Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 514.113.5+514.132

НЕЖЕСТКИЙ МНОГОГРАННИК С НЕНУЛЕВОЙ ВАРИАЦИЕЙ ОБЪЕМА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Д. А. Слуцкий

Аннотация. Построен пример нежесткого многогранника в трехмерном пространстве Лобачевского и указано бесконечно малое изгибание, при котором его объем нестационарен.

Ключевые слова: нежесткий многогранник, пространство Лобачевского, гиперболическое пространство, объем, интегральная средняя кривизна, бесконечно малое изгибание, формула Шлефли.

Введение

В 1996 г. И. Х. Сабитов [1] доказал гипотезу кузнечных мехов в трехмерном евклидовом пространстве, которая утверждает, что объем многогранника в процессе изгибания остается постоянным. В 1997 г. В. А. Александров [2] построил пример изгибаемого многогранника в трехмерном сферическом пространстве, который в процессе изгибания изменяет свой объем. Вопрос о том, всякий ли изгибаемый многогранник в пространстве Лобачевского сохраняет свой объем в процессе изгибания, не решен до сих пор.

В примечании редактора перевода в [3] И. Х. Сабитов предложил рассматривать гипотезу кузнечных мехов на уровне бесконечно малых изгибаний. Несколько огрубляя ситуацию, вопрос И. Х. Сабитова можно сформулировать так: верно ли, что при любом бесконечно малом изгибании замкнутой поверхности объем, ограниченный ею, стационарен? В случае положительного ответа на вопрос И. Х. Сабитова мы бы автоматически получили истинность гипотезы кузнечных мехов для изгибаемых многогранников. Конечно, всегда можно дополнительно триангулировать некоторую исходную грань многогранника так, чтобы какая-то вершина A триангуляции была внутренней точкой исходной грани, затем приписать вершине A ненулевой вектор скорости, ортогональный исходной грани, оставив при этом другие вершины многогранника неподвижными, и на основе такой деформации вершин нового многогранника построить его бесконечно малое изгибание. Объем многогранника с ложной вершиной под действием построенного бесконечно малого изгибания будет нестационарен, но этот тривиальный пример не представляет большого интереса для изучения вопроса о постоянстве объема изгибаемых многогранников.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ–6613.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–91000–анф).

В. А. Александров в [4], построив нетривиальный контрпример, дал отрицательный ответ на вопрос И. Х. Сабитова для нежестких многогранников в трехмерном евклидовом пространстве. Из упомянутого в [2] примера изгибаемого многогранника в трехмерном сферическом пространстве, который в процессе изгибания изменяет свой объем, очевидно вытекает, что для нежестких многогранников в трехмерном сферическом пространстве ответ на этот вопрос тоже отрицателен. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *В трехмерном пространстве Лобачевского существует вложенный гомеоморфный сфере нежесткий многогранник, объем которого нестационарен при некотором бесконечно малом изгибании.*

Многогранник, о котором идет речь в теореме, построен явно. Он аналогичен многограннику в евклидовом пространстве, построенному А. Д. Александровым и С. М. Владимировой [5] и позднее изучавшемуся А. Д. Милкой [6].

§ 1. Построение многогранника

Рассмотрим правильную n-угольную невыпуклую пирамиду $\mathcal{P}$ в трехмерном пространстве Лобачевского, в основании которой лежит правильная n-угольная звезда с вершинами A_i, B_i, $i = 1, \ldots, n$, а ортогональная проекция вершины N пирамиды совпадает с центром C этой звезды (рис. 1). Всюду в этой статье *многогранником* мы называем многогранную поверхность. Отразим пирамиду $\mathcal{P}$ относительно плоскости ее основания. Обозначим через $\mathcal{S}$ подвеску, которая является объединением исходной и отраженной пирамид за вычетом их общего основания. Точку, симметричную N относительно плоскости основания $\mathcal{P}$, обозначим через S. *Экватором подвески* $\mathcal{S}$ называем цикл, образованный ребрами основания пирамиды $\mathcal{P}$.

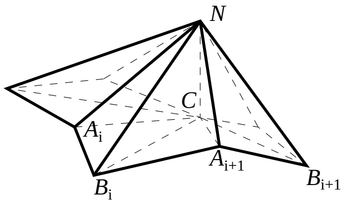

Рис. 1. Боковая поверхность $\mathcal{P}$.

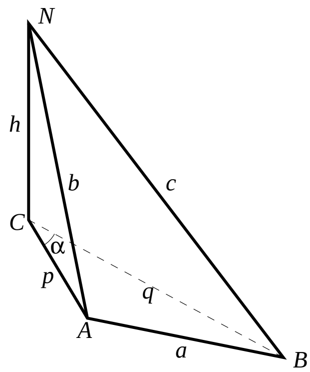

Рис. 2. Тетраэдр $\mathcal{T}$.

Отметим, что по построению длины всех ребер экватора $\mathcal{S}$ равны друг другу. Кроме того, равны между собой длины всех ребер SA_i, NA_i, $i = 1, \ldots, n$, а также длины всех ребер NB_i, SB_i, $i = 1, \ldots, n$.

В силу построения подвеска $\mathcal{S}$ обладает множеством симметрий и ограниченное $\mathcal{S}$ пространственное тело состоит из одинаковых «кирпичиков» — тетраэдров. Один из таких тетраэдров изображен на рис. 2. Обозначим его поверхность через $\mathcal{T}$, а вершины — через N, A, B, C. Обратим внимание, что по построению $\angle ACN = \angle BCN = \pi/2$. Для длин ребер и плоских углов тетраэдра $\mathcal{T}$ используем следующие обозначения: $|CN| = h$, $|CA| = p$, $|CB| = q$, $|AB| = a$, $|NA| = b$, $|NB| = c$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle CAN = \beta$, $\angle BAN = \gamma$, $\angle CAB = \delta$,

$\angle CBN = \varphi$, $\angle CBA = \psi$, $\angle ABN = \theta$, $\angle ANB = \lambda$, $\angle CNA = \mu$, $\angle CNB = \nu$. Обозначим двугранные углы тетраэдра $\mathcal{T}$ при ребре AB через $\angle AB$, при ребре NA — через $\angle NA$, при ребре NB — через $\angle NB$.

По построению двугранный угол тетраэдра $\mathcal{T}$ при ребре CN равен α, двугранные углы подвески $\mathcal{S}$ при ребрах экватора равны $2\angle AB$, при ребрах NA_i и SA_i, $i = 1, \dots, n$, равны $2\angle NA$, при ребрах NB_i и SB_i, $i = 1, \dots, n$, равны $2\angle NB$.

Далее мы покажем, что в качестве многогранника, существование которого утверждается в теореме, можно взять построенную выше подвеску $\mathcal{S}$.

§ 2. Условие нежесткости

Деформацией многогранной поверхности $\mathcal{S}$ называется семейство поверхностей $\mathcal{S}(t)$, $t \in (-1, 1)$, непрерывно зависящее от параметра t, сохраняющее комбинаторную структуру многогранника $\mathcal{S}$ и такое, что $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}$.

Деформация многогранной поверхности $\mathcal{S}$ с треугольными гранями называется ее *бесконечно малым изгибанием*, если при $t = 0$ длины всех ребер поверхности $\mathcal{S}(t)$ стационарны.

Бесконечно малое изгибание называется *нетривиальным*, если найдутся две вершины, не соединенные ребром, пространственное расстояние между которыми нестационарно.

Многогранник называется *нежестким*, если для него найдется нетривиальное бесконечно малое изгибание.

Рассмотрим деформацию подвески $\mathcal{S}$, определяемую следующим образом. Точка C неподвижна. Точка N в момент времени t переходит в точку $N(t)$, которая лежит на луче $\overrightarrow{CN}$ и находится от точки C на расстоянии, определяемом формулой

$$h(t) = h + tu, \tag{1}$$

где u — вещественное число, которое имеет смысл скорости и которое мы конкретизируем в ходе дальнейшего рассмотрения. Точка S в момент времени t переходит в точку $S(t)$, лежащую на луче $\overrightarrow{CS}$ и находящуюся от точки C на расстоянии, также определяемом формулой (1). Точка A_i, $i = 1, \dots, n$, в момент времени t переходит в точку $A_i(t)$, которая лежит на луче $\overrightarrow{CA_i}$ и находится от точки C на расстоянии, определяемом формулой $p(t) = p + tv$, где v — некоторое вещественное число, которое имеет смысл скорости. Точка B_i, $i = 1, \dots, n$, в момент времени t переходит в точку $B_i(t)$, лежащую на луче $\overrightarrow{CB_i}$ и находящуюся от точки C на расстоянии, определяемом формулой $q(t) = q + tw$, где w — вещественное число, которое имеет смысл скорости и которое будет уточнено ниже.

Для определения движения других точек подвески $\mathcal{S}(t)$ воспользуемся утверждением теоремы Чевы в пространстве Лобачевского [7]. *На сторонах BC, CA и AB треугольника $\triangle ABC$ взяты точки $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$. Тогда отрезки $A\widetilde{A}$, $B\widetilde{B}$ и $C\widetilde{C}$ пересекаются в одной точке в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих эквивалентных соотношений:*

$$\frac{\sin\angle AC\widetilde{C}}{\sin\angle\widetilde{C}CB}\frac{\sin\angle BA\widetilde{A}}{\sin\angle\widetilde{A}AC}\frac{\sin\angle CB\widetilde{B}}{\sin\angle\widetilde{B}BA} = 1, \quad \frac{\operatorname{sh} A\widetilde{C}}{\operatorname{sh}\widetilde{C}B}\frac{\operatorname{sh} B\widetilde{A}}{\operatorname{sh}\widetilde{A}C}\frac{\operatorname{sh} C\widetilde{B}}{\operatorname{sh}\widetilde{B}A} = 1. \tag{2}$$

В терминах формулировки теоремы Чевы в качестве нового положения произвольной точки P ребра AB в момент времени t возьмем такую точку $P(t)$

отрезка $A(t)B(t)$, для которой справедливо равенство

$$\frac{\operatorname{sh} A(t)P(t)}{\operatorname{sh} P(t)B(t)} = \frac{\operatorname{sh} AP}{\operatorname{sh} PB}.$$

Для того чтобы определить движение внутренней точки Q грани $\triangle ABC$, построим сначала точки $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ как пересечения ребер BC, CA и AB с лучами AQ, BQ и CQ и определим их положения $\widetilde{A}(t)$, $\widetilde{B}(t)$ и $\widetilde{C}(t)$ в момент времени t методом, описанным выше. По теореме Чевы отрезки $A(t)\widetilde{A}(t)$, $B(t)\widetilde{B}(t)$ и $C(t)\widetilde{C}(t)$ пересекаются в одной точке (соотношение (2) остается верным при любом t). Эту точку мы и будем считать новым положением $Q(t)$ точки Q в момент времени t.

Описанная деформация подвески естественным образом порождает деформацию тетраэдра $\mathcal{T}$, которую мы обозначаем через $\mathcal{T}(t)$. Длины всех ребер, а также величины плоских и двугранных углов тетраэдра $\mathcal{T}(t)$ являются функциями параметра t, и их обозначения наследуются из обозначений для соответствующих величин тетраэдра $\mathcal{T}$, например, длину ребра $|N(t)A(t)|$ обозначаем через $b(t)$, величину угла $\angle CA(t)N(t)$ — через $\beta(t)$, а значение двугранного угла $\mathcal{T}(t)$ при ребре $N(t)A(t)$ — через $\angle N(t)A(t)$ и т. д.

Найдем соотношения на u, v и w, при которых эта деформация является бесконечно малым изгибанием. Поскольку изгибания всех граней подвески $\mathcal{S}$ однотипны, достаточно изучить такую деформацию для грани ABN тетраэдра $\mathcal{T}$.

Применим теорему Пифагора для пространства Лобачевского [8] к треугольнику $\triangle N(t)CA(t)$:

$$\operatorname{ch} b(t) = \operatorname{ch}(h + tu)\operatorname{ch}(p + tv), \tag{3}$$

и к треугольнику $\triangle N(t)CB(t)$:

$$\operatorname{ch} c(t) = \operatorname{ch}(h + tu)\operatorname{ch}(q + tw), \tag{4}$$

тетраэдра $\mathcal{T}(t)$.

Поскольку угол α в ходе деформации не меняется и остается равным $\frac{\pi}{n}$, по теореме косинусов для пространства Лобачевского [8], примененной к треугольнику $\triangle A(t)CB(t)$, имеем

$$\operatorname{ch} a(t) = \operatorname{ch}(p + tv)\operatorname{ch}(q + tw) - \operatorname{sh}(p + tv)\operatorname{sh}(q + tw)\cos\alpha. \tag{5}$$

Далее нам будет удобно следить за стационарностью не самой длины $l(t)$ какого-то ребра многогранника $\mathcal{S}(t)$, а за стационарностью функции $f(t) = \operatorname{ch} l(t)$, ведь $f'(0) = l'(0)\operatorname{sh} l(0)$ и тем самым $f'(0) = 0$ тогда и только тогда, когда $l'(0) = 0$, поскольку $l(0) > 0$.

Продифференцируем соотношение (3): $(\operatorname{ch} b(t))' = u\operatorname{sh}(h + tu)\operatorname{ch}(p + tv) + v\operatorname{ch}(h + tu)\operatorname{sh}(p + tv)$. Тогда условие стационарности длины $b(t)$ ребра $N(t)A(t)$ эквивалентно тому, что $(\operatorname{ch} b(t))'|_{t=0} = u\operatorname{sh} h\operatorname{ch} p + v\operatorname{ch} h\operatorname{sh} p = 0$, или

$$v = -\frac{\operatorname{th} h}{\operatorname{th} p}u. \tag{6}$$

Аналогично стационарность длины $c(t)$ ребра $N(t)B(t)$ эквивалентна условию

$$w = -\frac{\operatorname{th} h}{\operatorname{th} q}u. \tag{7}$$

Продифференцировав соотношение (5), найдем условие стационарности длины $a(t)$ ребра $A(t)B(t)$ в момент времени $t=0$:

$$(\operatorname{ch} a(t))'|_{t=0} = v \operatorname{sh} p \operatorname{ch} q + w \operatorname{ch} p \operatorname{sh} q - \cos\alpha\{v \operatorname{ch} p \operatorname{sh} q + w \operatorname{sh} p \operatorname{ch} q\} = 0. \qquad (8)$$

Подставив (6) и (7) в (8), получаем

$$u \operatorname{th} h\left[\cos\alpha\left\{\frac{\operatorname{ch} p \operatorname{sh} q}{\operatorname{th} p} + \frac{\operatorname{sh} p \operatorname{ch} q}{\operatorname{th} q}\right\} - \frac{\operatorname{sh} p \operatorname{ch} q}{\operatorname{th} p} - \frac{\operatorname{ch} p \operatorname{sh} q}{\operatorname{th} q}\right] = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая деформация подвески $\mathcal{S}$ является бесконечно малым изгибанием, если выполнены соотношения (6), (7) и

$$\cos\alpha\left\{\frac{\operatorname{ch} p \operatorname{sh} q}{\operatorname{th} p} + \frac{\operatorname{sh} p \operatorname{ch} q}{\operatorname{th} q}\right\} = 2 \operatorname{ch} p \operatorname{ch} q.$$

Тем самым подвеска $\mathcal{S}$ допускает бесконечно малое изгибание описанного в начале этого параграфа вида, если и только если p, q и α связаны следующим образом:

$$\frac{\operatorname{th} p}{\operatorname{th} q} = \frac{1 \pm \sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (9)$$

Построенное изгибание является нетривиальным, потому что расстояние между полюсами $N(t)$ и $S(t)$ нестационарно.

§ 3. Вычисление метрических элементов тетраэдра $\mathcal{T}(t)$

Получим формулы для двугранных углов $\angle A(t)B(t)$, $\angle N(t)A(t)$, $\angle N(t)B(t)$ тетраэдра $\mathcal{T}(t)$, которые нам понадобятся для доказательства теоремы.

Вычислим для начала синусы и косинусы плоских углов тетраэдра $\mathcal{T}(t)$.

Для вычисления косинуса угла $\beta(t)$ применим теорему косинусов для пространства Лобачевского к треугольнику $\triangle CA(t)N(t)$:

$$\operatorname{ch}(h+tu) = \operatorname{ch}(p+tv)\operatorname{ch} b(t) - \operatorname{sh}(p+tv)\operatorname{sh} b(t)\cos\beta(t).$$

Тогда с учетом (3) и формул гиперболической тригонометрии получаем

$$\cos\beta(t) = \frac{\operatorname{sh}(p+tv)\operatorname{ch}(h+tu)}{\operatorname{sh} b(t)} = \frac{\operatorname{sh}(p+tv)\operatorname{ch}(h+tu)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(p+tv)-1}}. \qquad (10)$$

Для вычисления синуса угла $\beta(t)$ применим теорему синусов для пространства Лобачевского [8] к треугольнику $\triangle CA(t)N(t)$:

$$\frac{\sin\beta(t)}{\operatorname{sh}(h+tu)} = \frac{\sin\pi/2}{\operatorname{sh} b(t)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(p+tv)-1}},$$

а значит,

$$\sin\beta(t) = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)}{\operatorname{sh} b(t)} = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(p+tv)-1}}. \qquad (11)$$

Аналогично получаем формулы для косинуса и синуса угла $\varphi(t)$ в $\triangle CB(t)N(t)$:

$$\cos\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh}(q+tw)\operatorname{ch}(h+tu)}{\operatorname{sh} c(t)} = \frac{\operatorname{sh}(q+tw)\operatorname{ch}(h+tu)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(q+tw)-1}}, \qquad (12)$$

$$\sin\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)}{\operatorname{sh} c(t)} = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(q+tw)-1}}; \tag{13}$$

формулы для косинуса и синуса угла $\mu(t)$ в $\triangle CA(t)N(t)$:

$$\cos\mu(t) = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)\operatorname{ch}(p+tv)}{\operatorname{sh} b(t)} = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)\operatorname{ch}(p+tv)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(p+tv)-1}}, \tag{14}$$

$$\sin\mu(t) = \frac{\operatorname{sh}(p+tv)}{\operatorname{sh} b(t)} = \frac{\operatorname{sh}(p+tv)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(p+tv)-1}}; \tag{15}$$

формулы для косинуса и синуса угла $\nu(t)$ в $\triangle CB(t)N(t)$:

$$\cos\nu(t) = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)\operatorname{ch}(q+tw)}{\operatorname{sh} c(t)} = \frac{\operatorname{sh}(h+tu)\operatorname{ch}(q+tw)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(q+tw)-1}}, \tag{16}$$

$$\sin\nu(t) = \frac{\operatorname{sh}(q+tw)}{\operatorname{sh} c(t)} = \frac{\operatorname{sh}(q+tw)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(h+tu)\operatorname{ch}^2(q+tw)-1}}. \tag{17}$$

Теорема косинусов для пространства Лобачевского, дважды примененная к треугольнику $\triangle A(t)CB(t)$, приводит нас к формулам

$$\cos\delta(t) = \frac{\operatorname{ch}(p+tv)\operatorname{ch} a(t) - \operatorname{ch}(q+tw)}{\operatorname{sh}(p+tv)\operatorname{sh} a(t)}, \tag{18}$$

$$\cos\psi(t) = \frac{\operatorname{ch}(q+tw)\operatorname{ch} a(t) - \operatorname{ch}(p+tv)}{\operatorname{sh}(q+tw)\operatorname{sh} a(t)}. \tag{19}$$

Из теоремы синусов для пространства Лобачевского, примененной к треугольнику $\triangle A(t)CB(t)$, следует, что

$$\frac{\sin\delta(t)}{\operatorname{sh}(q+tw)} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{sh} a(t)} = \frac{\sin\psi(t)}{\operatorname{sh}(p+tv)}.$$

Таким образом, справедливы формулы

$$\sin\delta(t) = \frac{\sin\alpha\operatorname{sh}(q+tw)}{\operatorname{sh} a(t)}, \tag{20}$$

$$\sin\psi(t) = \frac{\sin\alpha\operatorname{sh}(p+tv)}{\operatorname{sh} a(t)}. \tag{21}$$

Теорема косинусов для пространства Лобачевского, трижды примененная к треугольнику $\triangle A(t)N(t)B(t)$, приводит нас к следующим формулам:

$$\cos\theta(t) = \frac{\operatorname{ch} a(t)\operatorname{ch} c(t) - \operatorname{ch} b(t)}{\operatorname{sh} a(t)\operatorname{sh} c(t)}, \tag{22}$$

$$\cos\gamma(t) = \frac{\operatorname{ch} a(t)\operatorname{ch} b(t) - \operatorname{ch} c(t)}{\operatorname{sh} a(t)\operatorname{sh} b(t)}, \tag{23}$$

$$\cos\lambda(t) = \frac{\operatorname{ch} b(t)\operatorname{ch} c(t) - \operatorname{ch} a(t)}{\operatorname{sh} b(t)\operatorname{sh} c(t)}. \tag{24}$$

Величины $\operatorname{sh} a(t)$, $\operatorname{sh} b(t)$ и $\operatorname{sh} c(t)$ из формул (10)–(24) с учетом (5), (3) и (4) вычисляются так:

$$\operatorname{sh} a(t)=\sqrt{\operatorname{ch}^2 a(t)-1}=\sqrt{(\operatorname{ch}(p+tv)\operatorname{ch}(q+tw)-\operatorname{sh}(p+tv)\operatorname{sh}(q+tw)\cos\alpha)^2-1},$$

$$\operatorname{sh} b(t)=\sqrt{\operatorname{ch}^2 b(t)-1}=\sqrt{(\operatorname{ch}(h+tu)\operatorname{ch}(p+tv))^2-1},$$

$$\operatorname{sh} c(t)=\sqrt{\operatorname{ch}^2 c(t)-1}=\sqrt{(\operatorname{ch}(h+tu)\operatorname{ch}(q+tw))^2-1}.$$

Поскольку величины углов в гиперболическом треугольнике больше 0 и меньше π, синусы углов треугольника неотрицательны и, следовательно, $\sin\theta(t)$, $\sin\gamma(t)$ и $\sin\lambda(t)$ вычисляются по формулам $\sin\theta(t)=\sqrt{1-\cos^2\theta(t)}$, $\sin\gamma(t)=\sqrt{1-\cos^2\gamma(t)}$, $\sin\lambda(t)=\sqrt{1-\cos^2\lambda(t)}$.

Рассмотрим сферу Σ единичного радиуса с центром в вершине $A(t)$ тетраэдра $\mathcal{T}(t)$. Обозначим через $C_A(t)$, $N_A(t)$ и $B_A(t)$ точки пересечения сферы Σ с лучами $\overrightarrow{A(t)C}$, $\overrightarrow{A(t)N(t)}$ и $\overrightarrow{A(t)B(t)}$ соответственно. Они определяют треугольник $\triangle C_A(t)N_A(t)B_A(t)$, состоящий из точек пересечения сферы Σ и лучей, выпущенных из точки $A(t)$ и проходящих через точки грани $\triangle CB(t)N(t)$ тетраэдра $\mathcal{T}(t)$. По построению угол сферического треугольника $\triangle C_A(t)N_A(t)B_A(t)$ при вершине $C_A(t)$ равен $\pi/2$, угол при $N_A(t)$ равен $\angle N(t)A(t)$, угол при $B_A(t)$ равен $\angle A(t)B(t)$, длина стороны $C_A(t)N_A(t)$ равна $\beta(t)$, длина $N_A(t)B_A(t)$ равна $\gamma(t)$, длина $C_A(t)B_A(t)$ равна $\delta(t)$.

Аналогично строится сферический треугольник $\triangle C_B(t)N_B(t)A_B(t)$, угол которого при вершине $C_B(t)$ равен $\pi/2$, угол при $N_B(t)$ равен $\angle N(t)B(t)$, угол при $A_B(t)$ равен $\angle A(t)B(t)$, длина стороны $C_B(t)N_B(t)$ равна $\varphi(t)$, длина стороны $N_B(t)A_B(t)$ равна $\theta(t)$, длина $C_B(t)A_B(t)$ равна $\psi(t)$.

Дважды применяя теорему косинусов для сферического пространства [8] к треугольнику $\triangle C_A(t)N_A(t)B_A(t)$, получаем формулы

$$\cos\angle A(t)B(t)=\frac{\cos\beta(t)-\cos\gamma(t)\cos\delta(t)}{\sin\gamma(t)\sin\delta(t)},$$

$$\cos\angle N(t)A(t)=\frac{\cos\delta(t)-\cos\gamma(t)\cos\beta(t)}{\sin\gamma(t)\sin\beta(t)}.$$

Применяя теорему косинусов для сферического пространства к треугольнику $\triangle C_B(t)N_B(t)A_B(t)$, имеем

$$\cos\angle N(t)B(t)=\frac{\cos\psi(t)-\cos\varphi(t)\cos\theta(t)}{\sin\varphi(t)\sin\theta(t)}.$$

Применим теорему синусов для сферического пространства [8] к треугольнику $\triangle C_A(t)N_A(t)B_A(t)$:

$$\frac{\sin\angle N(t)A(t)}{\sin\delta(t)}=\frac{\sin\angle A(t)B(t)}{\sin\beta(t)}=\frac{\sin\pi/2}{\sin\gamma(t)}.$$

Отсюда следует, что

$$\sin\angle A(t)B(t)=\frac{\sin\beta(t)}{\sin\gamma(t)}\quad\text{и}\quad\sin\angle N(t)A(t)=\frac{\sin\delta(t)}{\sin\gamma(t)}.$$

Теорема синусов для сферического пространства, примененная к треугольнику $\triangle C_B(t)N_B(t)A_B(t)$, записывается в виде

$$\frac{\sin\angle N(t)A(t)}{\sin\nu(t)} = \frac{\sin\angle N(t)B(t)}{\sin\mu(t)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda(t)}.$$

Отсюда ясно, что

$$\sin\angle N(t)B(t) = \sin\alpha\frac{\sin\mu(t)}{\sin\lambda(t)}.$$

Отметим еще следующие очевидные соотношения, которые будут использованы при доказательстве теоремы:

$$\frac{d\angle N(t)A(t)}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt}(\cos\angle N(t)A(t))}{\sin\angle N(t)A(t)}, \quad \frac{d\angle N(t)B(t)}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt}(\cos\angle N(t)B(t))}{\sin\angle N(t)B(t)},$$

$$\frac{d\angle A(t)B(t)}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt}(\cos\angle A(t)B(t))}{\sin\angle A(t)B(t)}.$$

§ 4. Доказательство теоремы

Напомним, что согласно формуле Шлефли для многогранников в трехмерном пространстве Лобачевского [8], кривизна которого равна -1, имеет место равенство

$$dV = -\frac{1}{2}\sum_e l_e\, d\theta_e, \tag{25}$$

где dV — вариация объема многогранника с длинами ребер l_e, $d\theta_e$ — вариация двугранного угла многогранника при соответствующем ребре и суммирование ведется по всем ребрам.

Покажем, что в качестве многогранника, существование которого утверждается в теореме, можно взять многогранник $\mathcal{S}(0)$ из семейства подвесок $\mathcal{S}(t)$, $t \in (-1, 1)$, построенного в § 1, с образующими элементами тетраэдра $\mathcal{T}$

$$p = \operatorname{arth}\frac{1}{2}, \quad q = \operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad h = \operatorname{arth}\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6} \quad (\text{т. е. } n = 6) \tag{26}$$

и скоростями деформации

$$u = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad v = -\frac{\sqrt{3}}{4}, \quad w = -\frac{1}{4}. \tag{27}$$

Подвеска $\mathcal{S}(0)$ нежесткая, поскольку p, q и α из (26) удовлетворяют условию (9).

Убедимся, что в качестве бесконечно малого изгибания, существование которого утверждается в теореме, можно взять нетривиальное бесконечно малое изгибание из § 2 с коэффициентами (27).

По формуле Шлефли (25) с учетом обозначений и замечаний § 1 вариация объема многогранника $\mathcal{S}(t)$ при $t = 0$ записывается так:

$$dV_{\mathcal{S}(0)} = -12\left(a(0)\frac{d\angle A(t)B(t)}{dt}(0) + b(0)\frac{d\angle N(t)A(t)}{dt}(0) + c(0)\frac{d\angle N(t)B(t)}{dt}(0)\right)dt. \tag{28}$$

Подставляя величины из (26) и (27) в формулы § 2, 3, последовательно находим значения гиперболических косинусов длин сторон и вариаций двугранных углов тетраэдра $\mathcal{T}(t)$ при $t = 0$:

$$\operatorname{ch} a(t) = \operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\operatorname{ch} b(0) = \operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{ch} c(t) = \operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\frac{d\angle A(t)B(t)}{dt}(0) = \frac{\sqrt{13}}{4}, \quad \frac{d\angle N(t)A(t)}{dt}(0) = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \frac{d\angle N(t)B(t)}{dt}(0) = -\frac{\sqrt{13}}{4},$$

и, значит, по формуле (28)

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\mathcal{S}(0)}}{dt} = -12\Bigg[\frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{arch}\Bigg(\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg) + \frac{\sqrt{7}}{4}\operatorname{arch}\left(\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\right)\\
-\frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{arch}\left(\operatorname{ch}\left(\operatorname{arth}\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\Bigg]\\
-3\left[\sqrt{7}\operatorname{arch}\frac{4}{3}+\sqrt{13}\left(\operatorname{arch}\frac{5}{2\sqrt{3}}-\operatorname{arch}\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\right] = -3\left[\sqrt{7}\ln\frac{4+\sqrt{7}}{3}+\sqrt{13}\ln\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right]\\
< -\frac{3\sqrt{7}}{8}\left[8\ln\frac{4+\sqrt{7}}{3}+11\ln\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right]\\
= -\frac{3\sqrt{7}}{8}\ln\left[\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{8}\left(\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)^{11}\right] < 0. \quad \square
\end{aligned}$$

§ 5. Заключительные замечания

Пользуясь обозначениями § 4, определим интегральную среднюю кривизну многогранника $\mathcal{S}(t)$ в трехмерном пространстве Лобачевского следующим образом:

$$M(\mathcal{S}(t)) = \frac{1}{2}\sum_{e} l_e(t)(\pi - \theta_e(t)).$$

Александер в [9] доказал, что интегральная средняя кривизна любого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве стационарна при любом бесконечно малом изгибании.

Длины ребер многогранника $\mathcal{S}(t)$ стационарны при бесконечно малом изгибании подвески $\mathcal{S}(t)$ из § 2. Значит, вариация интегральной средней кривизны многогранника $\mathcal{S}(t)$ при $t = 0$ совпадает с вариацией объема $dV_{\mathcal{S}(0)}$. Стало быть, из доказательства теоремы автоматически следует, что вариация интегральной средней кривизны для построенного изгибания подвески $\mathcal{S}$ не равна нулю. Таким образом, интегральная средняя кривизна нежесткого многогранника не обязательно стационарна в пространстве Лобачевского и сферическом пространстве, но обязательно стационарна в евклидовом пространстве.

Автор благодарит Виктора Алексеевича Александрова за всемерную помощь при подготовке данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция его метрики // Фунд. прикл. математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.

2. *Alexandrov V.* An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space // Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, N 1. P. 11–18.

3. *Коннелли Р.* Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 228–238.

4. *Александров В. А.* Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании поверхности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 16–24.

5. *Александров А. Д., Владимирова С. М.* Об изгибании многогранника с твердыми гранями // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия. 1962. Т. 3, № 13. С. 138–141.

6. *Милка А. Д.* Нежесткие звездчатые бипирамиды А. Д. Александрова и С. М. Владимировой // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, 2000. С. 414–430.

7. *Прасолов В. В.* Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004.

8. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 29. С. 5–146. (Итоги науки и техники).

9. *Alexander R.* Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288, N 2. P. 661–678.

Статья поступила 28 января 2010 г.

Слуцкий Дмитрий Анатольевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`slutski@ngs.ru`