Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.623.4

ОБ ОДНОЙ СТАТЬЕ Р. БРАУНА

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Установлено достаточное условие существования корня многочлена над гензелевым нормированным полем, расширяющее основной результат работы Брауна [1].

Ключевые слова: гензелево нормированное поле, обобщенный многочлен Шёнемана.

В настоящей заметке будет установлено уточнение основного результата интересной статьи Р. Брауна [1].

Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ — нормированное поле, $\widetilde{F}$ — алгебраическое замыкание поля F, $\widetilde{R}$ — кольцо нормирования поля $\widetilde{F}$ такое, что $\widetilde{R} \cap F = R$, т. е. $\widetilde{\mathbb{F}} = \langle \widetilde{F}, \widetilde{R}\rangle \geqslant \mathbb{F} = \langle F, R\rangle$; $H(\mathbb{F}) = \langle H_R(F), H(R)\rangle \leqslant \widetilde{\mathbb{F}}$ — гензелизация нормированного поля $\mathbb{F}$.

Если $F(x)$ — поле рациональных функций от одной переменной x над F, то через $v_x : F(x)^* \to \Gamma_R$ будем обозначать гауссово расширение нормирования $v_R : F^* \to \Gamma_R$ (т. е. такое нормирование v_x поля $F(x)$, что $v_x(h) = \min\{v_R(a_i) \mid i \leqslant n\}$ для $h = \sum\limits_{i\leqslant n} a_i x^i \in F[x]$).

Пусть $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что $\bar{g} \in F_R[x]$ неприводим.

Без труда проверяется справедливость следующего утверждения.

Замечание 1. Если $\alpha \in R$, $g(\alpha) \in \mathfrak{m}_R (\Leftrightarrow \overline{g(\alpha)} = 0)$ и $\delta h < \delta g$, то $v_x h = v_R h(\alpha)$ (здесь $\delta h (\delta g)$ обозначает степень многочлена $h(g) \in F[x]$).

Будем предполагать для дальнейшего, что выполнены следующие предположения:

$f, g \in R[x]$ — унитарные многочлены, $\delta g < \delta f$ и $f = \sum\limits_{i\leqslant k} A_i g^i$ — g-разложение многочлена f, т. е. $A_i \in R[x]$, и $\delta A_i < \delta g$, $i \leqslant k$;

$(*)$ для некоторого натурального e такого, что $0 < e \leqslant k$, $v_x A_e = 0$, $v_x A_0 > 0$ и $e v_x A_i \geqslant (e-i) v_x A_0 \big(v_x A_i \geqslant \frac{e-i}{e} v_x A_0\big)$ для $0 < i < e$.

Замечание 2. Число e в условии $(*)$ определяется однозначно следующим легко проверяемым свойством: $\bar{g}^e \mid \bar{f}$ и $\bar{g}^{e+1} \nmid \bar{f}$ (черта $\mid$ означает делимость).

Пример 1. Если $g \in R[x]$ — унитарный многочлен такой, что $\bar{g}$ неприводим над F_R, $h \in R[x]$ — многочлен такой, что $\delta h < e\delta g$ и $\bar{g} \nmid \bar{h}$, $0 \neq t \in \mathfrak{m}(R)$, то многочлен $f \rightleftharpoons g^e + th$ и g удовлетворяют условию $(*)$.

Действительно, если $h = \sum\limits_{i<e} A'_i g^i$ — g-разложение h, то, полагая $A_e \rightleftharpoons 1$, $A_i \rightleftharpoons tA'_i$, $i < e$, получим, что $f = \sum\limits_{i\leqslant e} A_i g^i$ — g-разложение f. Из условия $\bar{g} \nmid \bar{h}$

следует, что $\overline{A}_0' \neq 0$ ($\Leftrightarrow v_x A_0' = 0$); тогда $v_x A_0 = v_x t A_0' = v_R t + v_x A_0' = v_R t$; $v_x A_0 = v_x 1 = 0$; $v_x A_i = v_x t A_i' = v_R t + v_x A_i' \geqslant v_R t = v_x A_0 \geqslant \frac{e-i}{e} v_x A_0$ для $0 < i < e$.

Следующая лемма является уточнением леммы 4 из [1].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{F}' = \langle F', R' \rangle \geqslant \mathbb{F} = \langle F, R \rangle$, $\alpha \in F'$ *и* $v_{R'} g(\alpha) > 0$, $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$. *Тогда* $v_{R'}(\alpha) \geqslant 0$ $(\alpha \in R')$ *и* $v_{R'}(g(\alpha)^e) = v_x A_0$ $\bigl(v_{R'} g(\alpha) = \frac{1}{e} v_x A_0\bigr)$.

По замечанию 1 имеем $v_x A_i = v_{R'} A_i(\alpha)$, $0 \leqslant i \leqslant h$. Так как α — корень унитарного многочлена $f - f(\alpha) \in R'[x]$, то $\alpha \in R'$, т. е. $v_{R'} \alpha \geqslant 0$. Для $e < i \leqslant k$ имеем

$$\begin{aligned} v_{R'}(A_i(\alpha)(g(\alpha))^i) &= v_{R'} A_i(\alpha) + i v_{R'} g(\alpha) \\ &= v_x A_i + i v_{R'}(g(\alpha)) \geqslant i v_{R'} g(\alpha) > e v_{R'} g(\alpha). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_R' \left(\sum_{i=e}^{k} A_i(\alpha) g(\alpha)^i \right) = v_R A_e(\alpha) g(\alpha)^e = e v_{R'} g(\alpha).$$

Рассмотрим далее следующие случаи.

Случай 1. $v_{R'} g(\alpha) < \frac{1}{e} v_{R'}(A_0(\alpha)) = \frac{1}{e} v_x(A_0)$, т. е. $v_{R'} A_0(\alpha) > e v_{R'} g(\alpha)$. Для $0 < i < e$ имеем

$$\begin{aligned} v_{R'}(A_i(\alpha) g(\alpha)^i) &= v_{R'}(A_i(\alpha)) + i v_{R'}(g(\alpha)) = v_x(A_i) + i v_{R'} g(\alpha) \\ &\geqslant \frac{e-i}{e} v_x A_0 + i v_{R'} g(\alpha) > (e-i) v_{R'} g(\alpha) + i v_{R'} g(\alpha) = e v_{R'} g(\alpha), \end{aligned}$$

но тогда $v_{R'}\bigl(\sum_{i<e} A_i(\alpha) g(\alpha)^i\bigr) > e v_{R'} g(\alpha)$. Вместе с (1) получим

$$v_{R'}(f(\alpha)) = v_{R'} \Bigl(\sum_{i \leqslant k} A_i(\alpha) g(\alpha)^i \Bigr) = e v_{R'} g(\alpha) < v_{R'} A_0(\alpha) = v_x A_0,$$

что противоречит условию $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$.

Случай 1 невозможен.

Случай 2. $v_{R'} g(\alpha) > \frac{1}{e} v_{R'}(A_0(\alpha)) = \frac{1}{e} v_x A_0$. Для $0 < i < e$ имеем

$$\begin{aligned} v_{R'}(A_i(\alpha) g(\alpha)^i) &= v_{R'}(A_i(\alpha)) + i v_{R'} g(\alpha) = v_x A_i + i v_{R'}(g(\alpha)) \\ &> \frac{e-i}{e} v_x A_0 + \frac{i}{e} v_x A_0 = v_x A_0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_{R'} \Bigl(\sum_{i \leqslant e} A_i(\alpha) g(\alpha)^i \Bigr) = v_{R'} A_0(\alpha) = v_x(A_0) < e v_{R'} g(\alpha),$$

и вместе с (1) получим $v_{R'}(f(\alpha)) = v_{R'}\bigl(\sum_{i \leqslant k} A_i(\alpha) g(\alpha)^i\bigr) = v_x(A_0)$, что противоречит условию $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$.

Случай 2 невозможен. Значит, $v_{R'}(g(\alpha)) = \frac{1}{e} v_x A_0$. $\square$

Замечание 3. Если $\delta f = e \delta g$, то условие $v_{R'} g(\alpha) > 0$ в лемме 1 излишне. Оно вытекает из условия $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$.

Следствие 1. *Если выполнены строгие неравенства $ev_xA_i > (e-i)v_xA_0$ для $0 < i < e$, то в условиях леммы справедливо*
$$\overline{A_e(\alpha)g(\alpha)^eA_0(\alpha)^{-1}} = -1.$$

Действительно, так как
$$v_{R'}\left(\sum_{i=e+1}^{k} A_i(\alpha)g(\alpha)^i\right) > ev_{R'}g(\alpha) = v_{R'}(A_eg(\alpha)^e),$$
$$v_{R'}\left(\sum_{i=1}^{e-1} A_i(\alpha)g(\alpha)^i\right) > ev_{R'}g(\alpha),$$
$$v_{R'}f(\alpha) = v_{R'}\left(\sum_{i=0}^{k} A_i(\alpha)g(\alpha)^i\right) > v_{R'}A_0(\alpha) = ev_Rg(\alpha) = v_R(A_eg(\alpha)^e),$$
то
$$v_{R'}(A_eg(\alpha)^e + A_0(\alpha)) > v_{R'}A_0(\alpha),$$
$$v_{R'}(A_e(\alpha)g(\alpha)^e + A_0(\alpha)) = v_{R'}(A_0(\alpha)) + v_{R'}(A_e(\alpha)g(\alpha)^eA_0(\alpha)^{-1} + 1),$$
следовательно, $v_{R'}(A_e(\alpha)g(\alpha)^eA_0(\alpha)^{-1} + 1) > 0$ и $\overline{A_e(\alpha)g(\alpha)^eA_0(\alpha)^{-1}} = -1$. □

Замечание 4. Условия следствия 1 вытекают из $(*)$, если выполнено условие

$(+)$ $\quad v_xA_0 \notin s\Gamma_R$ для любого делителя $s > 1$ числа e.

Действительно, предположив, что $ev_xA_i = (e-i)v_xA_0$ для некоторого $0 < i < e$, имеем $\frac{e-i}{e}v_xA_0 = v_xA_i \in \Gamma_R$. Представим дробь $\frac{e-i}{e}$ в виде несократимой дроби $\frac{e-i}{e} = \frac{e_0}{e_1}$, где e_0 и e_1 — взаимно простые делители чисел $e-i$ и e соответственно и $e_1 > 1$. Так как e_0 и e_1 взаимно просты, существуют целые m_0 и m_1 такие, что $m_0e_0 + m_1e_1 = 1$.

Имеем
$$\frac{e_0}{e_1}v_xA_0 \in \Gamma_R, \quad e_0v_xA_0 \in e_1\Gamma_R, \quad m_0e_0v_xA_0 \in e_1\Gamma_R,$$
$$m_1e_1v_xA_0 \in e_1\Gamma_R, \quad v_xA_0 = (m_0e_0 + m_1e_1)v_xA_0 \in e_1\Gamma_R,$$
что приводит к противоречию.

Следствие 2. *Если выполнено условие $(+)$, $\alpha \in \widetilde{F}$ — корень многочлена f такой, что $g(\alpha) \in \mathfrak{m}_R$ $(\overline{g(\alpha)} = 0)$, $R' \rightleftharpoons \widetilde{R} \cap R(\alpha)$, то индекс ветвления расширения $\langle F(\alpha), R'\rangle \geqslant \langle F, R\rangle$ нормирования полей делится на e, а относительная степень $[F_{R'} : F_R]$ делится на δg.*

Так как $f(\alpha) = 0$ и $\overline{g(\alpha)} = 0$, для α выполнены условия леммы. Следовательно, $ev_{R'}g(\alpha) = v_{x'}A_0$. Из $\Gamma_R \leqslant \Gamma_R + \langle v_{R'}g(\alpha)\rangle \leqslant \Gamma_{R'}$ и условий следует, что $[\Gamma_R + (v_{R'}g(\alpha)) : \Gamma_R] = e$ и e делит $[\Gamma_{R'} : \Gamma]$. Поскольку $\overline{g(\alpha)}$ неприводим над F_R, то $[F_R(\alpha) : F_R] = \delta\bar{g} = \delta g$ и δg делит $[F_{R'} : F_R]$. □

Замечание 5. Теорема 1.1 из [2] легко вытекает из следствия 2.

Действительно, если (в обозначениях работы [2])
$$\bar{f} = \bar{g_1}^{e_1} \ldots \bar{g_r}^{e_r},$$
то, выбирая корни $\Theta_1, \ldots, \Theta_r \in \widetilde{F}$ многочлена f так, что
$$\overline{g_i(\Theta_i)} = 0, \quad i \leqslant i \leqslant r,$$
и полагая $R_i \rightleftharpoons \widetilde{R} \cap F(\Theta_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, получаем r неэквивалентных расширений $\langle F(\Theta_i), R_i\rangle \geqslant \langle F, R\rangle$, $i \leqslant i \leqslant r$, которые исчерпывают все возможные расширения $\langle F, R\rangle$ на $F(\Theta)$, где Θ — корень многочлена f. Это сразу вытекает из основного неравенства и следствия 2.

Следствие 3. *Если многочлены f и g удовлетворяют условию $(+)$, $f_0 \in R[x]$ — унитарный многочлен, являющийся делителем $f(f_0 \mid f)$, такой, что $\bar{f}_0 = \bar{g}^{e_0}$, то $e_0 = e$ и f_0 неприводим над F.*

Действительно, если $\alpha \in \widetilde{F}$ — корень многочлена f_0, то α удовлетворяет условиям следствия 2 и тогда $\delta f_0 = e_0 \cdot \delta g \geqslant [F(\alpha) : F] \geqslant e \cdot \delta g$. Отсюда и из того, что $e_0 \leqslant e$, следует, что $e_0 = e$, $\delta f_0 = [F(\alpha) : F]$ и f_0 неприводим. $\square$

Пример 2. Если в примере 1 элемент $0 \neq t \in \mathfrak{m}(R)$ удовлетворяет условию $v_R t \notin s\Gamma_R$ для любого делителя $s > 1$ числа e, то многочлен $f = g^e + th$ называется *обобщенным многочленом Шёнемана.* Так как $v_x A_0 = v_R t$, выполнено условие $(+)$ и по следствию 3 f неприводим.

Приведем теперь расширение теоремы 5 из [1]. Пусть $\mathbb{F}' = \langle F', R' \rangle \geqslant \mathbb{F}$ — гензелево расширение; гензелевость $\mathbb{F}'$ влечет существование унитарного многочлена $f_0 \in F'[x]$, являющегося делителем многочлена f, такого, что $\bar{f}_0 = \bar{g}^e$.

Теорема. *Пусть f и g удовлетворяют еще условиям $(+)$, $\bar{g}$ сепарабелен над F_R и e не делится на характеристику поля F_R. Если существует $\alpha \in R'$ такой, что $v_{R'} f(\alpha) > v_x A_0$, то многочлен f_0 имеет корень $\alpha_0 \in R'$ такой, что $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}$.*

Так как $\bar{g}$ сепарабелен над F_R, $\overline{g(\alpha)} = 0$, по лемме Гензеля в R' существует корень β многочлена g такой, что $\bar{\beta} = \bar{\alpha}$. По следствию 1 леммы 1 имеем $\overline{A_e(\alpha) g(\alpha)^e A_0(e)^{-1}} = -1$.

Поскольку e не делится на характеристику поля $F_{R'}$, по лемме Гензеля в поле F' существует элемент γ_0 такой, что $\gamma_0^e = -A_e(\alpha) g(\alpha)^e A_0(\alpha)$. Полагая $\gamma_1 \rightleftharpoons \gamma_0 g(\alpha)^{-1}$, имеем $\gamma_1^e = -A_e(\alpha) A_0(\alpha)^{-1}$. Так как $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, то

$$v_{R'}(A_0(\alpha) - A_0(\beta)) > v_{R'} A_0(\alpha), \quad v_{R'}(A_e(\alpha) - A_e(\beta)) > v_{R'} A_e(\alpha)$$

и

$$v_{R'}(-A_e(\alpha) A_0(\alpha)^{-1} + A_e(\beta) A_0(\beta)^{-1}) > v_{R'}(A_e(\alpha) A_0(\alpha)^{-1}).$$

Отсюда и из леммы 2 (ниже) следует существование элемента $\gamma \in F'$ такого, что $\gamma^e = -A_e(\beta) A_0(\beta)^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{F}' = \langle F', R' \rangle$ — гензелево нормированное поле, натуральное число e не делится на характеристику поля $F_{R'}$ и элементы $a, b, c \in F'$ таковы, что $c^e = a$ и $v_{R'}(a) < v_{R'}(a - b)$. Тогда уравнение $x^e - b = 0$ разрешимо в F'.*

Имеем $a - b = a(1 - ba^{-1})$, тогда $v_{R'}(1 - ba^{-1}) = v_R(a - b) - v_R(a) > 0$, $ba^{-1} = 1 - (1 - ba^{-1})$ и $\overline{ba^{-1}} = 1$. По лемме Гензеля найдется элемент $d \in F'$ такой, что $d^e = ba^{-1}$, но тогда $b = aba^{-1} = ad^e = (cd)^e$. $\square$

Пусть $\alpha_0 \in \widetilde{F}$ — корень многочлена f_0 такой, что $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}$. Тогда, рассматривая нормированное поле $\langle H_R(F)(\alpha_0), \widetilde{R} \cap H_R(F)(\alpha_0) \rangle$, а элемент α_0 в качестве $\mathbb{F}'$ и α, как и выше, найдем в $H_R(F)(\alpha_0)$ корень β_0 многочлена g такой, что $\bar{\beta}_0 = \bar{\alpha}$, и элемент γ_0 такой, что $\gamma_0^e = -A_e(\beta_0) A_0(\beta_0)^{-1}$. Нетрудно установить $H(F)$-изоморфное вложение φ поля $H(F)(\beta_0, \gamma_0)$ в поле F' такое, что $\varphi(\beta_0) = \beta, \varphi(\gamma_0) = \gamma$. Остается заметить, что $H(F)(\beta_0, \gamma_0) = H(F)(\alpha_0)$. Действительно, $H(F)(\beta_0, \gamma_0) \leqslant H(F)(\alpha_0)$, $\langle H(F)(\beta_0), \widetilde{R} \cap H(F)(\beta_0) \rangle \geqslant H(\mathbb{F})$ — неразветвленное расширение степени δg, $\langle H(F), (\gamma, \beta_0, \gamma_0), \widetilde{R} \cap HF(\beta_0, \gamma_0) \rangle \geqslant \langle H(F)(\beta_0), \widetilde{R} \cap H(F)(\beta_0) \rangle$ — вполне разветвленное расширение степени ветвления e. Тогда

$$[H(F)(\beta_0, \gamma_0) : H(F)] = e\delta g = \delta f_0 = [H(F)(\alpha_0) : H(F)].$$

Итак, $H(F)(\beta_0, \gamma_0) = H(F)(\alpha_0)$, и тогда элемент $\varphi(\alpha_0) \in F'$ является корнем многочлена f_0. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown R.* Roots of generalized Schönemann polynomials in Henselian extension fields // Indian J. Pure Appl. Math. 2008. V. 39, N 5. P. 403–410.
2. *Khanduja S. K., Kumar M. Prolongations of valuations to finite extensions* // Manuscr. Math. 2010. V. 131. P. 323–334.

Статья поступила 29 сентября 2010 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru