Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 510.5

О СУЩЕСТВОВАНИИ НАСЫЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

В. Г. Пузаренко

Аннотация. Обсуждаются достаточно насыщенные вещественно замкнутые поля. Приводится пример модели, в которой реализуются все арифметические типы, но которая не является достаточно насыщенной. Для этого строится гиперарифметичное элементарное рекурсивно насыщенное расширение любой гиперарифметичной модели.

Ключевые слова: арифметическое множество, гиперарифметичное представление, достаточно насыщенная модель, ω-насыщенная модель, наследственно конечная надстройка, натуральный ординал.

В работе [1] вводится понятие достаточно насыщенной модели и доказывается аналог теоремы Левенгейма — Сколема — Мальцева об элементарных расширениях для моделей, определимых в наследственно конечных надстройках над ними. Основные результаты вышеупомянутой работы содержатся в [2]. Там же формулируется проблема (замечание 3.4.3), любая ли модель, в которой реализуется любой арифметический тип из формул с ограниченным числом перемен кванторов над конечным подмножеством носителя, будет достаточно насыщенной. В этой работе показано, что в общем случае это неверно. Модель, служащая контрпримером, строится в классе вещественно замкнутых полей.

Основные сведения из теории допустимых множеств, которые будут использоваться в настоящей работе, можно найти в [2, 3], а из теории моделей — в [4]. Здесь напомним лишь некоторые из них и укажем ряд соглашений.

Все рассматриваемые структуры и теории здесь, если не оговорено особо, будут иметь конечную сигнатуру. Модели будем обозначать готическими буквами, возможно, с индексами, а их носители — соответствующими латинскими буквами с теми же индексами; теорию модели $\mathfrak{M}$ будем обозначать через $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ, а $\mathfrak{M}^*$ — естественное обогащение модели $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\sigma \cup \{\mathbf{c}_m\}_{m\in M}$, в котором $\mathbf{c}_m^{\mathfrak{M}^*} = m$ для любого $m \in M$. Под *диаграммой* $\mathrm{D}_0(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ будем понимать множество всех бескванторных предложений сигнатуры $\sigma \cup \{\mathbf{c}_m\}_{m\in M}$, истинных на модели $\mathfrak{M}^*$. Под *полной диаграммой* $\mathrm{D}_c(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ будем понимать $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}^*)$. Ввиду конечности сигнатуры σ существует гёделева нумерация множества всех формул этой сигнатуры (а также сигнатуры $\sigma \cup \{\mathbf{c}_m\}_{m\in M}$, если $\mathfrak{M}$ счетна), поэтому в дальнейшем будем отождествлять формулы соответствующей сигнатуры с их номерами в заранее фиксированной гёделевой нумерации.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная модель, а $H \subseteq \omega$ (здесь и далее через ω обозначаем множество натуральных чисел или ординалов, что зависит от контекста). Говорят,

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00442, 09–01–12140_офи–м), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3606.2010.1).

что $\mathfrak{M}$ *H-вычислима*, если ее диаграмма $\mathrm{D}_0(\mathfrak{M})$ H-вычислима. Модель $\mathfrak{M}$ называется *H-разрешимой*, если ее полная диаграмма $\mathrm{D}_c(\mathfrak{M})$ H-вычислима. Модель $\mathfrak{M}$ будем называть *гиперарифметичной*, если $\mathfrak{M}$ H-вычислима для некоторого гиперарифметического $H \subseteq \omega$. Хорошо известно, что в этом определении «H-вычислимой» можно заменить на «H-разрешимой» (это следует, например, из того, что класс гиперарифметических множеств замкнут относительно квантификации по переменным, принимающим в качестве значений натуральные числа).

Под *допустимым множеством* $\mathbb{A}$ будем понимать KPU-модель, у которой отношение $\in$ вполне упорядочивает множество $\mathrm{Ord}(\mathbb{A})$ всех ординалов данной модели. На допустимом множестве определяется понятие вычислимо перечислимого (вычислимого) множества как множества, определимого Σ-формулой (Σ- и Π-формулами одновременно). Вычислимо перечислимые (вычислимые) подмножества называются Σ-(Δ-)*подмножествами*.

Для построения гиперарифметичных моделей воспользуемся методами допустимых множеств применительно к $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — стандартная модель арифметики. Ввиду технических сложностей понятие $\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})$ здесь приводить не будем [3]. Отметим лишь, что множество всех ординалов $\mathrm{Ord}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{N}))$ совпадает с первым неконструктивным ординалом ω_1^{CK}, называемым также *ординалом Черча — Клини*. Кроме того, класс всех Δ-подмножеств ω в $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ совпадает с Δ^1_1, т. е. классом всех гиперарифметических множеств.

Под *типом* $p(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ от переменных $x_1,\dots,x_n$ будем понимать непротиворечивое множество формул (необязательно полное) той же сигнатуры, свободные переменные которых содержатся среди $x_1,\dots,x_n$, $n<\omega$. Тип $p(x_1,\dots,x_n)$ называется *вычислимым* (*арифметическим*), если множество номеров формул из $p(x_1,\dots,x_n)$ является таковым. Тип $p(x_1,\dots,x_n)$ *локально совместим* с $\mathfrak{M}$, если для любого конечного $p_0(x_1,\dots,x_n) \subseteq p(x_1,\dots,x_n)$ справедливо соотношение $\mathfrak{M} \models \bigwedge p_0(a_1,\dots,a_n)$ для некоторых $a_1,\dots,a_n$ из $\mathfrak{M}$.

Пусть Γ — семейство типов вида $p(x,\vec{y})$, где $\vec{y}$ — последовательность переменных, не содержащих x. Модель $\mathfrak{M}$ назовем *Γ-насыщенной*, если для любых $\vec{a} \in M^{<\omega}$ и типа $p(x,\vec{y}) \in \Gamma$ выполняется следующее: если $p(x,\vec{a})$ локально совместим с $(\mathfrak{M},\vec{a})$, то некоторое $b \in M$ реализует тип $p(x,\vec{a})$ в $(\mathfrak{M},\vec{a})$. Модель $\mathfrak{M}$ называется *ω-насыщенной*, если она Γ-насыщенна для Γ, состоящего из семейства всех типов вида $p(x,\vec{y})$ сигнатуры модели $\mathfrak{M}$ ($\vec{y}$ не содержит x). В случае, когда Γ состоит из всех вычислимых таких типов, Γ-насыщенные модели называются *рекурсивно насыщенными*.

Напомним основные свойства рекурсивно насыщенных моделей (см. [3]), которые понадобятся в настоящей работе.

1. Модель $\mathfrak{M}$ рекурсивно насыщенна тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Ord}(\mathbb{HYP}(\mathfrak{M})) = \omega.$$

2. Любая модель имеет рекурсивно насыщенное элементарное расширение.

Определим индуктивно семейство $HF(M)$ всех наследственно конечных множеств над M:

$$H_0(M) = \varnothing; \quad H_{n+1}(M) = \mathscr{P}_\omega(H_n(M) \cup M); \quad HF(M) = \bigcup_{n<\omega} H_n(M)$$

(здесь $\mathscr{P}_\omega(X)$ — множество всех конечных подмножеств множества X).

Если $\mathfrak{M}$ — модель предикатной сигнатуры σ, то на множестве $HF(M) \cup M$ может быть задана структура $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сигнатуры $\sigma \cup \{\mathrm{U}^1, \in^2, \varnothing\}$ (называемая *наследственно конечной надстройкой над* $\mathfrak{M}$) так, что $\mathrm{U}^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} = M$, $\in^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})} \subseteq (HF(M) \cup M) \times HF(M)$ — отношение принадлежности на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, константа $\varnothing$ интерпретируется как пустое множество, а символы сигнатуры σ интерпретируются, как и на модели $\mathfrak{M}$.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ называется *достаточно насыщенной*, если $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ для некоторой ω-насыщенной модели $\mathfrak{M}'$.

В рамках введенных понятий вопрос, поставленный Ю. Л. Ершовым в [2], можно переформулировать в следующем виде.

Вопрос 1. *Любая ли* Γ*-насыщенная модель* $\mathfrak{M}$ *будет достаточно насыщенной, если* Γ *— семейство всех арифметических типов вида* $p(x, \vec{y})$ ($\vec{y}$ *не содержит* x) *сигнатуры модели* $\mathfrak{M}$*, состоящих из формул с ограниченным числом перемен кванторов в совокупности* (*по* $p(x, \vec{y})$*, а не по* Γ)*?*

Отметим, что условие на ограниченность числа перемен кванторов может быть снято, если теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ разрешима и модельно полна. Ответом на поставленный вопрос служит теорема 4. Для этого введем понятие арифметически насыщенной модели. Модель $\mathfrak{M}$ будем называть *арифметически насыщенной*, если она Γ-насыщенна для семейства Γ, состоящего из всех арифметических типов $p(x, \vec{y})$ сигнатуры модели $\mathfrak{M}$ ($\vec{y}$ не содержит x).

Вещественно замкнутые поля будем рассматривать в предикатной сигнатуре $\{+^3, \cdot^3, 0^1, 1^1, \leq^2\}$ (другими словами, сигнатурные операции заменяются их графиками, т. е. будем рассматривать график соответствующей модели). Напомним, что теория вещественно замкнутого поля разрешима и модельно полна. Поле (стандартных) вещественных чисел будем обозначать через $\mathfrak{R}$.

Сначала напомним понятие рационального сечения на вещественно замкнутых полях. Пару непересекающихся подмножеств $(S_0|S_1)$ множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел называют *сечением*, если $S_0 \cup S_1 = \mathbb{Q}$ и $s_0 < s_1$ для всех $s_i \in S_i$, $i = 0, 1$. Отметим, что любое сечение $(S_0|S_1)$ задает тип

$$p_{(S_0|S_1)}(x) = \{(s_0 \leq x) \mid s_0 \in S_0\} \cup \{(x \leq s_1) \mid s_1 \in S_1\},$$

который, как нетрудно понять, совместим с теорией $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$. Хорошо известно, что упорядоченное поле рациональных чисел имеет вычислимое представление и притом единственное с точностью до вычислимого изоморфизма, поэтому можно ввести понятия вычислимых и арифметических подмножеств рациональных чисел, подразумевая, что данные множества являются таковыми в некотором (или, что то же самое, любом) вычислимом представлении. Сечение $(S_0|S_1)$ назовем *вычислимым* (*арифметическим*), если таковым будет S_0.

Сечение $(S_0|S_1)$ будем называть *стандартным*, если S_0, S_1 непусты и S_1 не имеет наименьшего элемента. Такие сечения определяются стандартными вещественными числами.

Посвятим несколько слов конечным последовательностям 0 и 1. По любой конечной последовательности $\sigma \in \{0; 1\}^{<\omega}$ можно эффективно найти двоично-рациональное число $f(\sigma) = \sum\limits_{i < \mathrm{lh}(\sigma)} \sigma(i) \cdot 2^{-(i+1)}$. Запись $\sigma \sqsubset X$ будет означать, что $\sigma(i) = X(i)$ для всех $i < \mathrm{lh}(\sigma)$, где $\mathrm{lh}(\sigma)$ — длина последовательности σ. При этом множество $X \subseteq \omega$ отождествляем с его характеристической функцией ($X(i) = 1 \Leftrightarrow i \in X$).

Теорема 1. *Вещественно замкнутое поле* $\mathfrak{R}'$ *является* ω*-насыщенным, если и только если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $\mathfrak{R}'$ *рекурсивно насыщенно;*

2) *для любого сечения* $(S_0|S_1)$ *тип* $p_{(S_0|S_1)}(x)$ *реализуется в* $\mathfrak{R}'$.

Доказательство. $(\rightarrow)$ очевидно. $(\leftarrow)$ Из условия 2 следует, что любое подмножество натуральных чисел будет Δ-подмножеством $\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$ (высота которого равна ω ввиду условия 1). Действительно, пусть $X \subseteq \omega$ — бесконечное кобесконечное множество (отметим, что конечные подмножества ω вычислимы и, следовательно, являются Δ-подмножествами $\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}')$). Возьмем теперь элемент $\alpha_0 \in (0;1)$, реализующий тип $p_{(S_0|S_1)}(x)$, заданный сечением $(S_0|S_1)$, для которого выполняется следующее:

$$\{f(\sigma) \mid \sigma \sqsubset X\} \subseteq S_0, \quad \{f(\sigma) + 2^{-\mathrm{lh}(\sigma)} \mid \sigma \sqsubset X\} \subseteq S_1.$$

Далее, имеем

$$X(n) = i \Leftrightarrow \exists\sigma[(f(\sigma) < \alpha_0) \wedge (\alpha_0 < f(\sigma) + 2^{-\mathrm{lh}(\sigma)}) \wedge (\mathrm{lh}(\sigma) = n + 1) \wedge (\sigma(n) = i)].$$

Таким образом, $(\mathbb{HYP}(\mathfrak{R}'), X)$ допустимо для любого $X \subseteq \omega$, и для завершения доказательства осталось применить IV.5.12 из [3].

Следствие 1. *Для того чтобы вещественно замкнутое поле* $\mathfrak{R}' \succcurlyeq \mathfrak{R}$ *было* ω*-насыщенным, необходимо и достаточно, чтобы оно было рекурсивно насыщенным.*

Доказательство. Действительно, условие 2 теоремы выполняется, поскольку все сечения, за исключением семейства нестандартных (которые, очевидно, вычислимы), реализуются на стандартных вещественных числах.

Из теоремы 1 и результатов работы [5] вытекает

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{R}'$ — ω*-насыщенное вещественно замкнутое поле, то* $\mathbb{HF}(\mathfrak{R})$ *определима без параметров в* $\mathbb{HF}(\mathfrak{R}')$.

Для нас будет важна следующая сложностная оценка для достаточно насыщенных вещественно замкнутых полей.

Предложение 1. *Если* $\mathfrak{R}_1$ — *счетное достаточно насыщенное вещественно замкнутое поле, то оно не может иметь гиперарифметического (даже аналитического) представления.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}_1$ — поле из условия. Тогда найдется ω-насыщенное вещественно замкнутое поле $\mathfrak{R}'$, для которого $\mathbb{HF}(\mathfrak{R}_1) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{R}')$. Согласно следствию 2 найдется поле $\mathfrak{R}_0$, определимое в $\mathbb{HF}(\mathfrak{R}_1)$, для которого выполняется условие $\mathbb{HF}(\mathfrak{R}_0) \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{R})$. Для завершения доказательства осталось применить основной результат работы [6] ($\mathfrak{R}_1$ обязано быть аналитически замкнутым).

Теорема 2. *Для любой гиперарифметичной модели существует гиперарифметичное элементарное расширение, являющееся рекурсивно насыщенной моделью.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — гиперарифметичная модель конечной сигнатуры σ. Воспользуемся эффективным вариантом на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$ доказательства критерия существования счетно насыщенных моделей. Конструкция будет удовлетворять следующим условиям:

• На множестве $n \cdot \omega$ будет задана модель $\mathfrak{M}_n$, $n \geq 1$; $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}$.

• Семейство моделей $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\geq 1}$ образует элементарную цепь; положим $\mathfrak{M}' = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathfrak{M}_n$.

• Если вычислимый тип $p(x)$ над конечным множеством $F_0 \subseteq M_n$ локально совместим с $(\mathfrak{M}_n, F_0)$, то $p(x)$ реализуется в $(\mathfrak{M}_{n+1}, F_0)$, $n \geq 1$.

Тогда модель $\mathfrak{M}'$ будет элементарным рекурсивно насыщенным расширением модели $\mathfrak{M}$. Если к тому же конструкция рекурсивна на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, то модель $\mathfrak{M}'$ гиперарифметична. Действительно, носителем модели $\mathfrak{M}'$ будет вычислимый ординал ω^2, а следовательно, существует биекция $f \in \mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, действующая из ω на ω^2 (достаточно рассмотреть вычислимое представление ω^2). Нетрудно теперь задать модель сигнатуры σ на ω так, что f будет изоморфизмом между ней и моделью $\mathfrak{M}'$. Следовательно, $\mathfrak{M}'$ имеет гиперарифметичную изоморфную копию.

Перейдем к описанию конструкции. Сначала зафиксируем эффективное перечисление (в классическом смысле) ν семейства всех предложений сигнатуры $\sigma \uplus \omega^2$ и вычислимых типов со свободной переменной x той же сигнатуры таких, что в них встречается лишь конечное число констант, не лежащих в σ. Считаем, что на ω задана гиперарифметичная копия $\mathfrak{M}$ и S_ω — полная диаграмма модели $\mathfrak{M}$.

Шаг $n \cdot \omega + k$, $n \geq 1, k < \omega$. Предположим, что все шаги l, $\omega \leq l < n \cdot \omega + k$, уже проделаны, а S_l, $\omega \leq l \leq n \cdot \omega + k$, определены (если $k = 0$, то $S_{n\cdot\omega} = \bigcup\limits_{m<n\cdot\omega} S_m$). Будем различать несколько случаев (во всех случаях подразумевается, что случаи с меньшими номерами не выполняются).

Случай 1. Либо $\nu(k)$ является вычислимым типом и содержит хотя бы одну константу $m \geq n \cdot \omega$, либо $\nu(k)$ является предложением, в котором встречается константа вида $m \geq (n+1)\cdot\omega$. Полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k}$ и переходим к следующему шагу.

Случай 2. $\nu(k)$ является вычислимым типом. Пусть F_0 — конечное множество всех констант, встречающихся в формулах из $\nu(k)$. Если $p(x)$ $(= \nu(k)(x))$ локально совместим с $(\mathfrak{M}_{n-1}, F_0)$, то находим наименьший элемент m, $n \cdot \omega \leq m < (n+1) \cdot \omega$, который не встречается в $S_{n\cdot\omega+k}$, полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k} \cup p(m)$ и переходим к следующему шагу. Если же $p(x)$ не локально совместим с $(\mathfrak{M}_{n-1}, F_0)$, то полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k}$ и переходим к следующему шагу. (Отметим, что условие «$p(x)$ локально совместим с $(\mathfrak{M}_{n-1}, F_0)$» эффективно проверяется на $\mathbb{HYP}(\mathfrak{N})$, поскольку оно равносильно следующему:

$$\forall n < \omega \left[(\delta(n) \subseteq p(x)) \to \left(\exists x \bigwedge \delta(n) \in S_{n\cdot\omega} \right) \right],$$

где δ — сильная таблица всех конечных подмножеств натуральных чисел.)

Случай 3. Предложение $\nu(k)$ совместимо с $S_{n\cdot\omega+k}$ и находится в виде $\exists x \psi(x)$. Находим наименьший элемент m, $n \cdot \omega \leq m < (n+1) \cdot \omega$, который не встречается в $S_{n\cdot\omega+k} \cup \{\nu(k)\}$, полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k} \cup \{\psi(m), \nu(k)\}$ и переходим к следующему шагу.

Случай 4. Предложение $\nu(k)$ совместимо с $S_{n\cdot\omega+k}$. Полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k} \cup \{\nu(k)\}$ и переходим к следующему шагу.

Случай 5. Предложение $\nu(k)$ не совместимо с $S_{n\cdot\omega+k}$. Тогда полагаем $S_{n\cdot\omega+k+1} = S_{n\cdot\omega+k} \cup \{\neg\nu(k)\}$ и переходим к следующему шагу. (Для последних трех случаев достаточно показать, что эффективно проверяется условие «$\nu(k)$ не совместимо с $S_{n\cdot\omega+k}$», а оно равносильно следующему условию:

$$\exists n < \omega \left[(\delta(n) \subseteq S_{n\cdot\omega+k} \cup \{\nu(k)\}) \wedge \left(\models \forall \vec{y} \neg \left(\bigwedge \delta(n) \right)^{\vec{\mathbf{c}}}_{\vec{y}} \right) \right],$$

где $\vec{\mathbf{c}}$ — все константы не из σ, встречающиеся в $\delta(n)$).

Все теоретико-модельные свойства (полнота, совместность) построения проверяются, как и при доказательстве критерия существования счетно насыщенной модели. Рекурсивность конструкции разбирается в рамках соответствующих случаев.

Теорема 3. *Существует гиперарифметичное арифметически насыщенное вещественно замкнутое поле.*

Доказательству предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Множество всех арифметических вещественных чисел образует вещественно замкнутое поле.*

Результат леммы получается релятивизацией теоремы о ядре [7], поскольку вещественное замыкание любого конечного множества арифметических вещественных чисел будет арифметичным.

Поле из условия леммы 1 будем обозначать через $\mathfrak{R}_{\mathrm{Arith}}$.

Лемма 2. $\mathfrak{R}_{\mathrm{Arith}}$ *имеет гиперарифметичное представление.*

Доказательство. Действительно, семейство всех арифметических стандартных сечений заведомо принадлежит $\varnothing^{(\omega+2)}$ (здесь $(S_0|S_1)$ — стандартное арифметическое сечение):

$$\forall q(q \in S_0 \vee q \in S_1) \wedge \forall q \forall q'((q \in S_0 \wedge q' \in S_1) \to (q < q')) \wedge \exists q(q \in S_0) \\ \wedge \exists q'(q' \in S_1) \wedge \forall q \exists q'(q \in S_1 \to ((q' \in S_1) \wedge (q' < q))).$$

Также легко проверяется, что операции будут определимыми относительно данного представления (подробности см. в [5]).

Вернемся к доказательству теоремы 3. По теореме 2 найдем гиперарифметичное рекурсивно насыщенное элементарное расширение $\mathfrak{R}_2$ модели $\mathfrak{R}_{\mathrm{Arith}}$. Покажем, что именно эта модель удовлетворяет заключению теоремы 3. Для этого достаточно показать, что любой арифметический тип над конечным множеством F_0 из R_2, локально совместимый с $(\mathfrak{R}_2, F_0)$, реализуется в $(\mathfrak{R}_2, F_0)$ (в силу модельной полноты и разрешимости можно ограничиться рассмотрением только типов, состоящих из $\exists$-формул).

Пусть $p(x)$ — арифметический (но не вычислимый) тип над конечным множеством F_0 и x_0 — стандартное вещественное число, для которого справедливо следующее:

$$\varphi(x) \in p(x) \Leftrightarrow \exists \sigma[(\mathrm{lh}(\sigma) = [\varphi(x)] + 1) \wedge (\sigma([\varphi(x)]) = 1) \wedge \\ (f(\sigma) < x_0) \wedge (x_0 < f(\sigma) + 2^{-([\varphi(x)]+1)})], \quad (*)$$

где $[\varphi(x)]$ — гёделев номер формулы $\varphi(x)$. Поскольку последовательностей фиксированной длины из 0 и 1 лишь конечное число, правая часть соотношения $(*)$ задается одной формулой, причем она находится эффективно по $[\varphi(x)]$ (обозначим эту формулу через $\xi_{[\varphi(x)]}$). Определим теперь вычислимый тип $p'(x)$ над множеством $F_0 \cup \{x_0\}$ следующим образом:

$$p'(x) = \{\xi_{[\varphi(x)]}(x_0) \to \varphi(x) \mid \varphi(x) \text{ — } \exists\text{-формула сигнатуры } \sigma \cup F_0\}.$$

Нетрудно проверить, что реализации типов $p(x)$ и $p'(x)$ на соответствующих моделях совпадают. Теорема доказана.

Теорема 4. *Существует арифметически насыщенная модель, не являющаяся достаточно насыщенной.*

Доказательство. Действительно, по теореме 3 существует гиперарифметичное вещественно замкнутое поле, реализующее все арифметические типы над конечными множествами, а по предложению 1 оно не может быть достаточно насыщенным.

Сейчас приведем другое доказательство теоремы 3.

Определение 2. Семейство Γ типов конечной сигнатуры вида $p(x, \vec{y})$ ($\vec{y}$ не содержит x) назовем *гиперарифметическим*, если существует нумерация (сюръективное отображение) $\nu : \omega \to \Gamma$, для которой множество $\{\langle[\varphi], n\rangle \mid \varphi \in \nu(n)\}$ будет гиперарифметическим.

Непосредственно из доказательства теоремы 2 следует

Теорема 5. *Для любых гиперарифметичной модели $\mathfrak{M}$ и гиперарифметического семейства типов Γ одной и той же сигнатуры существует гиперарифметичное Γ-насыщенное элементарное расширение $\mathfrak{M}' \succcurlyeq \mathfrak{M}$.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно применить теорему 5 к разрешимому вещественно замкнутому полю (такая модель существует [7]) и семейству всех арифметических типов (которое, очевидно, будет гиперарифметическим).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теорема Левенгейма — Скулема — Мальцева для определимых моделей // Логические методы в информатике. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1993. С. 9–17. (Вычислительные системы. Вып. 148).
2. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
4. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
5. *Пузаренко В. Г.* Обобщенные нумерации и определимость поля $\mathbb{R}$ в допустимых множествах // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2003. Т. 2, № 3. С. 107–117.
6. *Морозов А. С.* Элементарные подмодели параметризуемых моделей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 595–612.
7. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 1 июня 2010 г.

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vagrig@math.nsc.ru