разрешимы, по теореме 15.2 из [12, гл. A]  $M = DN_1$  и  $W = DN_2$ , где  $N_1$  и  $N_2$  — минимальные нормальные подгруппы в  $M$  и  $W$  соответственно,  $N_1 = C_M(N_1)$ ,  $N_2 = C_W(N_2)$ ,  $N_1 \cap D = 1$ ,  $N_2 \cap D = 1$ . Отсюда  $|N_1| = |N_2| = p$ . Тогда из  $M/N_1 \simeq D$  и  $W/N_2 \simeq D$  следует, что  $D$  изоморфна подгруппе из  $Z_{p-1}$ . По теореме 1.7 из [5]  $M$  и  $W$  сверхразрешимы, а значит, дисперсивны по Оре. Поэтому силовская  $p$ -подгруппа  $P_1$  из  $M$  нормальна в  $M$  и силовская  $p$ -подгруппа  $P_2$  из  $W$  нормальна в  $W$ . По лемме 11.6 из [11] силовская  $p$ -подгруппа  $P$  группы  $G$  имеет вид  $P = P_1 P_2$ . Так как  $|M| \leq |MP| \leq |G| = |M|p$ , то  $|P : (P \cap M)| = p$ . Аналогично  $|P : (P \cap W)| = p$ . Отсюда следует, что  $P \cap M$  и  $P \cap W$  — максимальные подгруппы в  $P$  и  $P \cap M = P_1 \trianglelefteq P$ ,  $P \cap W = P_2 \trianglelefteq P$ . Таким образом,  $G = MP \subseteq N_G(P_1)$  и  $G = WP \subseteq N_G(P_2)$ . Это

означает, что  $P_i \trianglelefteq G$ ,  $i = 1, 2$ . Отсюда  $P \trianglelefteq G$ . Из  $G/P \simeq M/M \cap P \in \mathfrak{S}$  следует, что  $G \in \mathfrak{S}$ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

**Лемма 4.3.** Пусть  $G = AB$ , где подгруппы  $A$  и  $B$  дисперсивны по Оре и имеют простые индексы в  $G$ . Тогда  $G$  дисперсивна по Оре.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $G$  — группа наименьшего порядка такая, что  $G = AB$ , подгруппы  $A$  и  $B$  дисперсивны по Оре,  $|G : A|$ ,  $|G : B|$  — простые числа, а  $G$  не дисперсивна по Оре. По теореме 4.2 группа  $G$  разрешима. Пусть  $N$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Из дисперсивности по Оре групп  $A$  и  $B$  и выбора группы  $G$  следует, что  $G/N$  дисперсивна по Оре. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией [11, п. 7, с. 35], то  $N$  — единственная минимальная нормальная подгруппа в  $G$ ,  $N = C_G(N)$ ,  $\Phi(G) = 1$ .

Если  $N \subseteq A \cap B$ , то  $N$  содержится в силовских  $p$ -подгруппах  $P_1$  и  $P_2$  групп  $A$  и  $B$  соответственно,  $p$  — наибольший простой делитель  $|A|$  и  $|B|$ . Тогда  $P = P_1 P_2$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ ,  $p$  — наибольший простой делитель  $|G|$ . Из  $N \subseteq P$  и дисперсивности по Оре  $G/N$  получаем, что  $G$  дисперсивна по Оре. Это противоречит выбору  $G$ .

Пусть  $N \not\subseteq A \cap B$ . Если  $N \not\subseteq A$ , то  $G = AN$  и  $A \cap N = 1$ . Тогда  $|N|$  является простым числом. Из  $N = C_G(N)$  и  $A \simeq G/N$  следует, что  $G$  — сверхразрешимая группа. Получили противоречие с выбором  $G$ . Если  $N \not\subseteq B$ , то  $G = BN$ ,  $B \cap N = 1$  и, рассуждая, как выше, приходим к противоречию с выбором  $G$ . Лемма доказана.

**Теорема 4.4.** Группа  $G$  дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда  $G = AB$ , где подгруппы  $A$  и  $B$  дисперсивны по Оре и  $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** НЕОБХОДИМОСТЬ очевидна.

**ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Пусть  $G$  — группа наименьшего порядка такая, что  $G = AB$ ,  $A$  и  $B$  — дисперсивные по Оре  $\mathbb{P}$ -субнормальные в  $G$  подгруппы, а  $G$  не дисперсивна по Оре. Тогда существуют цепи подгрупп  $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = G$ ,  $B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{m-1} \subset B_m = G$  такие, что  $|A_i : A_{i-1}|$  и  $|B_j : B_{j-1}|$  являются простыми числами для любых  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . По лемме 4.1  $(A_{n-1} \cap B)$   $\mathbb{P}$ -sn  $A_{n-1}$  и  $(B_{m-1} \cap A)$   $\mathbb{P}$ -sn  $B_{m-1}$ .

Так как  $A_{n-1}$  и  $B_{m-1}$  являются произведениями дисперсивных по Оре подгрупп  $A$ ,  $(A_{n-1} \cap B)$  и  $(B_{m-1} \cap A)$ ,  $B$  соответственно, то  $A_{n-1}$  и  $B_{m-1}$  дисперсивны по Оре ввиду выбора  $G$ . Тогда по лемме 4.3 группа  $G = A_{n-1} B_{m-1}$  дисперсивна по Оре. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

В работе [9] введено следующее понятие: подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -вложенной в  $G$ , если либо  $H = G$ , либо любая максимальная цепь подгрупп от  $H$  до  $G$  имеет простые индексы.

**Следствие 4.4.1** [9]. Группа  $G$  дисперсивна по Оре тогда и только тогда, когда она имеет дисперсивные по Оре подгруппы  $A$  и  $B$  такие, что  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  и  $A, B$   $\mathbb{P}$ -вложены в  $G$ .

Согласно [6, 7] группа  $G = AB$  называется *произведением взаимно перестановочных* (взаимно *sn-перестановочных*) подгрупп  $A$  и  $B$ , если  $A$  перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из  $B$ , а  $B$  перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из  $A$ .

Согласно [10] для подгрупп  $A$  и  $B$  группы  $G$  подгруппа  $A$  называется *наследственно  $G$ -перестановочной* с  $B$ , если  $AB^g = B^gA$  для некоторого  $g \in \langle A, B \rangle$ .

**Лемма 4.5.** Пусть  $G = AB$ , где  $A$  — разрешимая подгруппа, а подгруппа  $B$  либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из  $A$ , либо наследственно  $G$ -перестановочна с любой подгруппой из  $A$ . Тогда  $B$   $\mathbb{P}$ -субнормальна в  $G$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Проведем доказательство индукцией по  $|G|$ . Для  $G = 1$  лемма верна. Пусть  $|G| > 1$ . Можно считать, что  $G \neq B$ . В  $A$  найдется субнормальный ряд  $1 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = A$  с простыми индексами  $|A_j : A_{j-1}|$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда из  $B \neq G$  следует, что  $A_{j-1}B \neq A_jB$  для некоторого  $j$ . Выберем наибольшее  $j$ , для которого  $A_{j-1}B \neq A_jB$ , а  $A_jB = G$ . Заметим, что  $A_{j-1} \subseteq (A_j \cap B)A_{j-1} \subseteq A_j$ .

Если  $B$  перестановочна с любой субнормальной подгруппой из  $A$ , то  $A_j \cap A_{j-1}B = (A_j \cap B)A_{j-1}$  — подгруппа группы  $G$ . Предположим, что  $B$  наследственно  $G$ -перестановочна с любой подгруппой из  $A$ . Тогда  $BA_{j-1}^g = A_{j-1}^gB$  для некоторого  $g \in \langle B, A_{j-1} \rangle$ . По тождеству Дедекинда  $\langle B, A_{j-1} \rangle = (\langle B, A_{j-1} \rangle \cap A_j)B$ . Поэтому найдутся  $a \in \langle B, A_{j-1} \rangle \cap A_j$  и  $b \in B$  такие, что  $g = ab$ . Отсюда и из субнормальности  $A_{j-1}$  в  $A_j$  следует, что  $A_{j-1}^gB = A_{j-1}^bB = BA_{j-1}^b$ . Значит,  $(A_{j-1}^bB)^{b^{-1}} = A_{j-1}B$  и  $A_j \cap A_{j-1}B = (A_j \cap B)A_{j-1}$  — подгруппа группы  $G$ .

Теперь из  $1 \neq |A_jB : A_{j-1}B| = |A_j : A_{j-1}| : |(A_j \cap B)A_{j-1} : A_{j-1}|$  заключаем, что  $|A_jB : A_{j-1}B| = |A_j : A_{j-1}|$  — простое число. Так как  $B$  либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из  $A_{j-1}$ , либо наследственно  $(A_{j-1}B)$ -перестановочна с любой подгруппой из  $A_{j-1}$ , по индукции  $B$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $(A_{j-1}B)$ . Следовательно,  $B$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $G$ . Лемма доказана.

Отметим, что если  $A$  и  $B$  — подгруппы  $G$ , то из условия  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  следует  $G = AB$ .

**Теорема 4.6.** Если группа  $G$  имеет  $w$ -сверхразрешимые подгруппы  $A$  и  $B$  такие, что  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  и  $A$  и  $B$   $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $G$ , то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $P$  — силовская подгруппа группы  $G$ . Если  $P^x \subseteq A$  для некоторого  $x \in G$ , то ввиду  $w$ -сверхразрешимости  $A$  получаем, что  $P^x$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $A$ . Из утверждений 4 и 5 леммы 3.1 и  $A$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $G$  заключаем, что  $P$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $G$ . При  $P^x \subseteq B$  аналогичными рассуждениями устанавливаем, что  $P$   $\mathbb{P}$ - $sn$   $G$ . Итак,  $G$  —  $w$ -сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

**Следствие 4.6.1.** Если группа  $G$  имеет сверхразрешимые подгруппы  $A$  и  $B$  такие, что  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  и  $A$  и  $B$   $\mathbb{P}$ -субнормальны в  $G$ , то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

Отсюда с учетом теоремы 3.9 следует теорема 3.4 из [5, гл. 4].  
Ввиду леммы 4.5 получается

**Следствие 4.6.2.** Если группа  $G$  имеет  $w$ -сверхразрешимые (сверхразрешимые) подгруппы  $A$  и  $B$  такие, что  $(|G : A|, |G : B|) = 1$  и  $A$  и  $B$  взаимно  $sn$ -перестановочны (взаимно перестановочны), то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

*Обобщенным коммутантом* группы  $G$  называется наименьшая нормальная подгруппа  $N$  группы  $G$  такая, что  $G/N$  является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

**Теорема 4.7.** Пусть группа  $G = AB$  — произведение  $w$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если  $A$  и  $B$   $\mathbb{F}$ -субнормальны в  $G$  и обобщенный коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

**Доказательство.** Пусть  $G$  — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Ввиду теорем 3.5 и 4.2 группа  $G$  разрешима. Пусть  $N$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Для  $G/N$  все условия теоремы выполняются. Тогда  $G/N$  —  $w$ -сверхразрешимая группа. По теореме 3.6 класс  $w\mathcal{U}$  является насыщенной формацией. Поэтому  $N$  — единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $\Phi(G) = 1$ ,  $N = C_G(N) = F(G)$ ,  $N$  —  $p$ -группа, где  $p$  — некоторое простое число. Тогда  $G = NM$ , где  $M$  — некоторая максимальная подгруппа из  $G$ ,  $N \cap M = 1$ . Подгруппа  $M \simeq G/N$   $w$ -сверхразрешима. Из теорем 3.7 и 4.4 следует, что  $G$  дисперсивна по Оре. Поэтому  $p$  — наибольшее простое число, делящее  $|G|$ .

Если  $p \in \pi(M)$ , то ввиду дисперсивности по Оре группы  $M$  силовская  $p$ -подгруппа из  $M$  является нормальной в  $M$ . С другой стороны,  $O_p(M) = 1$  ввиду леммы 3.9 из [11]; противоречие. Следовательно,  $N$  — силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ .

Рассмотрим  $AN$ . Заметим, что  $AN = AN \cap NM = N(AN \cap M)$ . Так как  $N = C_G(N) = C_{AN}(N)$ , то  $O_{p'}(AN) = 1$  и  $F_p(AN) = N$ . Из того, что  $AN \in w\mathcal{U}$ , по лемме 4.5 из [11] и теореме 3.8 следует, что  $AN/F_p(AN) \simeq AN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ . Аналогично получаем, что  $BN \cap M \in f(p) = (H \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ . Заметим также, что  $M = (AN \cap M)(BN \cap M)$ . Так как по условию обобщенный коммутант группы  $G$  нильпотентен и  $F(G) = N$ ,  $M$  является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Пусть  $q \in \pi(M)$ . По лемме 11.6 из [11] найдутся силовские  $q$ -подгруппы  $Q$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  из  $M$ ,  $AN \cap M$ ,  $BN \cap M$  соответственно такие, что  $Q = Q_1Q_2$ . Из абелевости  $Q$  и  $Q_i \in \mathfrak{A}(p-1)$ ,  $i = 1, 2$ , следует, что  $Q \in \mathfrak{A}(p-1)$ . В силу произвольности выбора  $q \in \pi(M)$  получаем, что  $M \in (H \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ . Так как  $G/N \in w\mathcal{U}$  и  $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in (H \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(H) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ , по лемме 4.5 из [11] следует, что  $G \in w\mathcal{U}$ ; противоречие. Теорема доказана.

Из  $\mathcal{U} \subseteq w\mathcal{U}$  и того, что обобщенный коммутант группы содержится в ее коммутанте, получаются следующие результаты.

**Следствие 4.7.1.** Пусть  $G = AB$  — произведение  $\mathbb{F}$ -субнормальных в  $G$  сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если обобщенный коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

**Следствие 4.7.2.** Пусть  $G = AB$  — произведение  $\mathbb{F}$ -субнормальных в  $G$  сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$  сверхразрешима.

Отсюда вытекает отмеченный выше результат Бэра из [4].

Следующий результат получается из теорем 4.7 и 4.4 с учетом леммы 4.5.

**Следствие 4.7.3** [10]. Пусть  $G = AB$ , где  $A$ ,  $B$  — сверхразрешимые подгруппы группы  $G$  и либо коммутант группы  $G$  нильпотентен, либо  $A$  и  $B$  имеют взаимно простые порядки. Если  $A$  наследственно  $G$ -перестановочна со всякой подгруппой группы  $B$ , а  $B$  наследственно  $G$ -перестановочна со всякой подгруппой группы  $A$ , то группа  $G$  сверхразрешима.

Ввиду теоремы 3.9 получается



**Следствие 4.7.4** [8]. Пусть  $G = AB$  — произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если обобщенный коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$  сверхразрешима.

С учетом леммы 4.5 из теоремы 4.7 вытекают известные результаты.

**Следствие 4.7.5** [7]. Пусть  $G = AB$  — произведение взаимно  $sn$ -перестановочных сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$  сверхразрешима.

**Следствие 4.7.6** [6]. Пусть  $G = AB$  — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если коммутант группы  $G$  нильпотентен, то  $G$  сверхразрешима.

Теоремы 4.6 и 4.7 включают соответственно теоремы 3.2 и 3.1 из [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin: Springer-Verl., 1967. Bd I.
2. Казарин Л. С. О группах с факторизацией // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 26–29.
3. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
4. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. N 1. P. 115–187.
5. Between nilpotent and solvable / M. Weinstein (Editor) Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.
6. Assad M., Shaalan A. On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.
7. Alejandro M., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M. On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.
8. Васильев А. Ф., Васильева Т. И. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Математика. 1997. Т. 426, № 11. С. 10–14.
9. Targonskiy E. A., Skiba A. N. Finite groups with given systems of  $\mathbb{P}$ -embedded subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. V. 36, N 3. P. 74–76.
10. Guo W., Shum K. P., Skiba A. N. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
11. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
12. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
13. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

Статья поступила 4 февраля 2011 г.

Васильев Александр Федорович, Тютянов Валентин Николаевич  
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,  
кафедра алгебры и геометрии,  
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь  
formation56@mail.ru, tyutyuanov@front.ru

Васильева Татьяна Ивановна  
Белорусский гос. университет транспорта,  
кафедра высшей математики,  
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь  
tivasilyeva@mail.ru