Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.956.4

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА ВЕКТОРНОГО ПОРЯДКА

В. А. Литовченко, Е. Б. Настасий

Аннотация. Определен новый класс вырожденных $\overrightarrow{2b}$-параболических систем уравнений типа Колмогорова с коэффициентами, зависящими только от времени; для систем из этого класса построена фундаментальная матрица решений задачи Коши и исследованы ее основные свойства.

Ключевые слова: вырожденная $\overrightarrow{2b}$-параболическая система, матрицант, фундаментальная матрица решений задачи Коши.

Введение. При моделировании броуновского движение физической системы А. Н. Колмогоров пришел к ультрапараболическому уравнению относительно плотности вероятности возможных значений координат системы и их производных по времени [1]. Оказалось, что это уравнение имеет также важное значение при исследовании тепловых и диффузионных процессов с инерцией в однородной среде. Это послужило толчком к зарождению теории вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова, в развитии которой приняло участие много как отечественных, так и зарубежных математиков (см. [2] и приведенную там литературу).

Первой и пока единственной работой, посвященной исследованию систем таких уравнений, является работа [3], в которой изучается вопрос построения и исследования фундаментальной матрицы решений задачи Коши для систем вида

$$(\partial_t - x\partial_y)u_j(t;x,y) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{2b} a_k^{jl}(t)\partial_x^k u_l(t;x,y),$$
$$t \in (0;T], \quad \{x,y\} \subset (-\infty;\infty), \quad j \in \{1,\dots,m\}.$$

Исследование свойств фундаментальной матрицы решений задачи Коши проводится средствами классической теории параболических по Петровскому систем уравнений с частными производными с непрерывными по t и не зависящими от пространственной переменной коэффициентами. Следует отметить, что наличие вырождения параболичности в такой системе приводит к тому, что коэффициенты старших членов соответствующей двойственной по Фурье системы на характеристиках уже не обладают необходимым свойством равномерной непрерывности по t относительно пространственной переменной. Поэтому применение этой методики исследования в случае, когда размерность переменной x больше единицы, сопряжено с существенными затруднениями.

В настоящей статье определен новый класс вырожденных параболических систем уравнений типа Колмогорова векторного порядка, который содержит рассмотренные в [3] системы и охватывает классы вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова высших порядков с коэффициентами, не зависящими от пространственной переменной, определенных в [2]. Для таких систем построена фундаментальная матрица решений задачи Коши и исследованы ее качественные свойства гладкости и поведения в окрестности бесконечно удаленных пространственных точек.

1. Предварительные сведения. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_m := \{1;\dots;m\}$; $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{C}^m$ — соответственно вещественное и комплексное пространства размерности $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{R}_+ := (0;+\infty)$; $\mathbb{Z}_+^m$ — множество всех m-мерных мультииндексов, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — мнимая единица; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{\frac12}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{\frac12}$, если $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1}\dots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1}\dots|z_m|^{l_m}$, если $z := (z_1;\dots;z_m) \in \mathbb{C}^m$, $l := (l_1;\dots;l_m) \in \mathbb{Z}_+^m$; $\vec{\gamma} := (\gamma_1;\dots;\gamma_m)$ — m-мерный вектор, $\vec{0} := (0;\dots;0), \vec{1} := (1;\dots;1)$; запись $\vec{\alpha}\mho\vec{\beta}$, где $\mho$ — некоторое соотношение, означает, что это соотношение выполняется для всех соответствующих координат векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, при этом если $q := (q_1;\dots;q_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\{\vec{\alpha},\vec{\gamma}\} \subset \mathbb{R}^m$, то $q^{q\vec{\gamma}} := q_1^{q_1\gamma_1}\dots q_m^{q_m\gamma_m}$; $|\vec{\alpha}|_+^{\vec{\gamma}} := |\alpha_1|^{\gamma_1} + \dots + |\alpha_m|^{\gamma_m}$, $|\vec{\alpha}|_+ := |\vec{\alpha}|_+^{\vec{1}}$ — скалярные величины (если $\vec{\alpha}$ — мультииндекс или пространственная переменная, то вместо $\vec{\alpha}$ будем писать α). Предположим, что n-мерная пространственная переменная x состоит из n_1-мерной переменной $x_1 := (x_{11};\dots;x_{1n_1})$, n_2-мерной переменной $x_2 := (x_{21};\dots;x_{2n_2})$, n_3-мерной переменной $x_3 := (x_{31};\dots;x_{3n_3})$, т. е. $x := (x_1;x_2;x_3)$, где n_1, n_2 и n_3 — натуральные числа такие, что $n_3 \leq n_2 \leq n_1$ и $n = n_1 + n_2 + n_3$; $n_0 := n - n_1$. В связи с этим мультииндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ будем записывать в виде $k := (k_1;k_2;k_3)$, где $k_j := (k_{j1};\dots;k_{jn_j})$, $j \in \mathbb{N}_3$. Если $x = (x_1;x_2;x_3)$ и $x_j := (x_{j1};\dots;x_{jn_j})$ — точки соответственно из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то $x_j' := (x_{j1};\dots;x_{jn_3})$, $x_j'' := (x_{j(n_3+1)};\dots;x_{jn_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)};\dots;\ x_{1n_1})$, $\hat{x}_1 := (x_{11};\dots;x_{1n_2})$, $\tilde{x} := (x_1''';x_2'';x_3)$, $\check{x} := (x_2';x_2'';x_3)$; эти обозначения будем использовать и для других подобных точек и векторов. Кроме того, обозначим $\Pi_M^m := \{(t;\xi) \mid t \in M,\ \xi \in \mathbb{R}^m\}$, и пусть $\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}) := (t^2\xi_3/2 + ts_3 + s_2'; t\xi_2'' + s_2''; \xi_1''')$, $\rho_0(t;\check{s};\tilde{\xi}) := (\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}); s_3 + t\xi_3; \xi_2''; \xi_3)$ — n_1- и n-мерные вектор-функции соответственно при $t \geq 0$ и $\{s;\xi\} \subset \mathbb{C}^n$.

Зафиксируем произвольно $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$, а также вектор $\overrightarrow{2b} = (2b_1;\dots;2b_{n_1})$ с натуральными координатами и рассмотрим систему уравнений

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right)u(t;x) = \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^n, \quad (1)$$

где $u = \mathrm{col}(u_1;\dots;u_m)$,

$$\mathbb{A}(t;\partial_{x_1}) := \Big(a_{lj}(t;i\partial_{x_1}) := a_0^{lj}(t)\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1} + \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+<1} a_{k_1}^{lj}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1}\Big)_{l,j=1}^m$$

— матричное дифференциальное выражение, коэффициенты $a_0^{lj}(\cdot), a_{k_1}^{lj}(\cdot)$ и a_{k_1} которого суть непрерывные на $[0;T]$ комплекснозначные функции такие, что соответствующее дифференциальное выражение $\partial_t - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$ является параболическим по Эйдельману на множестве $\Pi^{n_1}_{(0;T]}$ (т. е. $\overrightarrow{2b}$-параболическим):

$$(\exists\delta_0>0\,\forall(t;\xi_1)\in\Pi^{n_1}_{[0;T]})\quad \lambda(t;\xi_1):=\max_{j\in\mathbb{N}_m}\operatorname{Re}\lambda_j(t;\xi_1)\le-\delta_0|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}. \tag{2}$$

Здесь λ_j — собственные числа матричного символа

$$\mathscr{A}^0(t;\cdot):=\Big(a^0_{lj}(t;\cdot):=a^{lj}_0(t)\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}(\cdot)^{k_1}\Big)^m_{l,j=1}$$

главной части

$$\mathbb{A}^0(t;\partial_{x_1}):=\Big(a^0_{lj}(t;i\partial_{x_1}):=a^{lj}_0(t)\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1}\Big)^m_{l,j=1}$$

выражения $\mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$.

Для системы (1) в точке $t=\tau$, $\tau\in[0;T)$, зададим начальное условие

$$u(t;\cdot)|_{t=\tau}=\varphi(\cdot) \tag{3}$$

с «пробной» начальной вектор-функцией $\varphi(\cdot)$, компоненты φ_j, $j\in\mathbb{N}_m$, которой являются элементами пространства S Л. Шварца [4].

Системы вида (1) с соответствующим условием параболичности (2) в дальнейшем будем называть *вырожденными $\overrightarrow{2b}$-параболическими системами типа Колмогорова векторного порядка* с коэффициентами, зависящими только от t. Совокупность всех таких систем обозначим через $\mathbb{S}E^t_{\overrightarrow{2b}}$.

Очевидно, что классы $\mathbb{E}^0_{21}-\mathbb{E}^0_{23}$ вырожденных уравнений типа Колмогорова, определенных в [2], содержатся в $\mathbb{S}E^t_{\overrightarrow{2b}}$. Кроме того, каждая вырожденная параболическая система уравнений из [3] является также системой класса $\mathbb{S}E^t_{\overrightarrow{2b}}$.

Определение. *Фундаментальной матрицей решений задачи Коши* (ФМРЗК) для системы (1) назовем функциональную матрицу $G(t,x;\tau,\xi)$ размерности $m\times m$, определенную для всех $(t;x)\in\Pi^n_{(\tau;T]}$, зависящую от параметрической точки $(\tau;\xi)\in\Pi^n_{[0;T)}$, такую, что

1) G как функция аргумента $(t;x)$ является решением системы (1) на $\Pi^n_{(\tau;T]}$, $\tau\in[0;T)$;

2) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\tau+0}G(t,x;\tau,\cdot)=\delta(\cdot-x)E$$

в смысле слабой сходимости в пространстве S' распределений Л. Шварца (здесь E — единичная матрица порядка m, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака).

Задача заключается в построении ФМРЗК для системы (1) и исследовании ее основных свойств.

2. Построение ФМРЗК. Сопоставим задаче Коши (1), (3) соответствующую двойственную по Фурье задачу

$$\left\{\begin{array}{l}\Big(\partial_t+\sum\limits_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum\limits_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\Big)v_1(t;\xi)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{1j}(t;\xi_1)v_j(t;\xi),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Big(\partial_t+\sum\limits_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum\limits_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\Big)v_m(t;\xi)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{mj}(t;\xi_1)v_j(t;\xi),\end{array}\right.\quad (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]}, \tag{4}$$

$$v_j(t;\cdot)|_{t=\tau} = F[\varphi_j](\cdot), \quad j \in \mathbb{N}_m, \tag{5}$$

где $a_{lj}(t;\xi_1)$ — элементы матричного символа $\mathscr{A}(t;\xi_1)$ дифференциального выражения $\mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$, $F[\cdot]$ — прямое преобразование Фурье, а

$$v_j(t;\xi) := F[u_j(t;x)](t;\xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_j(t;x)e^{i(x,\xi)}dx, \quad j \in \mathbb{N}_m.$$

Отметим, что (4) — система с частными производными первого порядка, уравнения которой имеют одинаковые дифференциальные выражения. Поэтому, выписывая согласно методу характеристик для каждого ее уравнения соответствующие дифференциальные уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dt}{1} = \frac{d\xi_{11}}{\xi_{21}} = \dots = \frac{d\xi_{1n_2}}{\xi_{2n_2}} = \frac{d\xi_{21}}{\xi_{31}} = \dots = \frac{d\xi_{2n_3}}{\xi_{3n_3}} = \frac{dv_1}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}(t;\xi_1)v_j}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dt}{1} = \frac{d\xi_{11}}{\xi_{21}} = \dots = \frac{d\xi_{1n_2}}{\xi_{2n_2}} = \frac{d\xi_{21}}{\xi_{31}} = \dots = \frac{d\xi_{2n_3}}{\xi_{3n_3}} = \frac{dv_m}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj}(t;\xi_1)v_j}, \end{cases}$$

которая, как несложно видеть, эквивалентна такой системе:

$$\xi_3 dt = d\xi_2', \quad \xi_2 dt = \widehat{d\xi_1}, \quad \partial_t v = \mathscr{A}(t;\xi_1)v \tag{6}$$

(здесь $v := \mathrm{col}(v_1;\dots;v_m)$).

Решая последовательно первые два уравнения системы (6), найдем

$$\xi_2' = t\xi_3 + s_3, \quad \xi_1' = t^2\xi_3/2 + ts_3 + s_2', \quad \xi_1'' = t\xi_2'' + s_2, \tag{7}$$

где s_2 и s_3 — произвольные постоянные векторы размерности соответственно n_2, n_3. Подставляя в третье уравнение этой системы, а также в начальное условие (5) вместо ξ_1', ξ_1'' и ξ_2' выражения из равенств (7), получим следующую задачу Коши:

$$\partial_t v(t;\check{s};\tilde{\xi}) = \mathscr{A}(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))v(t;\check{s};\tilde{\xi}), \tag{8}$$

$$v(t;\check{s};\tilde{\xi})|_{t=\tau} = F[\varphi](\rho_0(\tau;\check{s};\tilde{\xi})), \tag{9}$$

к решению которой свелось решение исходной задачи (4), (5).

Далее, пусть $\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi}) := \left(\Theta_{\tau,t}^{lj}(\check{s};\tilde{\xi})\right)_{l,j=1}^m$ — матрицант системы (8), т. е. функциональная матрица, которая для всех $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$ и $\{s;\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ является решением системы (8), удовлетворяющим начальному условию

$$\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})|_{t=\tau} = E. \tag{10}$$

Отметим, что непрерывность коэффициентов системы (1) на $[0;T]$ обеспечивает существование такого матрицанта в виде матричного функционального ряда

$$\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi}) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t \int\limits_\tau^{t_1} \cdots \int\limits_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathscr{A}(t_j;\rho(t_j;\check{s};\tilde{\xi})) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1, \tag{11}$$

который при каждых фиксированных $\{s;\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ абсолютно и равномерно по t сходится на каждом отрезке $[a;b] \subset (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$. При этом каждое решение системы (8) имеет вид $v = \Theta_\tau^t C$, где C — соответствующая матрица-столбец с элементами, зависящими только от s и ξ (см., например, [5]).

Таким образом, единственным решением задачи Коши (8), (9) является

$$v(t;\check{s};\tilde{\xi}) = \Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;\check{s};\tilde{\xi})).$$

Теорема 1. *Матричная функция* $\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$ *является решением задачи Коши* (4), (10) *при* $\check{s}=s_{t,\xi}$, *где* $s_{t,\xi}:=(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2;\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3)$.

Доказательство. Поскольку $\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$ — матрицант системы (8), имеем

$$\partial_t\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})=\{\mathscr{A}(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})\}|_{\check{s}=s_{t,\xi}}+\partial_\beta\Theta_\tau^t(s_{\beta,\xi};\tilde{\xi})|_{\beta=t}$$
$$=\mathscr{A}(t;\xi_1)\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})+\partial_\beta\Theta_\tau^t(s_{\beta,\xi};\tilde{\xi})|_{\beta=t}.$$

Поэтому для доказательства того, что $\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ — матричное решение системы (4), достаточно установить выполнение равенства

$$\partial_\beta\Theta_\tau^t(s_{\beta,\xi};\tilde{\xi})|_{\beta=t}=-\left(\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\right)\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi}). \tag{12}$$

Учитывая структуру вектора $s_{t,\xi}$, имеем, во-первых,

$$\partial_\beta\Theta_\tau^t(s_{\beta,\xi};\tilde{\xi})|_{\beta=t}=\partial_\beta\Theta_\tau^t(\xi_1'-\beta\xi_2'+\beta^2\xi_3/2,\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{\beta=t}$$
$$+\partial_\beta\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,\xi_1''-\beta\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{\beta=t}$$
$$+\partial_\beta\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-\beta\xi_3;\tilde{\xi})|_{\beta=t}$$
$$=\sum_{j=1}^{n_3}(\partial_{s_{2j}}\Theta_\tau^t(s_2',\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{s_2'=\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2}(\xi_{1j}-t\xi_{2j}+t^2\xi_{3j}/2)_t')$$
$$+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}(\partial_{s_{2j}}\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,s_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{s_2''=\xi_1''-t\xi_2''}(\xi_{1j}-t\xi_{2j})_t')$$
$$+\sum_{j=1}^{n_3}(\partial_{s_{3j}}\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,\xi_1''-t\xi_2'';s_3;\tilde{\xi})|_{s_3=\xi_2'-t\xi_3}(\xi_{2j}-t\xi_{3j})_t')$$
$$=-\left(\sum_{j=1}^{n_3}(\xi_{2j}-t\xi_{3j})\partial_{s_{2j}}+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{s_{2j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{s_{3j}}\right)\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})|_{\check{s}=s_{t,\xi}},$$

во-вторых,

$$\left(\sum_{j=1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}}\right)\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$$
$$=\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{2j}\partial_{s_{2j}}\Theta_\tau^t(s_2',\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{s_2'=\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2}$$
$$+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{s_{2j}}\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,s_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{s_2''=\xi_1''-t\xi_2''}$$
$$+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}(\partial_{s_{3j}}\Theta_\tau^t(\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2,\xi_1''-t\xi_2'';s_3;\tilde{\xi})|_{s_3=\xi_2'-t\xi_3}$$
$$-t\partial_{s_{2j}}\Theta_\tau^t(s_2',\xi_1''-t\xi_2'';\xi_2'-t\xi_3;\tilde{\xi})|_{s_2'=\xi_1'-t\xi_2'+t^2\xi_3/2})$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{n_3}(\xi_{2j}-t\xi_{3j})\partial_{s_{2j}}+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\xi_{2j}\partial_{s_{2j}}+\sum_{j=1}^{n_3}\xi_{3j}\partial_{s_{3j}}\right)\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})|_{\check{s}=s_{t,\xi}}.$$

Отсюда приходим к выполнению равенства (12) при условии существования производных $\partial_{s_{(l+1)j}}\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$, $j\in\mathbb{N}_{n_{(l+1)}}$, $l\in\mathbb{N}_2$. Однако при каждых фиксированных $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, и $\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^{n_1}$ указанные производные существуют в каждой точке $\check{s}$ пространства $\mathbb{R}^{n_0}$. В этом нетрудно убедиться, исходя из равномерной сходимости на каждом компакте из $\mathbb{R}^{n_0}$ (при фиксированных t, τ и $\tilde{\xi}$) соответствующего матричного ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty}\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\cdots\int_{\tau}^{t_{r-1}}\partial_{s_{(l+1)j}}\left(\prod_{l=1}^{r}\mathscr{A}(t_j;\rho(t_j;\check{s};\tilde{\xi}))\right)dt_r\ldots dt_2dt_1.$$

То, что матрица $\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ удовлетворяет начальному условию (10), становится очевидным, если учесть структуру Θ_τ^t и непрерывность по t коэффициентов системы (4).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Вектор-функция*

$$v(t;\xi)=\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})F[\varphi](\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi})),\quad (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]},$$

является решением задачи Коши (4), (5).

Непосредственно из этого следствия, учитывая равенство $u=F^{-1}[v]$ (здесь F^{-1} — обратное преобразование Фурье), путем формальных преобразований, получим формулу

$$u(t;x)=\int_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,y)\varphi(y)\,dy,\quad (t;x)\in\Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau\in[0;T),\tag{13}$$

в которой

$$G(t,x;\tau,y):=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(y,\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))}e^{-i(x,\xi)}\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\,d\xi,\tag{14}$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,y\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Отметим, что

$$e^{i(y,\rho_0(t;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))}=e^{i(y_1',\xi_1''-(t-\tau)\xi_2''+(t-\tau)^2\xi_3/2)}\\ \times e^{i(y_1'',\xi_1''-(t-\tau)\xi_2'')}e^{i(y_1''',\xi_1''')}e^{i(y_2',\xi_2'-(t-\tau)\xi_3)}e^{i(y_2'',\xi_2'')}e^{i(y_3,\xi_3)}.$$

В следующем пункте будет установлено, что матричная функция (14) является искомой ФМРЗК для системы (1).

3. Свойства ФМРЗК. Приступим к исследованию свойств матрицы G. Для этого прежде всего изучим свойства матрицанта Θ_τ^t.

Сначала рассмотрим простой случай, когда в правой части системы (1) отсутствуют младшие члены, а коэффициенты дифференциального выражения $\mathbb{A}^0(t;\partial_{x_1})$ являются постоянными величинами, т. е. когда

$$\mathscr{A}(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\equiv\mathscr{A}^0(\rho(t;\check{s};\tilde{\xi})).$$

В этом случае матрицант Θ_τ^t соответствующей системы (8) обозначим через $\Theta_{\tau,0}^t$.

Лемма 1. *Существуют положительные постоянные c и δ такие, что для всех $(t;\xi) \in \Pi^n_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$, справедлива оценка*

$$\left|\Theta^t_{\tau,0}(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\right| \le c\, e^{-\delta(t-\tau)(|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}+|(t-\tau)\xi_2|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}}}+|(t-\tau)^2\xi_3|_+^{\overrightarrow{2b}'})}.$$

Доказательство. Отметим, что для матрицанта $\Theta^t_{\tau,0}$ правильным является представление

$$\Theta^t_{\tau,0}(\check{s};\tilde{\xi}) = \exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}, \quad 0 \le \tau < t \le T,\ \{s;\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где

$$\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\} := E + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right)^j.$$

Действительно, учитывая дифференцируемость по t функционального ряда $\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}$, а также равенство

$$\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta = \left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}\int\limits_\tau^t (\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\beta\right)A_0,$$

где A_0 — соответствующий постоянный матричный коэффициент, имеем

$$\begin{aligned}
\partial_t\left(\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}\Big(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\Big)\\
\times\left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}\int\limits_\tau^t (\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\beta\right)^{j-1} A_0^j &= \Big(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}(\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\Big)A_0\\
\times\left(E + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1} a_{k_1}\int\limits_\tau^t (\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\beta\right)^j A_0^j\right)&\\
&= A_0(\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, матричная функция $\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}$ является обычным решением соответствующей системы (8). Что касается начального условия (10), то его выполнение для $\exp\left\{\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\right\}$ становится очевидным исходя из предельного соотношения

$$\lim_{t\to\tau+0}\int\limits_\tau^t \mathscr{A}^0(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta = 0.$$

Учитывая единственность матриканта системы (8), получим равенство (15). Произведя в интеграле из (15) замену переменной интегрирования согласно правилу $t-\beta=\chi(t-\tau)$, имеем

$$\Theta^t_{\tau,0}(\check{s};\tilde{\xi})=\exp\left\{(t-\tau)\int\limits_0^1\mathscr{A}^0(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))\,d\chi\right\},\quad (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau\in[0;T).$$

Отсюда в силу утверждения соответствующей леммы из [6, гл. II, § 6] приходим к оценке

$$\begin{aligned}\left\|\Theta^t_{\tau,0}(\check{s};\tilde{\xi})\right\|_0&\le e^{(t-\tau)\max\limits_{j\in\mathbb{N}_m}\operatorname{Re}\lambda^0_j(\tau,t;\xi)}\\&\times\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\left(2(t-\tau)\left\|\int\limits_0^1\mathscr{A}^0(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))\,d\chi\right\|_0\right)^j\right),\end{aligned}\tag{16}$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма соответствующего оператора в m-мерном пространстве, а λ^0_j — собственные числа матрицы $\int\limits_0^1\mathscr{A}^0(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))\,d\chi$, т. е. корни уравнения

$$\det\left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}\int\limits_0^1(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\chi A_0-\lambda^0E\right)=0,$$

которое при

$$\gamma=\lambda^0\left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}\int\limits_0^1(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\chi\right)^{-1}$$

равносильно следующему уравнению:

$$\det(A_0-\gamma E)=0.\tag{17}$$

Очевидно, что для собственных чисел $\lambda_j(t;\eta)$ матрицы $\mathscr{A}^0(\eta)$ выполняется равенство

$$\lambda_j(t;\eta)=\gamma_j\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}\eta^{k_1},\quad j\in\mathbb{N}_m,$$

где γ_j — корни уравнения (17), из которого при $\eta=\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi})$ получаем

$$\lambda_j(t;\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))=\gamma_j\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}\rho^{k_1}(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}),\quad j\in\mathbb{N}_m,$$

а затем и

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^1\lambda_j(t;\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))\,d\chi\\&\qquad=\gamma_j\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+=1}a_{k_1}\int\limits_0^1(\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}\,d\chi\equiv\lambda^0_j(\tau;t;\xi).\end{aligned}$$

Учитывая условие параболичности (2), имеем

$$\operatorname{Re}\lambda_j^0(\tau,t;\xi)\le-\delta_0\int\limits_0^1\bigl|\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi})\bigr|_+^{\overrightarrow{2b}}\,d\chi,\quad j\in\mathbb{N}_m,\ (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau\in[0;T).\tag{18}$$

Далее, с помощью оценок (16), (18) и

$$\max_{j\in\mathbb{N}_m}\sum_{l=1}^m|a_{lj}|^2\le\bigl\|(a_{lj})^m_{l,j=1}\bigr\|_0^2\le\sum_{l=1}^m\sum_{j=1}^m|a_{lj}|^2$$

(см. [6, гл. II, § 3, (3)]) непосредственно убеждаемся в существовании постоянной $c_0>0$ такой, что для всех $(t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]}$ и $\tau\in[0;T)$

$$\bigl|\Theta^t_{\tau,0}(\check{s};\tilde{\xi})\bigr|\le c_0e^{-\frac{\delta_0}{2}(t-\tau)\int\limits_0^1|\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi})|_+^{\overrightarrow{2b}}\,d\chi}\left(\sum_{j=1}^{m-1}\sup_{z>0}\{z^je^{-z}\}\right)$$
$$=ce^{-\frac{\delta_0}{2}(t-\tau)\int\limits_0^1|\rho(t-\chi(t-\tau);\check{s};\tilde{\xi})|_+^{\overrightarrow{2b}}\,d\chi}.\tag{19}$$

Осталось отметить, что поскольку для $\alpha>0$ и $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in\mathbb{R}$ [2]

$$0<\delta_1\le\int\limits_0^1|\sigma_1-\chi\sigma_2|^{2\alpha}\,d\chi<+\infty,\quad|\sigma_1|+|\sigma_2|=1,$$

$$0<\delta_2\le\int\limits_0^1|\sigma_1-\chi\sigma_2+\chi^2\sigma_3|^{2\alpha}\,d\chi<+\infty,\quad|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|=1,$$

то при $\check{s}=s_{t,\xi}$

$$\int\limits_0^1|\rho(t-\chi(t-\tau);s_{t,\xi};\tilde{\xi})|_+^{\overrightarrow{2b}}\,d\chi$$
$$=\int\limits_0^1\bigl(|\xi_1'-\chi(t-\tau)\xi_2'+\chi^2(t-\tau)^2\xi_3/2|_+^{\overrightarrow{2b}'}+|\xi_1''-\chi(t-\tau)\xi_2''|_+^{\overrightarrow{2b}''}\bigr)\,d\chi+|\xi_1'''|^{\overrightarrow{2b}'''}$$
$$=\sum_{j=1}^{n_3}\Biggl\{(|\xi_{1j}|+(t-\tau)|\xi_{2j}|+(t-\tau)^2|\xi_{3j}|/2)^{2b_j}$$
$$\times\int\limits_0^1\left(\frac{\xi_{1j}-\chi(t-\tau)\xi_{2j}+\chi^2(t-\tau)^2\xi_{3j}/2}{|\xi_{1j}|+(t-\tau)|\xi_{2j}|+(t-\tau)^2|\xi_{3j}|/2}\right)^{2b_j}d\chi\Biggr\}$$
$$+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\left\{(|\xi_{1j}|+(t-\tau)|\xi_{2j}|)^{2b_j}\int\limits_0^1\left(\frac{\xi_{1j}-\chi(t-\tau)\xi_{2j}}{|\xi_{1j}|+(t-\tau)|\xi_{2j}|}\right)^{2b_j}d\chi\right\}+|\xi_1'''|_+^{\overrightarrow{2b}'''}$$
$$\ge\delta\bigl(|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}+|(t-\tau)\xi_2|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}}}+|(t-\tau)^2\xi_3|_+^{\overrightarrow{2b}'}\bigr),\tag{20}$$

где $\delta>0$ — не зависящая от t,τ и ξ константа.

Лемма доказана.

Аналогом леммы 1 в общем случае является

Лемма 2. *Пусть коэффициенты из правой части системы* (4) *непрерывно зависят от* t *на* $[0;T]$. *Тогда для соответствующего ей матриканта* $\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ *выполняется оценка*

$$\left|\Theta_\tau^t(s_{t,\xi};\tilde{\xi})\right| \le ce^{-\delta(t-\tau)(|\xi_1|_+^{\overrightarrow{2b}}+|(t-\tau)\xi_2|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}}}+|(t-\tau)^2\xi_3|_+^{\overrightarrow{2b}'})}, \quad (t;\xi)\in\Pi^n_{(\tau;T]},\ \tau\in[0;T)$$

(*положительные постоянные* c *и* δ *не зависят от* t, τ *и* ξ).

Доказательство. Зафиксируем произвольно t из $(\tau;T]$ и рассмотрим соответствующий промежуток $(\tau;t]$, который точками $\{t_j\}_{j=0}^l$, $t_0=\tau<t_1<\dots<t_l=t$, разобьем на l элементарных частей: $(\tau;t]=\bigcup\limits_{j=1}^{l}(t_{l-1};t_l]$. Тогда [5]

$$\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})=\prod_{j=1}^{l}\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}(\check{s};\tilde{\xi}). \tag{21}$$

Таким образом, оценка Θ_τ^t свелась к оценке $\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}$ на соответствующем элементе разбиения.

Для оценки $\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}$ положим $\tau:=t_{j-1}$, $\varepsilon_j:=t_j-t_{j-1}$; зафиксируем произвольно точку t_* из интервала $(\tau;t_j)$ и приведем систему (8) к виду

$$\partial_t\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})=\mathscr{A}^0(t_*;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})+q(t;\check{s};\tilde{\xi}),\quad t\in(\tau;t_j],\ \{s;\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{22}$$

где $q(t;\check{s};\tilde{\xi}):=(\{\mathscr{A}^0(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))-\mathscr{A}^0(t_*;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi}))\}+\mathscr{A}^1(t;\rho(t;\check{s};\tilde{\xi})))\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})$, $\mathscr{A}^1:=\mathscr{A}-\mathscr{A}^0$.

Решив задачу Коши (22), (10), получим, что

$$\Theta_\tau^t(\check{s};\tilde{\xi})=\Theta_{\tau,0}^t(\check{s};\tilde{\xi})+\int\limits_\tau^t\Theta_{\sigma,0}^t(\check{s};\tilde{\xi})q(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})\,d\sigma,$$

где $\Theta_{\tau,0}^t(\check{s};\tilde{\xi})=\exp\Big\{\int\limits_\tau^t\mathscr{A}^0(t_*;\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))\,d\beta\Big\}$.

Далее, воспользуемся равенством

$$\mathscr{A}(t;\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))=\sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+\le1}(\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi}))^{k_1}A_{k_1}(t),$$

в котором $A_{k_1}(\cdot)$ — соответствующие матричные коэффициенты. Поскольку коэффициенты $A_{k_1}(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[0;T]$, они равномерно непрерывны на этом отрезке. Поэтому, какое бы $t_*\in(\tau;t_j)$ ни выбрали, для каждого $\nu>0$ найдется такое $\varepsilon>0$, не зависящее от t_*, что для всех $\{s;\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\sigma\in[\tau;t_j)$

$$|\mathscr{A}^0(t;\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi}))-\mathscr{A}^0(t_*;\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi}))|\le\nu|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_+^{\overrightarrow{2b}},$$

как только $|t-t|_*<\varepsilon$.

Отметим также, что в $\mathscr{A}^1(t;\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi}))$ входят многочлены относительно $\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})$ степени не выше, чем $\overrightarrow{2b}-\vec{1}$, поэтому для указанного ν существует такое $r_j>0$, что при $|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_+>r_j$ выполняется неравенство

$$|\mathscr{A}^1(t;\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi}))|\le\nu|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_+^{\overrightarrow{2b}}.$$

Учитывая все это, а также оценку (19), приходим к оценке

$$\exp\left\{\delta\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}\left|\Theta_{\tau}^{t}(\check{s};\tilde{\xi})\right|$$
$$\leq c+2cm\nu\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\exp\left\{\delta\int\limits_{\tau}^{\sigma}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}\left|\Theta_{\tau}^{\sigma}(\check{s};\tilde{\xi})\right|d\sigma,\ \ \delta=\delta_0/2.$$

Согласно лемме 2 из [7, гл. IX, § 2] получаем, что

$$\left|\Theta_{\tau}^{t}(\check{s};\tilde{\xi})\right|\leq c\exp\left\{-\delta\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}\left(1+2cm\nu\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\right.$$
$$\left.\times\exp\left\{2cm\nu\int\limits_{\sigma}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}d\sigma\right)\leq c\exp\left\{-\delta\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}$$
$$\times\left(1+\exp\left\{4cm\nu\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}\right).$$

Положим теперь $\nu := \delta/(8\,c\,m)$ и предположим, что ε_j не превышает ε (соответствующее ν). Тогда

$$\left|\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}(\check{s};\tilde{\xi})\right|\leq 2c\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\},\quad j\in\mathbb{N}_l. \tag{23}$$

Оценка (23) получена в предположении, что $|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}>r_j$, $\sigma\in[t_{j-1};t_j]$. Если $|\rho(\sigma;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}<r_j$, то согласно равенству (11)

$$\left|\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}(\check{s};\tilde{\xi})\right|\leq c_{0j}\leq c_{0j}e^{\frac{\delta}{2}\varepsilon_j r_j^{|\overrightarrow{2b}|_{+}}}\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}.$$

Следовательно, существуют положительные постоянные δ, $c_0:=\max\limits_{j\in\mathbb{N}_l}\{c_{0j};2c\}$ и $r:=\max\limits_{j\in\mathbb{N}_l}\{r_j^{|\overrightarrow{2b}|_{+}}\}$ такие, что для всех $j\in\mathbb{N}_l$ и $\{s;\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\left|\Theta_{t_{j-1}}^{t_j}(\check{s};\tilde{\xi})\right|\leq c_0\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\left(\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta+r\varepsilon_j\right)\right\},$$

из которого, а также из (21) получаем

$$\left|\Theta_{\tau}^{t}(\check{s};\tilde{\xi})\right|\leq c_t\exp\left\{-\frac{\delta}{2}\int\limits_{\tau}^{t}|\rho(\beta;\check{s};\tilde{\xi})|_{+}^{\overrightarrow{2b}}\,d\beta\right\}, \tag{24}$$

$$c_t:=(mc_0)^l e^{\frac{\delta}{2}r(t-\tau)},\quad 0\leq\tau<t\leq T,\ \{s;\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Если положить $\check{s}=s_{t,\xi}$ и учесть неравенство (20), а также существование конечного разбиения отрезка $[0;T]$ с элементами подходящей длины ε_j (что, в свою очередь, гарантирует существование конечного $\sup\limits_{t\in[0;T]}\{c_t\}$), то из (24) придем к утверждению леммы 2.

Лемма доказана.

Рассмотрим матричную функцию $\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)$, полагая ее равной $\Theta^t_\tau(s_{t,\xi};\tilde{\xi})$ при $\xi = \left(\frac{z_{11}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b_1}}},\ldots,\frac{z_{1n_1}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b_{n_1}}}};\frac{z_{21}}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b_1}}},\ldots,\frac{z_{2n_2}}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2b_{n_2}}}};\frac{z_{31}}{(t-\tau)^{2+\frac{1}{2b_1}}},\ldots,\frac{z_{3n_3}}{(t-\tau)^{2+\frac{1}{2b_{n_3}}}}\right)$. Непосредственно из утверждения леммы 2 получаем оценку

$$\left|\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)\right| \le ce^{-\delta|z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}},\quad z\in\mathbb{R}^n,\ 0\le\tau<t\le T,$$

с положительными постоянными c и δ, не зависящими от t и τ, где $\overrightarrow{2b}^* := (\overrightarrow{2b},\widehat{\overrightarrow{2b}},\overrightarrow{2b}')$ — n-мерный вектор.

Отметим, что согласно равенству (11) матрица $\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)$ по пространственной переменной z допускает аналитическое продолжение в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ к целой матричной функции порядка роста $\overrightarrow{2b}^*$ конечного типа:

$$\begin{aligned}
\left|\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)\right| &\le 1+\sum_{r=1}^\infty m^r \\
&\times \int_\tau^t\int_\tau^{t_1}\cdots\int_\tau^{t_{r-1}}\prod_{j=1}^r\Bigg|\mathscr{A}\Bigg(t_j;(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_1}}\left(z_{11}-\frac{t-t_j}{t-\tau}z_{21}+\frac{(t-t_j)^2}{2(t-\tau)^2}z_{31}\right),\ldots,\\
&\qquad (t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_3}}}\left(z_{1n_3}-\frac{t-t_j}{t-\tau}z_{2n_3}+\frac{(t-t_j)^2}{2(t-\tau)^2}z_{3n_3}\right);\\
&(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_3+1}}}\left(z_{1n_3+1}-\frac{t-t_j}{t-\tau}z_{2n_3+1}\right),\ldots,(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_2}}}\left(z_{1n_2}-\frac{t-t_j}{t-\tau}z_{2n_2}\right);\\
&\qquad (t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_2+1}}}z_{1n_2+1},\ldots,(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_1}}}z_{1n_1}\Bigg)\Bigg|\,dt_r\ldots dt_2dt_1\\
&\le 1+\sum_{r=1}^\infty\left(mc(t-\tau)^{-1}|z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right)^r\int_\tau^t\int_\tau^{t_1}\cdots\int_\tau^{t_{r-1}}1\,dt_r\ldots dt_2dt_1\\
&= 1+\sum_{r=1}^\infty\frac{1}{r!}\left(mc|z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right)^r = e^{mc|z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}},\quad 0\le\tau<t\le T,\ z\in\mathbb{C}^n.
\end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения леммы 2, применяя соответствующие теоремы типа Фрагмена — Линделефа [4], приходим к такому утверждению.

Лемма 3. *Для матричной функции* $\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau$ *правильными являются оценки*

$$\left|\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)\right| \le c\exp\left\{-\delta|x|_+^{\overrightarrow{2b}^*}+\delta_1|y|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right\}\quad (\forall\ z=x+iy\in\mathbb{C}^n),$$

$$\left|\partial_z^k\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)\right| \le cB^{|k|_+}k^{k\vec{\alpha}^*}\exp\left\{-\delta|z|_+^{\overrightarrow{2b}^*}\right\}\quad (\forall k\in\mathbb{Z}^n_+\ \forall z\in\mathbb{R}^n),$$

в которых положительные постоянные c,B,δ *и* δ_1 *не зависят от* t,τ,z *и* k, *а* $\vec{\alpha}^* := (\vec{1}-\vec{1}/\overrightarrow{2b},\widehat{(\vec{1}-\vec{1}/\overrightarrow{2b})},(\vec{1}-\vec{1}/\overrightarrow{2b})')$.

Следствие 2. *Каждый элемент матрицы* $\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)$ *как функция пространственной переменной* z *принадлежит пространству* $S^{\vec{B},\vec{\beta}^*}_{\vec{A}_\delta,\vec{\alpha}^*}$, *где* $\vec{\beta}^* := \big(\vec{1}/\overrightarrow{2b}, \widehat{\vec{1}/\overrightarrow{2b}}, \vec{1}/\overrightarrow{2b}'\big)$, $\vec{A}_\delta := ((e\delta\overrightarrow{2b})^{-\vec{1}/\overrightarrow{2b}}, (e\delta\widehat{\overrightarrow{2b}})^{-\widehat{\vec{1}/\overrightarrow{2b}}}, (e\delta\overrightarrow{2b}')^{-\vec{1}/\overrightarrow{2b}'})$ *и* $\vec{B} := (B, \dots, B)$ (*т. е. соответствующему пространству типа* S *И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова* [4]).

Напомним, что $S^{\vec{B},\vec{\beta}}_{\vec{A},\vec{\alpha}}$ — счетно-нормированное пространство, состоящее из всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $\varphi(\cdot)$, которые при произвольных $\vec{\rho} > \vec{0}$ и $\vec{\mu} > \vec{0}$ удовлетворяют неравенству

$$\big|\partial_x^k \varphi(x)\big| \le c_{\vec{\rho}\vec{\mu}}(\vec{B} + \vec{\mu})^k k^{k\vec{\beta}} \prod_{j=1}^n e^{-(a_j - \rho_j)|x_j|^{1/\alpha_j}},$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad a_j = \frac{\alpha_j}{eA^{1/\alpha_j}}, \quad j \in \mathbb{N}_n.$$

Отметим [4], что оператор преобразования Фурье F непрерывно отображает каждое пространство $S^{\vec{B},\vec{\beta}}_{\vec{A},\vec{\alpha}}$ в соответствующее пространство $S^{\vec{A}_0,\vec{\alpha}}_{\vec{B}_0,\vec{\beta}}$ при $\vec{A}_0 = (A_1 e^{\frac{1}{A_1 B_1}}, \dots, A_n e^{\frac{1}{A_n B_n}})$ и $\vec{B}_0 = (B_1 e^{\frac{1}{A_1 B_1}}, \dots, B_n e^{\frac{1}{A_n B_n}})$.

Учитывая этот факт, непосредственно из леммы 3 приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Для каждого* $T > 0$ *существуют положительные постоянные* c, B *и* δ *такие, что для всех* $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$ *и* $x \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$\big|\partial_x^k F\big[\overset{\circ}{\Theta}{}^t_\tau(z)\big](x)\big| \le cB^{|k|_+} k^{k\vec{\beta}^*} e^{-\delta|x|_+^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}.$$

Теорема 2. *Матричная функция* G *дифференцируема по* t, *бесконечно дифференцируема по* x *и* ξ *в своей области определения, при этом существуют положительные постоянные* A, B, c *и* δ *такие, что для всех* $\{q, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ *и* $\tau \in [0; T)$ *выполняются оценки*

$$\begin{aligned}
&\big|\partial_x^q \partial_\xi^l G(t, x; \tau, \xi)\big| \\
&\quad \le \frac{cA^{|q|_+} q^{q\vec{\beta}} B^{|l|_+} l^{l\vec{\beta}}}{(t-\tau)^{|(l_1+q_1)/\overrightarrow{2b} + \vec{1}|_+ + |(\widehat{\vec{1}+\vec{1}/\overrightarrow{2b}})(l_2+q_2+\widehat{\vec{1}})|_+ + |(\vec{2}+\vec{1}/\overrightarrow{2b})'(l_3+q_3+\vec{1}')|_+}} \\
&\quad\quad \times \exp\Bigg\{-\delta\Bigg(\sum_{j=1}^{n_1}\big((t-\tau)^{-\frac{1}{2b_j}}|x_{1j} - \xi_{1j}|\big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \\
&\quad\quad + \sum_{j=1}^{n_2}\big((t-\tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}}|x_{2j} - \xi_{2j} + (t-\tau)\xi_{1j}|\big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_3}\big((t-\tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}}|x_{3j} - \xi_{3j} + (t-\tau)\xi_{2j} - (t-\tau)^2\xi_{1j}/2|\big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\Bigg)\Bigg\}, \qquad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|\partial_t G(t, x; \tau, \xi)| \le c(t-\tau)^{-|\vec{\beta}^*|_+ - n_2 - 2n_3 - 1} \exp\Bigg\{-\delta\Bigg(\sum_{j=1}^{n_1}\big((t-\tau)^{-\frac{1}{2b_j}}|x_{1j} - \xi_{1j}|\big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} \\
&+ \sum_{j=1}^{n_2}\big((t-\tau)^{-1-\frac{1}{2b_j}}|x_{2j} - \xi_{2j} + (t-\tau)\xi_{1j}|\big)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}} + \sum_{j=1}^{n_3}\big((t-\tau)^{-2-\frac{1}{2b_j}}|x_{3j} - \xi_{3j}
\end{aligned}$$

$$+ (t-\tau)\xi_{2j} - (t-\tau)^2\xi_{1j}/2|)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}\Bigg)\Bigg\}. \quad (26)$$

Доказательство. В интеграле

$$\partial_x^q\partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi)$$
$$= \frac{(-1)^{|q|_+}i^{|l+q|_+}}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \widehat{y_1}^{\widehat{q_1}}(y_1''')^{q_1'''+l_1'''}\big(y_2'\big)^{q_2'}\big(y_2''\big)^{q_2''+l_2''}y_3^{q_3+l_3}\big((t-\tau)^2y_3/2$$
$$-(t-\tau)y_2'-y_1'\big)^{l_1'}\big(y_1''-(t-\tau)y_2''\big)^{l_1''}\big(y_2'-(t-\tau)y_3\big)^{l_2'}e^{i(\xi,\rho_0(\tau;s_{t,y};\tilde{y}))}e^{-i(x,y)}\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y})\,dy$$

проведем замену переменных интегрирования согласно правилу

$$(t-\tau)^{j-1+\frac{1}{2br_j}}y_{jr_j} = z_{jr_j}, \quad r_j\in\mathbb{N}_{n_j},\ j\in\mathbb{N}_3. \quad (27)$$

Положив

$$\beta_* := |(l_1+q_1)/\overrightarrow{2b}+\vec{1}|_+ + |(\widehat{\vec{1}+\vec{1}/\overrightarrow{2b}})(l_2+q_2+\vec{1})|_+ + |(\vec{2}+\vec{1}/\overrightarrow{2b})'(l_3+q_3+\vec{1}')|_+,$$

$$\varsigma_{jr_j} := (t-\tau)^{1-j-\frac{1}{2b_{r_j}}}\xi_{jr_j}, \quad \eta_{jr_j} := (t-\tau)^{1-j-\frac{1}{2b_{r_j}}}x_{jr_j},\ r_j\in\mathbb{N}_{n_j},\ j\in\mathbb{N}_3, \quad (28)$$

получим, что

$$\partial_x^q\partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi) = \frac{(-1)^{|q|_+}i^{|l+q|_+}}{(2\pi)^n}(t-\tau)^{\beta_*}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat{z_1}^{\widehat{q_1}}\big(z_1'''\big)^{q_1'''+l_1'''}\big(z_2'\big)^{q_2'}\big(z_2''\big)^{q_2''+l_2''}z_3^{q_3+l_3}$$
$$\times (z_3/2-z_2'-z_1')^{l_1'}(z_1''-z_2'')^{l_1''}(z_2'-z_3)^{l_2'}e^{i(\varsigma,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz$$
$$\equiv \frac{(-1)^{|q|_+}i^{|l+q|_+}}{(2\pi)^n}(t-\tau)^{\beta_*}\Psi_{t,\tau}(\varsigma,\eta). \quad (29)$$

Оценим $\Psi_{t,\tau}(\varsigma,\eta)$. Поскольку

$$\widehat{z_1}^{\widehat{q_1}}\big(z_1'''\big)^{q_1'''+l_1'''}\big(z_2'\big)^{q_2'}\big(z_2''\big)^{q_2''+l_2''}z_3^{q_3+l_3}\big(z_3/2-z_2'-z_1'\big)^{l_1'}\big(z_1''-z_2''\big)^{l_1''}\big(z_2'-z_3\big)^{l_2'}$$
$$= \sum_{g_2'=0}^{l_2'}C_{l_2'}^{g_2'}\sum_{g_1''=0}^{l_1''}C_{l_1''}^{g_1''}\sum_{g_1'=0}^{l_1'}C_{l_1'}^{g_1'}\sum_{p_1'=0}^{g_1'}C_{g_1'}^{p_1'}(-1)^{\left|l_2'+g_1'-g_2'\right|_+ + \left|l_1''-g_1''\right|_+}2^{-\left|l_1'-g1'\right|_+}\big(z_1'\big)^{g_1'-q_1'-p_1'}$$
$$\times \big(z_1''\big)^{g_1''+q_1''}\big(z_1'''\big)^{q_1'''+l_1'''}\big(z_2'\big)^{g_2'+q_2'+p_1'}\big(z_2''\big)^{l_1''+l_2''+q_2''-g_1''}z_3^{q_3+l_3+l_1'+l_2'-g_1'-g_2'},$$

положив $\varsigma_1 := \zeta_1-\eta_1$, $\varsigma_2 := \zeta_2-\eta_2-\widehat{\zeta}_1$, $\varsigma_3 := \zeta_3-\eta_3-\zeta_2'+\zeta_1/2$, согласно равенству $e^{i(\zeta;\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)} = e^{i(z,\varsigma)}$ и утверждению леммы 4 имеем

$$|\Psi_{t,\tau}(\zeta,\eta)| \le \sum_{g_2'=0}^{l_2'}C_{l_2'}^{g_2'}\sum_{g_1''=0}^{l_1''}C_{l_1''}^{g_1''}\sum_{g_1'=0}^{l_1'}C_{l_1'}^{g_1'}\sum_{p_1'=0}^{g_1'}C_{g_1'}^{p_1'}$$
$$\times \left|\partial_{\varsigma_1'}^{g_1'+q_1'-p_1'}\partial_{\varsigma_1''}^{g_1''+q_1''}\partial_{\varsigma_1'''}^{q_1'''+l_1'''}\partial_{\varsigma_2'}^{g_2'+q_2'+p_1'}\partial_{\varsigma_2''}^{l_1''+l_2''+q_2''-g_1''}\partial_{\varsigma_3}^{q_3+l_3+l_1'+l_2'-g_1'-g_2'}F\big[\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\big](\varsigma)\right|$$
$$\le cB^{|q+l|_+}(q+l)^{(q+l)\vec{\beta}^*}e^{-\delta|\varsigma|_+^{1/\vec{\alpha}^*}}\sum_{g_2'=0}^{l_2'}C_{l_2'}^{g_2'}\sum_{g_1''=0}^{l_1''}C_{l_1''}^{g_1''}\sum_{g_1'=0}^{l_1'}C_{l_1'}^{g_1'}\sum_{p_1'=0}^{g_1'}C_{g_1'}^{p_1'}$$
$$= c3^{|l_1'|_+}2^{|l_1''|_+ + |l_2'|_+}B^{|q+l|_+}(q+l)^{(q+l)\vec{\beta}^*}e^{-\delta|\varsigma|_+^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*}}.$$

Учитывая полученную оценку интеграла $\Psi_{t,\tau}$, а также подстановку (28) и неравенство

$$(a+b)^{\alpha(a+b)} \le 2^{\alpha(a+b)} a^{\alpha a} b^{\alpha b}, \quad \alpha > 0,\ \{a,b\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

непосредственно из (29) приходим к утверждению (25).

Перейдем теперь к установлению оценки (26). Исходя из равенств

$$\partial_t \Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y}) = \mathscr{A}(t;y_1)\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y}) - \left(\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}\partial_{y_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_3} y_{3j}\partial_{y_{2j}}\right)\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y}),$$

$$\partial_t e^{i(y,\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))} = ie^{i(y,\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))}\{(t-\tau)(\xi_1',y_3) - (\xi_2',y_3) - (\widehat{\xi}_1,y_2)\},$$

$$e^{-i(x,y)}e^{i(y,\rho_0(\tau;s_{t,\xi};\tilde{\xi}))} = e^{i(y_1,\xi_1-x_1)}e^{i(y_2,\xi_2-x_2-(t-\tau)\widehat{\xi}_1)}e^{i(y_3,\xi_3-x_3-(t-\tau)\xi_2'+(t-\tau)^2\xi_1'/2)}$$

и (14), получим

$$\partial_t G(t,x;\tau,\xi) = i(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}e^{i(\xi,\rho_0(\tau;s_{t,y};\tilde{y}))}\{(t-\tau)(\xi_1',y_3)-(y_2',y_3)-(\widehat{\xi}_1,y_2)\}$$

$$\times \Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y})\,dy + (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)}e^{i(\xi,\rho_0(\tau;s_{t,y};\tilde{y}))}\mathscr{A}(t;y_1)\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y})\,dy$$

$$+ i(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\widehat{\xi}_1 - \widehat{x}_1, y_2)e^{-i(x,y)}e^{i(\xi,\rho_0(\tau;s_{t,y};\tilde{y}))}\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y})\,dy$$

$$+ i(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\xi_2' - x_2' - (t-\tau)\xi_1', y_3)e^{-i(x,y)}e^{i(\xi,\rho_0(\tau;s_{t,y};\tilde{y}))}\Theta_\tau^t(s_{t,y};\tilde{y})\,dy.$$

Осуществив в последних интегралах замену (27) и подстановку (28), придем к равенствам

$$\partial_t G(t,x;\tau,\xi) = \frac{i}{(2\pi)^n (t-\tau)^{|\vec{\beta}^*|_+ + n_2 + 2n_3 + 1}}$$

$$\times\Bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}((z_3,\zeta_1'-\zeta_2') - (z_2,\widehat{\zeta}_1))e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz$$

$$+i^{-1}(t-\tau)\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathscr{A}(t;(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_1}}z_{11},\ldots,(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_1}}}z_{1n_1})\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(z_2,\widehat{\zeta}_1-\widehat{\eta}_1)e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(z_3,\zeta_2'-\eta_2'-\zeta_1')e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz\Bigg\}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^n (t-\tau)^{|\vec{\beta}^*|_+ + n_2 + 2n_3 + 1}}\Bigg\{i^{-1}(t-\tau)$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathscr{A}(t;(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_1}}z_{11},\ldots,$$

$$(t-\tau)^{-\frac{1}{2b_{n_1}}}z_{1n_1})\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz - \int\limits_{\mathbb{R}^n}((z_2,\widehat{\eta}_1)+(z_3,\eta_2'))e^{i(\zeta,\rho_0(0;s_{1,z};\tilde{z}))}e^{-i(\eta,z)}\mathring{\Theta}_\tau^t(z)\,dz\Bigg\}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^n (t-\tau)^{|\vec{\beta}^*|_+ + n_2 + 2n_3 + 1}}$$
$$\times \Bigg\{ i^{-1} \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+ \le 1} (t-\tau)^{1-|k_1/\overrightarrow{2b}|_+} A_{k_1}(t) \int_{\mathbb{R}^n} z_1^{k_1} e^{i(\zeta, \rho_0(0; s_{1,z}; \tilde{z}))} e^{-i(\eta, z)}$$
$$\times \mathring{\Theta}_\tau^t(z)\, dz - \sum_{j=1}^{n_2} \eta_{1j} \int_{\mathbb{R}^n} z_{2j} e^{i(\zeta, \rho_0(0; s_{1,z}; \tilde{z}))} e^{-i(\eta, z)} \mathring{\Theta}_\tau^t(z)\, dz$$
$$- \sum_{j=1}^{n_3} \eta_{2j} \int_{\mathbb{R}^n} z_{3j} e^{i(\zeta, \rho_0(0; s_{1,z}; \tilde{z}))} e^{-i(\eta, z)} \mathring{\Theta}_\tau^t(z)\, dz \Bigg\}$$
$$\equiv \frac{i}{(2\pi)^n (t-\tau)^{|\vec{\beta}^*|_+ + n_2 + 2n_3 + 1}} \Bigg\{ i^{-1} \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+ \le 1} (t-\tau)^{1-|k_1/\overrightarrow{2b}|_+} A_{k_1}(t) \Phi_{t,\tau}^{1,k_1}(\zeta; \eta)$$
$$- \sum_{j=1}^{n_2} \eta_{1j} \Phi_{t,\tau}^{2,j}(\zeta; \eta) - \sum_{j=1}^{n_3} \eta_{2j} \Phi_{t,\tau}^{3,j}(\zeta; \eta) \Bigg\}. \quad (30)$$

Отметим, что каждый из интегралов $\Phi_{t,\tau}^{1,k_1}$, $\Phi_{t,\tau}^{2,j}$ и $\Phi_{t,\tau}^{3,j}$ является интегралом типа $\Psi_{t,\tau}$, поэтому, оценивая указанные интегралы как $\Psi_{t,\tau}$, для всех $\{\zeta, \eta\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ и $\tau \in [0; T)$ получим

$$\big|\Phi_{t,\tau}^{1,k_1}(\zeta, \eta)\big| \le c \exp\big\{-\delta\big(|\zeta_1 - \eta_1|_+^{\overrightarrow{2b}/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})} + |\zeta_2 - \eta_2 - \widehat{\zeta}_1|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})}}$$
$$+ |\zeta_3 - \eta_3 - \zeta_2' + \zeta_1'/2|_+^{\overrightarrow{2b}'/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})'}\big)\big\}, \quad |k_1/\overrightarrow{2b}|_+ \le 1,$$

$$\big|\Phi_{t,\tau}^{l,j}(\zeta, \eta)\big| \le c \exp\big\{-\delta\big(|\zeta_1 - \eta_1|_+^{\overrightarrow{2b}/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})} + |\zeta_2 - \eta_2 - \widehat{\zeta}_1|_+^{\widehat{\overrightarrow{2b}/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})}}$$
$$+ |\zeta_3 - \eta_3 - \zeta_2' + \zeta_1'/2|_+^{\overrightarrow{2b}'/(\vec{1}-\overrightarrow{2b})'}\big)\big\}, \quad j \in \mathbb{N}_{n_l},\ l \in \{2; 3\}$$

(здесь c и δ — положительные постоянные, не зависящие от t и τ).

Отсюда, а также из равенств (30), еще раз приняв во внимание подстановку (28), приходим к (26).

Теорема доказана.

Следствие 3. *Каждый элемент матрицы G как функция переменной ξ или x принадлежит пространству $S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$ [4], т. е. по каждой из этих переменных допускает аналитическое продолжение в комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ до целой функции порядка роста $\vec{1}/\vec{\alpha}^*$ конечного типа.*

Утверждение теоремы 2 обеспечивает корректность проведенных преобразований при выводе формулы (13), поэтому вектор-функция u, которая определяется этой формулой, является обычным решением задачи Коши (1), (3) на множестве $\Pi_{(\tau;T]}^n$, $\tau \in [0; T)$. Но тогда и матрица $G(t, x; \tau, \xi)$, $(\tau; \xi) \in \Pi_{[0;T)}^n$, как функция переменных t и x также является решением системы (1) на $\Pi_{(\tau;T]}^n$.

Отметим также, что удовлетворение решения (13) начальному условию (3) при произвольной начальной вектор-функции φ с компонентами φ_j, $j \in \mathbb{N}_m$, из пространства S равносильно выполнению предельного соотношения для матрицы G из определения ФМРЗК (в указанном смысле).

Следовательно, имеет место

Теорема 3. *Матричная функция* (14) *является* ФМРЗК *для системы* (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownshen Bewegung) // Ann. Math. 1934. Bd 35. S. 116–117.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2004. (Oper. Theory, Adv. Appl.).
3. *Малицька Г. П.* Системи рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, № 12. С. 1650–1663.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.

Статья поступила 15 февраля 2011 г.

Литовченко Владислав Антонович
Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы 58012, Украина
vladlit4@mail.ru

Настасий Елена Борисовна
Буковинская гос. финансовая академия,
ул. М. Штерна, 1, Черновцы 58000, Украина
LeNastasiy@ukr.net