Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 517.983.27:517.972.8

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА

С. С. Кутателадзе

Аннотация. Устанавливается вариант принципа Лагранжа для мажорированных полиэдральных сублинейных операторов.

Ключевые слова: пространство Канторовича, линейное программирование, лемма Фаркаша, полиэдральные сублинейные неравенства, булевозначный анализ.

Настоящая заметка является дополнением к [1]. В ней устанавливается критерий неравенств, служащих следствиями системы неоднородных полиэдральных сублинейных неравенств. На этой основе приводится вариант принципа Лагранжа для полиэдральных мажорированных сублинейных операторов. Помимо этого восполняется пробел в доказательстве теоремы 3.4 в [1] о системах комплексных операторных неравенств. В заметке использованы терминология и обозначения из [1].

Лемма. *Пусть X — вещественное векторное пространство. Предположим, что $p_1,\dots,p_N \in \mathrm{PSub}(X) := \mathrm{PSub}(X,\mathbb{R})$ и $p \in \mathrm{Sub}(X)$. Пусть, далее, $v \in \mathbb{R}$ и $u_1,\dots,u_N \in \mathbb{R}$ таковы, что система неоднородных сублинейных неравенств $p_k(x) \le u_k$, где $k := 1,\dots,N$, совместна.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\{p \ge v\} \supset \bigcap\limits_{k=1}^{N} \{p_k \le u_k\}$;

(2) *существуют числа $\alpha_1,\dots,\alpha_N \in \mathbb{R}_+$ такие, что*

$$(\forall x \in X)\ p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_k(x) \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \le -v.$$

Доказательство. (2) → (1) Если x — решение системы неоднородных неравенств $p_k(x) \le u_k$, где $k := 1,\dots,N$, то

$$0 \le p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k p_k(x) \le p(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k(x) \le p(x) - v.$$

(1) → (2) Для $(x,t) \in X \times \mathbb{R}$ полагаем $\bar p_k(x,t) := p_k(x) - tu_k$, $\bar p(x,t) := p(x) - tv$ и $\tau(x,t) := -t$. Ясно, что $\tau, \bar p_1,\dots,\bar p_N \in \mathrm{PSub}(X \times \mathbb{R})$ и $\bar p \in \mathrm{Sub}(X \times \mathbb{R})$. Пусть

$$(x,t) \in \{\tau \le 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{N} \{\bar p_k \le 0\}.$$

Если при этом $t > 0$, то $u_k \ge p_k(x/t)$ для $k := 1,\dots,N$ и, стало быть, $p(x/t) \ge v$ по условию. Иначе говоря, $(x,t) \in \{\bar p \ge 0\}$. Если $t = 0$, то выберем какое-нибудь решение $\bar x$ рассматриваемой системы неоднородных полиэдральных сублинейных неравенств. Поскольку $x \in K := \bigcap\limits_{k=1}^{N} \{p_k \le 0\}$, имеем $p_k(\bar x + x) \le$

$p_k(\bar{x}) + p_k(x) \leq u_k$ для всех $k := 1, \dots, N$. Следовательно, $p(\bar{x} + x) \geq v$ по условию. Тем самым сублинейный функционал p ограничен снизу на выпуклом конусе K. Значит, p принимает положительные значения на K. Иначе говоря, $(x, 0) \in \{\bar{p} \geq 0\}$. Таким образом,

$$\{\bar{p} \geq 0\} \supset \{\tau \leq 0\} \cap \bigcap_{k=1}^{N} \{\bar{p}_k \leq 0\},$$

и по лемме 2.2 из [1] найдутся положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta$ такие, что для всех $(x, t) \in X \times \mathbb{R}$ будет

$$\bar{p}(x, t) + \beta\tau(x, t) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \bar{p}_k(x, t) \geq 0.$$

Ясно, что найденные параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ искомые. Тем самым лемма доказана полностью.

Теорема 1. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Заданы мажорированные полиэдральные сублинейные операторы $P_1, \dots, P_N \in \mathrm{PSub}^{(m)}(X, Y)$ и мажорированный сублинейный оператор $P \in \mathrm{Sub}^{(m)}(X, Y)$. Пусть, далее, $v \in Y$ и элементы $u_1, \dots, u_N$ таковы, что неоднородная система $P_1(x) \leq u_1, \dots, P_N(x) \leq u_N$ совместна.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) *для всех $b \in \mathbb{B}$, где $\mathbb{B}$ — база Y, неоднородное сублинейное операторное неравенство $bP(x) \geq bv$ является следствием системы полиэдральных сублинейных операторных неравенств $bP_1(x) \leq bu_1, \dots, bP_N(x) \leq bu_N$, т. е.*

$$\{bP \geq bv\} \supset \{bP_1 \leq bu_1\} \cap \dots \cap \{bP_N \leq bu_N\};$$

(2) *найдутся положительные ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ такие, что*

$$(\forall x \in X)\ P(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k P_k(x) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \leq -v.$$

Доказательство. Утверждение представляет собой булевозначную интерпретацию леммы.

Замечание. Теорема 1 показывает, что для экстремальной задачи

$$P_1(x) \leq u_1, \dots, P_N(x) \leq u_N, \quad P(x) \to \inf$$

справедлив *принцип Лагранжа для значений.* Иначе говоря, конечное значение задачи минимизации с ограничениями является значением безусловной задачи минимизации подходящего лагранжиана. Дополнительной к полиэдральности квалификации ограничений при этом не предполагается. В то же время важно подчеркнуть, что условие Слейтера позволяет отказаться как от полиэдральности, так и от условий связи областей прибытия ограничений и цели. Это обстоятельство давно известно в практически предельной общности (см., например, [2]). Отсюда, в частности, следует, что при выполнении условия Слейтера в лемме можно снять требование полиэдральности рассматриваемых сублинейных функционалов.

Следствие. *Пусть X — некоторое $\mathbb{R}$-полунормированное комплексное векторное пространство. Допустим также, что заданы элементы $u_1, \dots, u_N, v \in \mathbb{R}$ и ограниченные комплексно-линейные функционалы $f_1, \dots, g_N, f \in X^*$. Предположим, что система неоднородных неравенств $|f_1(x)| \le u_1, \dots, |f_N(x)| \le u_N$ совместна. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *неравенство $|g(x)| \le v$ служит следствием системы неравенств $|f_1(x)| \le u_1, \dots, |f_N(x)| \le u_N$, т. е.*

$$\{|g(\cdot)| \le v\} \supset \{|f_1(\cdot)| \le u_1\} \cap \dots \cap \{|f_N(\cdot)| \le u_N\};$$

(2) *существуют комплексные числа $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$g = \sum_{k=1}^{N} c_k f_k, \quad v \ge \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k.$$

Доказательство. (2)→(1) Для $x \in \bigcap_{k=1}^{N} \{|f_k(\cdot)| \le u_k\}$ последовательно имеем

$$|g(x)| = \left| \sum_{k=1}^{N} c_k f_k(x) \right| \le \sum_{k=1}^{N} |c_k f_k(x)| \le \sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k \le v.$$

(1)→(2) Если $u_k = 0$ для некоторого k, то $f_k = 0$. Стало быть, неравенство с номером k — это тождество для всех $x \in X$, и его можно исключить из рассмотрения. Итак, будем считать, что все u_k строго положительны, и рассмотрим на вещественной основе $X_{\mathbb{R}}$ сублинейные функционалы $p(x) := -\operatorname{Re} g(x)$, $p_k(x) := |f_k(x)|$, где $k := 1, \dots, N$ и $x \in X_{\mathbb{R}}$. В силу условия Слейтера выполнено заключение леммы и $\{p \ge -v\} \supset \bigcap_{k=1}^{N} \{p_k \le u_k\}$. Стало быть, найдутся положительные вещественные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что

$$(\forall x \in X_{\mathbb{R}})\ -\operatorname{Re} g(x) + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |f_k(x)| \ge 0; \quad \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k \le v.$$

Из субдифференциального исчисления следует, что для некоторых комплексных чисел θ_k, $|\theta_k| = 1$, $k := 1, \dots, N$, будет $g = \sum \alpha_k \theta_k f_k$. Положим $c_k := \alpha_k \theta_k$. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{N} |c_k| u_k = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |\theta_k| u_k \le v.$$

Следствие доказано.

Замечание. Теорема 3.4 из [1] представляет собой булевозначную интерпретацию приведенного следствия.

В качестве приложения полиэдрального принципа Лагранжа установим обобщение теоремы 2.3 из [1] о слабых решениях интервальных операторных неравенств (об этом см. [3]).

Теорема 2. *Пусть X — вещественное Y-полунормированное пространство, где Y — некоторое пространство Канторовича. Заданы мажорированный полиэдральный сублинейный оператор $P \in \mathrm{PSub}^{(m)}(X, Y)$, мажорированный сублинейный оператор $Q \in \mathrm{Sub}^{(m)}(X, Y)$ и элементы $u, v \in Y$, причем $\{P \le u\} \ne \varnothing$.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) *для всех* $b \in \mathbb{B}$ *сублинейное операторное неравенство* $bQ(-x) \geq -bv$ *является следствием полиэдрального сублинейного операторного неравенства* $bP(x) \leq bu$, *т. е.*

$$\{bP \leq bu\} \subset \{bQ\circ \sim\geq -bv\};$$

(2) *найдутся* $A \in \partial(P)$, $B \in \partial(Q)$ *и положительный ортоморфизм* $\alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y))$ *такие, что*

$$B = \alpha A, \quad \alpha u \leq v.$$

Доказательство. Последовательно имеем

$$\begin{gathered}
(\exists A \in \partial(P))(\exists B \in \partial(Q))(\exists \alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+)\ B = \alpha A, \alpha u \leq v \\
\to (\exists A \in \partial(P))(\exists B \in \partial(Q))(\forall b \in \mathbb{B})\ \{bA \leq bu\} \subset \{bB \leq bv\} \\
\to (\forall b \in B)\{bP \leq bu\} \subset \{bQ\circ \sim\geq -bv\} \\
\to (\exists \alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y))_+)(\forall x \in X)\ (Q\circ \sim)(x) + \alpha(P(x) - u) \geq -v \\
\to (\exists A \in \partial(P))(\exists B \in \partial(Q))(\exists \alpha \in \mathrm{Orth}(m(Y)_+)\ B = \alpha A, \alpha u \leq v.
\end{gathered}$$

В заключение выражаю признательность А. Е. Гутману за обсуждение заметки и тонкие конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутателадзе С. С.* Новая форма леммы Фаркаша // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 98–109.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. М.: Наука, 2007.
3. *Задачи линейной оптимизации с неточными данными* / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, и др. М.; Ижевск: РХД, 2008.

Статья поступила 23 марта 2011 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru