*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 519.237.5*

# УЛУЧШЕНИЕ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

**А. И. Саханенко, Ю. Ю. Линке**

**Аннотация.** Рассмотрена задача оценивания параметра линейной регрессии в случае, когда дисперсии наблюдений зависят от неизвестного параметра модели, а коэффициенты (независимые переменные) измеряются со случайными ошибками. Предложена новая двухшаговая процедура построения оценок, гарантирующая их состоятельность. Найдены общие необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности введенных оценок. Разобран случай, когда эти оценки имеют минимальную асимптотическую дисперсию.

**Ключевые слова:** линейная регрессия, ошибки в независимых переменных, зависимость дисперсии от параметра, двухшаговое оценивание, асимптотически нормальная оценка.

## 1. Введение

**1.1.** Пусть для любого $n$ переменные $\{y_{ni}\}$ и $\{x_{ni}\}$ связаны линейными соотношениями:

$$y_{ni} = \beta_n x_{ni} \quad \text{при } i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

при этом истинные значения параметра $\beta_n$ и числовых последовательностей $\{y_{ni}\}$ и $\{x_{ni}\}$ неизвестны, однако для любого $n$ даны наблюдения $\{(Y_{ni}, X_{ni})\}$, представимые в виде

$$Y_{ni} = y_{ni} + \epsilon_{ni}, \quad X_{ni} = x_{ni} + \delta_{ni}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где $\{\epsilon_{ni}\}$ и $\{\delta_{ni}\}$ — ненаблюдаемые случайные ошибки, распределения которых могут быть неизвестными.

Величины $x_{ni}$ будем называть *коэффициентами*, а описанную модель регрессии — моделью *со случайными ошибками в коэффициентах.* Задача состоит в том, чтобы в модели линейной регрессии (1), (2) оценить неизвестный числовой параметр $\beta_n$.

**1.2.** В [1] для модели (1), (2) при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах (т. е. когда $\delta_{ni} = 0$ при всех $i$ и $n$) решена задача нахождения явной асимптотически наилучшей оценки параметра $\beta_n$ в случае, когда «основные» наблюдения $Y_{ni}$ независимы, а их дисперсии определенным образом зависят от неизвестного параметра $\beta_n$, т. е.

$$\mathbf{E}\epsilon_{ni} = 0, \quad \mathbf{D}\epsilon_{ni} = \sigma_n^2 / w_{ni}(\beta_n, x_{ni}) \quad \text{при всех } i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–12131).

© 2011 Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.

где $\{w_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ — известные функции, а истинное значение параметра $\sigma_n^2$ может быть неизвестным. А именно, в [1] предложен класс оценок $\beta_n^{**}$, строящихся в два этапа, который содержит асимптотически нормальные оценки с минимальной асимптотической дисперсией (мы напомним определение этих оценок в (7)).

При ненулевых ошибках в коэффициентах в задаче (1), (2) мы выделяем два естественных направления для исследований. Первое заключается в том, чтобы взять оценки $\beta_n^{**}$ из [1], построенные при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах, и получить аналоги или усиления основных результатов работы [1] в новой более общей ситуации. Эта задача решается в [2], где найдены общие необходимые и достаточные условия для асимптотической нормальности оценок $\beta_n^{**}$. В частности, в [2] показано, что для асимптотической нормальности оценок $\beta_n^{**}$ необходимым или близким к необходимому является следующее предположение:

$$\bar{\sigma}_{n\delta} := \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}\delta_{ni}\right)^{1/2} = o(n^{-1/4}), \tag{4}$$

в котором налагаются достаточно жесткие требования на точность, с которой необходимо измерять коэффициенты $x_{ni}$, $i = 1, \dots, n$.

В данной статье мы ведем исследование в другом направлении. Одна из целей настоящей работы — построить и исследовать некий новый класс двухшаговых явных оценок $\beta_{n\lambda}^{**}$, которые специально рассчитаны на наличие случайных ошибок в коэффициентах. Эти оценки будут асимптотически нормальными при достаточно широких предположениях. Если выполнены условия (3) и $\bar{\sigma}_{n\delta} = o(1)$ (т. е. при более слабом ограничении, чем (4)), то эти оценки будут также иметь и минимальную асимптотическую дисперсию.

Основная цель настоящей статьи заключается в продолжении начатой в [2–4] разработки некоторого метода исследования асимптотически нормальных оценок параметров в задачах линейной и нелинейной регрессии в случае, когда дисперсии «основных» наблюдений зависят от неизвестных параметров, а коэффициенты (называемые часто «независимыми переменными») измеряются со случайными погрешностями. Наш интерес к простейшей одномерной модели регрессии вызван тем, что для нее можно наглядно продемонстрировать все идеи нашего подхода, не затеняя их громоздкими матричными обозначениями.

Различные постановки регрессионных задач при наличии ошибок в коэффициентах, а также некоторые комментарии и обсуждения проблем, возникающих при оценивании, можно найти, например, в [5–7]. Некоторые (близкие по постановке) модели регрессии со случайными ошибками в коэффициентах рассматриваются, например, в [8–12], но в случае, когда дисперсии не зависят от неизвестного параметра. В работах [13–16] (при отсутствии случайных ошибок в коэффициентах) предполагается зависимость дисперсий наблюдений от неизвестного параметра и применяются некоторые двухшаговые процедуры. Более подробную библиографию можно найти в указанных работах, а также в [17–19].

**1.3.** В настоящей работе, как и в [1–4], оценки $\beta_{n\lambda}^{**}$ для интересующего нас параметра $\beta_n$ строятся в два этапа. На первом шаге мы предлагаем выбрать некоторые постоянные $\{c_{ni}\}$ и ввести просто устроенную и хорошо известную оценку

$$\beta_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_{ni}Y_{ni} \Big/ \sum_{i=1}^{n} c_{ni}X_{ni}. \tag{5}$$

Затем мы должны подобрать функции $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ и $\{\lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ и определить предлагаемую нами оценку

$$\beta^{**}_{n\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{ni}(\beta^*_n, X_{ni})Y_{ni}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_{ni}(\beta^*_n, X_{ni})X_{ni} - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{ni}(\beta^*_n, X_{ni})}. \tag{6}$$

Отметим, что изучавшаяся в [2] оценка $\beta^{**}_n$ является частным случаем этой оценки:

$$\beta^{**}_n = \beta^{**}_{n\lambda} \quad \text{при } \lambda_{ni}(\cdot,\cdot) \equiv 0,\ i = 1,\dots,n. \tag{7}$$

В данной работе будет проведено исследование свойств класса оценок (6) и проблемы выбора функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot), \lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$. В § 2 получены общие необходимые и достаточные условия для асимптотической нормальности наших оценок $\beta^{**}_{n\lambda}$ при, по возможности, минимальных предположениях на неизвестные нам распределения наблюдений. Тем самым мы получаем возможность расширить область возможного практического применения этих оценок и максимально подробно понять, какие характеристики распределений ошибок и в какой степени влияют на поведение этих оценок. В частности, в теореме 1 и следствиях 1 и 2 не требуется даже условие $\bar\sigma_{n\delta} = o(1)$. Отметим, что наиболее наглядным из результатов § 2 является следствие 5 (см. п. 2.7).

Важному вопросу выбора функций, участвующих в определении оценок $\beta^{**}_{n\lambda}$, посвящен § 3. Доказательства всех результатов работы отнесены в § 5. При их выводе используются вспомогательные результаты, которые будут получены в § 4.

С целью упростить обозначения условимся, что символ $\sum$ без индексов в работе используется только вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}$, т. е. только тогда, когда суммирование ведется по переменной $i$ от 1 до $n$. Всюду в работе считаем, что все пределы берутся при $n \to \infty$, а сходимость $\eta_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1)$ означает, что распределение случайной величины $\eta_n$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Авторы благодарят И. С. Борисова за ряд полезных замечаний.

## 2. Условия асимптотической нормальности оценок $\beta^{**}_{n\lambda}$

**2.1.** Положим

$$\tau_{ni} := Y_{ni} - \beta_n X_{ni} \equiv \epsilon_{ni} - \beta_n\delta_{ni}, \quad \zeta_{noi}(\cdot) := \gamma_{ni}(\cdot, X_{ni})X_{ni} - \lambda_{ni}(\cdot, X_{ni}), \tag{8}$$

$$\zeta_{ni}(\cdot) := \gamma_{ni}(\cdot, X_{ni})\tau_{ni} + \beta_n\lambda_{ni}(\cdot, X_{ni}), \quad \zeta^{**}_{ni} := \gamma_{ni}(\beta^*_n, X_{ni})Y_{ni} - \beta^{**}_{n\lambda}\zeta_{noi}(\beta^*_n).$$

Замечание 2.1. Из (5), (6) и (8) вытекают следующие представления:

$$\beta^*_n - \beta_n = \frac{\sum c_{ni}\tau_{ni}}{\sum c_{ni}X_{ni}}, \quad \beta^{**}_{n\lambda} - \beta_n = \frac{\sum \zeta_{ni}(\beta^*_n)}{\sum \zeta_{noi}(\beta^*_n)},$$
$$\zeta^{**}_{ni} = \zeta_{ni}(\beta^*_n) - (\beta^{**}_{n\lambda} - \beta_n)\zeta_{noi}(\beta^*_n), \tag{9}$$

которые лежат в основе изучения оценок $\beta^{**}_{n\lambda}$.

Первая цель этого параграфа — получить общие достаточные и, по возможности, необходимые условия, гарантирующие следующую сходимость:

$$W_n := (\beta^{**}_{n\lambda} - \beta_n)/d_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \quad d_n \neq 0, \tag{10}$$

где $d_n$ — некоторые числа, вид которых будет зависеть от используемых далее условий. Вторая цель — установить общие достаточные условия для сходимости

$$W_n^{**} := \frac{\beta_{n\lambda}^{**} - \beta_n}{d_n^{**}} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1) \quad \text{при } d_n^{**} = \Big(\sum (\zeta_{ni}^{**})^2\Big)^{1/2} \Big/ \sum \zeta_{noi}(\beta_n^*). \tag{11}$$

Поскольку $d_n^{**}$ является статистикой, сходимость (11) может быть полезной при построении доверительных интервалов и проверке гипотез.

**2.2.** В этом пункте введем ряд необходимых условий.

**Предположение 2.2.** *При всех $n$ и $i$ существуют случайные величины $K_{ni} = K_{ni}(\beta_n, X_{ni})$, $L_{ni} = L_{ni}(\beta_n, X_{ni})$ и числа $p_n$, $q_n$ и $\kappa_n > 0$ такие, что при всех $t_1$ и $t_2$ из отрезка $[\beta_n - \kappa_n, \beta_n + \kappa_n]$ выполнены условия*

$$|\gamma_{ni}(t_1, X_{ni}) - \gamma_{ni}(t_2, X_{ni})| \le K_{ni}|t_1 - t_2|^p, \quad 0 < p = p_n \le 1,$$

$$|\lambda_{ni}(t_1, X_{ni}) - \lambda_{ni}(t_2, X_{ni})| \le L_{ni}|t_1 - t_2|^q, \quad 0 < q = q_n \le 1,$$

*причем $K_{noi}^2 = \mathbf{E}\big(K_{ni}^2\tau_{ni}^2\big) < \infty$ и $L_{noi}^2 = \beta_n^2\mathbf{E}L_{ni}^2 < \infty$.*

**Предположение 2.3.** *При каждом $n$ случайные векторы $(\epsilon_{ni}, \delta_{ni})$, $i = 1, \dots, n$, независимы в совокупности и, кроме того,*

$$\forall n, i \quad \mathbf{E}\epsilon_{ni} = \mathbf{E}\delta_{ni} = 0, \quad A_{nc} := \sum c_{ni}x_{ni} \ne 0, \quad \alpha_{n1} := d_{noc} + d_{nc}/\kappa_n \to 0,$$

*где $d_{nc}^2 := \sum c_{ni}^2\mathbf{D}\tau_{ni}/A_{nc}^2$ и $d_{noc}^2 := \sum c_{ni}^2\mathbf{D}\delta_{ni}/A_{nc}^2$.*

Отметим, что предположение 2.3 содержит, в частности, все нужные нам условия, которым должны удовлетворять числа $\{c_{ni}\}$, участвующие в определении (5) оценки $\beta_n^*$.

Самым важным условием в работе является следующее

**Предположение 2.4.** *Верны предположения 2.2 и 2.3, а случайные величины $\Delta_{ni}(t) := \mathbf{E}\zeta_{ni}(t)$ существуют при всех $n$, $i$ и всех неслучайных $t$. Кроме того, при некоторых неслучайных $A_n \ne 0$ и $B_n \ne 0$*

$$\begin{gathered}\alpha_{n2} := d_{nc}^p \sum \mathbf{E}|K_{ni}X_{ni}|/|A_n| + d_{nc}^q \sum \mathbf{E}L_{ni}/|A_n| \to 0, \\ \alpha_{n3}^2 := \frac{d_{nc}^{2p}}{B_n^2}\Big(\sum K_{noi}^{2/(2-p)}\Big)^{2-p} + \frac{d_{nc}^{2q}}{B_n^2}\Big(\sum L_{noi}^{2/(2-q)}\Big)^{2-q} \to 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Ключевую роль в дальнейшем будут играть следующие два предположения:

$$w_n := \sum \zeta_{ni}(\beta_n)/B_n - \sum \Delta_{ni}(\beta_n)/B_n + \sum \Delta_{ni}(\beta_n^*)/B_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \tag{13}$$

$$\alpha_{n0}(A_n) := \sum \zeta_{noi}(\beta_n)/A_n \xrightarrow{p} 1. \tag{14}$$

Подчеркнем, что именно условия (13) и (14) определяют вид постоянных $A_n \ne 0$ и $B_n \ne 0$, которые участвуют в основных предположениях и утверждениях работы.

**2.3.** Теперь мы можем сформулировать основные результаты параграфа.

**Теорема 1.** *Пусть верны предположение 2.4 и условие (14). Тогда условие (13) необходимо и достаточно для того, чтобы сходимость (10) имела место при $d_n = B_n/A_n$.*

**Следствие 1.** *Если верны предположение* 2.4, *условия* (13), (14) *и*

$$\alpha^2_{n4}(A_n) := \sum \zeta^2_{noi}(\beta_n)/A^2_n \xrightarrow{p} 0, \quad \alpha^2_{n5}(B_n) := \sum \zeta^2_{ni}(\beta_n)/B^2_n \xrightarrow{p} 1, \tag{15}$$

*то имеет место сходимость* (11).

Замечание 2.5. Ограничения (14) и (15) — это условия на сходимость сумм независимых случайных величин в схеме серий, т. е. на объект, который является очень хорошо исследованным.

**2.4.** Рассмотрим теперь вопрос об условиях для асимптотической нормальности оценки $\beta^{**}_{n\lambda}$ при более классических предположениях. Далее будем полагать, что

$$A_{n\zeta} := \sum \mathbf{E}\zeta_{noi}(\beta_n) \neq 0, \quad 0 < B^2_{n\zeta} := \sum \mathbf{D}\zeta_{ni}(\beta_n) < \infty, \tag{16}$$

и использовать условие

$$\alpha_{n6}(B_n) := \sum \Delta_{ni}(\beta^*_n)/B_n \xrightarrow{p} 0. \tag{17}$$

**Предположение 2.6.** *Случайные величины* $\{\zeta_{ni}(\beta_n) - \mathbf{E}\zeta_{ni}(\beta_n)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.4 *и условие* (17) *верны при* $A_n = A_{n\zeta}$ *и* $B_n = B_{n\zeta}$. *Кроме того,*

$$\alpha^2_{n7} := \sum \mathbf{E}\zeta^2_{noi}(\beta_n)/A^2_{n\zeta} \to 0. \tag{18}$$

**Следствие 2.** *Пусть выполнено предположение* 2.6. *В этом случае сходимость* (10) *имеет место при* $d_n = B_{n\zeta}/A_{n\zeta}$. *Если дополнительно*

$$\alpha^2_{n8} := \sum \Delta^2_{ni}(\beta_n)/B^2_{n\zeta} \to 0, \tag{19}$$

*то справедливо и* (11).

**2.5.** Предположим теперь, что

$$A_{n\gamma} := \sum \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})x_{ni} \neq 0, \quad B^2_{n\gamma} := \sum \gamma^2_{ni}(\beta_n, x_{ni})\mathbf{D}\epsilon_{ni} > 0,$$

и рассмотрим вопрос об общих достаточных условиях для важной сходимости

$$(\beta^{**}_{n\lambda} - \beta_n)/d_{n\gamma} \Rightarrow \mathscr{N}(0,1), \quad \text{где } d_{n\gamma} := B_{n\gamma}/A_{n\gamma}, \tag{20}$$

т. е. для сходимости (10) при $d_n = d_{n\gamma}$. Обоснование важности именно сходимости (20) можно найти в [1]. В частности, если в задаче (1)–(3) с нулевыми ошибками в коэффициентах существует наилучшая оценка $\beta^{**}_n$ (см. (7)), то эта оценка имеет дисперсию, совпадающую с $d^2_{n\gamma}$ при некотором оптимальном выборе функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$.

Положим

$$\rho_{ni} := \gamma_{ni}(\beta_n, X_{ni}) - \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni}), \quad \bar{\rho}^2_{ni} := \min\bigl\{\beta^2_n\rho^2_{ni}\delta^2_{ni},\ |\beta_n B_{n\gamma}\rho_{ni}\delta_{ni}|\bigr\}. \tag{21}$$

**Предположение 2.7.** *Случайные величины* $\{\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})\epsilon_{ni}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.4 *верно при* $A_n = A_{n\gamma}$ *и* $B_n = B_{n\gamma}$. *Кроме того,*

$$\alpha^2_{n9} := \sum \frac{\mathbf{E}\bigl(\rho^2_{ni}\epsilon^2_{ni}\bigr) + \mathbf{E}\bar{\rho}^2_{ni} + \beta^2_n\gamma^2_{ni}(\beta_n, x_{ni})\mathbf{E}\delta^2_{ni} + \beta^2_n\mathbf{E}\lambda^2_{ni}(\beta_n, X_{ni})}{B^2_{n\gamma}} \to 0,$$

$$\alpha_{n10} := \sum \frac{\mathbf{E}|\rho_{ni}X_{ni} - \lambda_{ni}(\beta_n, X_{ni})|}{|A_{n\gamma}|} \to 0, \quad \alpha^2_{n11} := \sum \frac{\gamma^2_{ni}(\beta_n, x_{ni})\mathbf{E}X^2_{ni}}{A^2_{n\gamma}} \to 0.$$

**Следствие 3.** *Пусть верно предположение* 2.7, *а условие* (17) *выполнено при* $B_n = B_{n\gamma}$. *В этом случае имеют место сходимости* (20) *и* (11).

Замечание 2.8. Доказательство следствия 3 упростится, если в предположении 2.7 величину $\bar{\rho}_{ni}^2$ из (21) заменить более простой $\beta_n^2\rho_{ni}^2\delta_{ni}^2$. Однако выполнение такого упрощенного условия в некоторых случаях (например, при $\gamma_{ni}(\beta,x)=x$) приводит к необходимости предположения о существовании четвертых моментов случайных величин $\{\delta_{ni}\}$. Именно это обстоятельство и вынудило нас ввести более тонкое условие с $\bar{\rho}_{ni}^2$ из (21).

Подчеркнем, что аналогичная проблема возникает также при попытке извлечь следствие 3 из более простого и по виду более естественного следствия 2.

**2.6.** Приведем теперь общие *необходимые* условия для сходимости (20).

**Предположение 2.9.** *При всех* $n$ *и* $i$ *случайные величины* $\epsilon_{ni}$ *и* $\delta_{ni}$ *независимы между собой и выполнено ограничение*

$$\alpha_{n12} := d_{nc}^p|\beta_n|\sum \mathbf{E}|K_{ni}\delta_{ni}|/B_{n\gamma} + d_{nc}^q|\beta_n|\sum \mathbf{E}L_{ni}/B_{n\gamma} \to 0.$$

Замечание 2.10. Пусть случайные величины $\epsilon_{ni}$ и $\delta_{ni}$ независимы между собой. Тогда для величин $\Delta_{ni}(t)=\mathbf{E}\zeta_{ni}(t)$ справедливы равенства

$$\Delta_{ni}(t)=\beta_n\mathbf{E}\mu_{ni}(t,X_{ni}) \quad \text{при } \mu_{ni}(\cdot,X_{ni}) := \lambda_{ni}(\cdot,X_{ni}) - \gamma_{ni}(\cdot,X_{ni})\delta_{ni}, \tag{22}$$

если только соответствующие математические ожидания существуют. Этот факт немедленно следует из определений (8), поскольку во введенных обозначениях $\zeta_{ni}(t)=\gamma_{ni}(t,X_{ni})\epsilon_{ni}+\beta_n\mu_{ni}(t,X_{ni})$.

**Следствие 4.** *Пусть выполнены предположения* 2.7 *и* 2.9. *В этом случае условие*

$$\beta_n\sum \Delta_{noi}(\beta_n)/B_{n\gamma} \to 0, \quad \text{где } \Delta_{noi}(\cdot) := \mathbf{E}\mu_{ni}(\cdot,X_{ni}), \tag{23}$$

*необходимо и достаточно для сходимости* (20) *и достаточно для справедливости* (11).

**2.7.** Введем теперь более просто проверяемые условия.

**Предположение 2.11.** *При всех* $n$ *и* $i$ *справедливы представления* $\epsilon_{ni} = \sigma_{n\epsilon i}\xi_i$ *и* $\delta_{ni}=\sigma_{n\delta i}\eta_i$, *причем случайные векторы* $(\xi_i,\eta_i)$, $i=1,2,\dots,$ *независимы в совокупности и состоят из независимых одинаково распределенных координат с нулевыми средними и единичными дисперсиями.*

Отметим, что тем не менее предположение 2.11 — это более общее допущение, чем стандартное предположение о нормальном распределении ошибок.

**Предположение 2.12.** *Функции* $\{\lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ *дифференцируемы по первому аргументу, а функции* $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ *дифференцируемы по обоим аргументам и* $\sup\limits_{n,i}\mathbf{E}\sup\limits_{|t-\beta_n|\le\kappa_n}\Lambda_{ni}^2(t)<\infty$ *при*

$$\Lambda_{ni}(t) = (1+|\delta_{ni}|)\left|\frac{\partial\gamma_{ni}(t,X_{ni})}{\partial t}\right| + \left|\frac{\partial\lambda_{ni}(t,X_{ni})}{\partial t\cdot\sigma_{n\delta i}}\right|.$$

*Кроме того,*

$$\sup_{n,i}\left(\frac{\mathbf{E}\lambda_{ni}^2(\beta_n,X_{ni})}{\sigma_{n\delta i}^2}\right)<\infty, \quad C_1 := \sup_{n,i}\sup_{x\in\mathscr{X}_{ni}}\left|\frac{\partial\gamma_{ni}(\beta_n,x)}{\partial x}\right|<\infty, \tag{24}$$

*где* $\mathscr{X}_{ni}$ — *промежутки такие, что* $\mathbf{P}(X_{ni}\in\mathscr{X}_{ni})=1$ *при всех* $n$ *и* $i$.

Суммируем ограничения.

**Предположение 2.13.** *Выполнены предположения* 2.11, 2.12, *и*

$$c_0 := \inf_{n,i} \min\{c_{ni}x_{ni}, \gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})x_{ni}, |\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})|\sigma_{n\epsilon i}, \kappa_n\} > 0, \quad \bar{\sigma}_{n\delta} = o(1),$$

$$C_0 := \sup_{n,i} \max\{|\gamma_{ni}(\beta_n, x_{ni})|, |x_{ni}|, |c_{ni}|, \sigma_{n\epsilon i}, \sigma_{n\delta i}, |\beta_n|\} < \infty, \quad \mathbf{E}\eta_1^4 < \infty. \tag{25}$$

Следующее утверждение является простым частным случаем приведенного выше более общего следствия 4.

**Следствие 5.** *Пусть справедливо предположение* 2.13. *В этом случае условие* (23) *при замене в нем* $B_{n\gamma}$ *на* $\sqrt{n}$ *является необходимым и достаточным для того, чтобы имела место сходимость* (20), *и достаточным для сходимости* (11).

### 3. О выборе функций, определяющих оценки $\boldsymbol{\beta^{**}_{n\lambda}}$

**3.1.** Все условия в теореме 1 и в каждом из ее следствий можно условно разделить на две группы. В предположениях из первой группы накладываются ограничения либо на гладкость изучаемых функций, либо на скорость их роста или убывания или накладываются условия на моменты некоторых случайных величин, которые связаны с этими функциями и распределения которых однозначно определяются по распределениям наблюдений. В частности, как продемонстрировано в следствии 5, условия первой группы выполнены для достаточно гладких функций при существовании достаточного числа моментов у изучаемых случайных величин.

Мы считаем, что проверка условий из первой группы может быть трудной задачей, но это техническая задача по сравнению с вопросом о проверке условий из второй группы, которые часто могут быть выполнены только в случае специального выбора пар $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot), \lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ связанных между собой функций. К условиям второй группы относятся только условия (13), (17), (19) и (23), содержащие функции $\{\Delta_{ni}(\cdot)\}$ и $\{\Delta_{noi}(\cdot)\}$. Отметим, что именно к этой группе принадлежат все условия, которые являются необходимыми в соответствующих утверждениях из § 2.

Приведем один простой и важный случай, когда исчезают все проблемы с условиями из второй группы.

**Следствие 6.** *Пусть верно предположение* 2.3, *а условие*

$$\Delta_{ni}(t) = \Delta_{noi}(t) = 0 \tag{26}$$

*выполнено при всех* $n, i$ *и всех* $t \in (\beta_n - \kappa_n, \beta_n + \kappa_n)$. *Тогда основное условие* (13) *будет иметь следующий простой вид:*

$$w_n = \sum \zeta_{ni}(\beta_n)/B_n \Rightarrow \mathscr{N}(0,1),$$

*т. е. превратится в предположение о справедливости центральной предельной теоремы для случайных величин с нулевыми средними, а все остальные условия второй группы* (т. е. (17), (19) *и* (23)) *выполняются автоматически.*

Как уже говорилось в замечании 2.10, для независимых случайных величин $Y_{ni}$ и $X_{ni}$ условие (26) примет следующий вид (см. (22)):

$$\mathbf{E}\lambda_{ni}(t, X_{ni}) = \mathbf{E}[\gamma_{ni}(t, X_{ni})(X_{ni} - \mathbf{E}X_{ni})]. \tag{27}$$

Таким образом, возникает естественная задача о построении достаточно большого класса функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot),\lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$, для которых выполнено условие (27). Основные из полученных нами в этом направлении результатов собраны в следующем пункте.

**3.2.** Введем несколько предположений. Подчеркнем, что все определяемые ниже функции $\lambda_{ni}(t,y)$ при $y = X_{ni}$ с вероятностью 1 определены и конечны в каждом из случаев.

(А) Случайная величина $X_{ni}$ имеет нормальное распределение со средним $x_{ni}$ и с известной дисперсией $\sigma^2_{n\delta i}$, функция $\gamma_{ni}(t,\cdot)$ дифференцируема по второму аргументу,

$$\lambda_{ni}(\cdot,x) = \sigma^2_{n\delta i}\partial\gamma_{ni}(\cdot,x)/\partial x \tag{28}$$

и выполнено условие

$$\mathbf{E}|\gamma_{ni}(t,X_{ni})(X_{ni}-x_{ni})| + \mathbf{E}|\lambda_{ni}(t,X_{ni})| < \infty.$$

(Б) Случайная величина $X_{ni}$ имеет равномерное распределение на интервале $(0,2x_{ni})$, выполнено условие

$$\mathbf{E}|\gamma_{ni}(t,X_{ni})| + \mathbf{E}|X_{ni}\gamma_{ni}(t,X_{ni})| < \infty \tag{29}$$

и $\lambda_{ni}(t,y) = \lambda_{noi}(t,y)/2$, где

$$\lambda_{noi}(t,y) := y\gamma_{ni}(t,y) - \int\limits_0^y \gamma_{ni}(t,z)\,dz.$$

(В) Случайная величина $X_{ni}$ имеет показательное распределение с параметром $1/x_{ni}$, выполнено условие (29) и $\lambda_{ni}(t,y) = \lambda_{noi}(t,y)$.

(Г) При некотором известном $\alpha > 0$ случайная величина $\delta_{ni} = X_{ni} - x_{ni}$ при всех $x$ имеет плотность $p_\alpha(x) := \alpha e^{-\alpha|x|}/2$, выполнено условие (29) и

$$\lambda_{ni}(t,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_{ni}(t,y+z)e^{-\alpha|z|}\operatorname{sign}(z)\,dz. \tag{30}$$

Напомним, что неотрицательная случайная величина имеет показательное распределение с параметром $\alpha > 0$, если эта случайная величина имеет плотность распределения, равную $\alpha e^{-\alpha x}$ при $x > 0$. Отметим, что в случае (Г) величина $\delta_{ni}$ имеет распределение, которое в книге В. Феллера [20, с. 65] названо вторым законом распределения Лапласа. Подчеркнем, что $\mathbf{E}X_{ni} = x_{ni}$ во всех перечисленных выше предположениях.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этого параграфа.

**Теорема 2.** *Если при некоторых $n, i$ и $t$ справедливо одно из условий* (А)–(Г), *то для этих $n, i$ и $t$ имеет место* (27). *Если дополнительно случайные величины $X_{ni}$ и $Y_{ni}$ независимы, то верно и* (26).

**3.3.** Рассмотрим теперь вопрос об условиях для асимптотической нормальности оценки $\beta^{**}_{n\lambda}$, которыми было бы удобно пользоваться при выполнении условия (27). Пусть

$$A_{no} := \sum x_{ni}\mathbf{E}\gamma_{ni}(\beta_n,X_{ni}) \neq 0, \tag{31}$$

$$0 < B^2_{no} := \sum \mathbf{E}\gamma^2_{ni}(\beta_n,X_{ni})\mathbf{D}\epsilon_{ni} + \beta_n^2\sum \mathbf{E}\mu^2_{ni}(\beta_n,X_{ni}) < \infty.$$

Определение функции $\mu_{ni}(\beta_n,X_{ni})$ см. в замечании 2.10.

**Предположение 3.1.** *Случайные величины* $\{\zeta_{ni}(\beta_n)\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга, а предположение* 2.4 *и условие* (18) *верны при* $A_n = A_{n\zeta} = A_{no}$ *и* $B_n = B_{no}$. *Кроме того, при всех* $n$ *и* $i$ *случайные величины* $X_{ni}$ *и* $Y_{ni}$ *независимы, а равенство* (27) *имеет место при всех* $t \in (\beta_n - \kappa_n, \beta_n + \kappa_n)$.

**Следствие 7.** *Если выполнено предположение* 3.1, *то имеют место сходимости* (11) *и* (10) *при* $d_n = B_{no}/A_{no}$.

Замечание 3.2. Ясно, что оценка $\beta^{**}_{n\lambda}$ тем точнее, чем меньше ее асимптотическая дисперсия $d_n^2$. Если выполнены условия следствий 3–5, то эта асимптотическая дисперсия $d_n^2 = d_{n\gamma}^2$ зависит только от функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$, а задача нахождения «оптимальных» функций $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$, минимизирующих эту асимптотическую дисперсию, при определенных условиях решена в [1, 2]. Если функции $\{\gamma_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ уже выбраны, то теорема 2 дает нам возможность подобрать соответствующие функции $\{\lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$.

Если условия перечисленных выше следствий, включая условие $\bar\sigma_{n\delta} = o(1)$, не выполнены, то удобнее всего пользоваться утверждениями следствия 7. Однако в этом случае задача о минимизации асимптотической дисперсии $d_n^2 = B_{no}^2/A_{no}^2$ остается открытой.

**3.4.** Предположим теперь, что нам неизвестны распределения величин $\{X_{ni}\}$, но известны их дисперсии $\{\sigma^2_{n\delta i}\}$. В этом случае мы можем попытаться вместо точных равенств (26) получить их приближенные аналоги.

**Предположение 3.3.** *Пусть выполнено условие* $\alpha_{n13} := \sum \sigma^3_{n\delta i} = o(\sqrt{n})$, *а функции* $\{\gamma_{ni}(\beta_n,\cdot)\}$ *дважды дифференцируемы по второму аргументу, причем*

$$C_2 := \sup_{n,i} \sup_{x\in\mathscr{X}_{ni}} |\mathbf{E}\partial^2\gamma_{ni}(\beta_n,x)/\partial x^2| < \infty,$$

*где промежутки* $\mathscr{X}_{ni}$ *определены в предположении* 2.12.

**Следствие 8.** *Пусть при всех* $n$ *и* $i$ *дисперсии* $\sigma^2_{n\delta i}$ *нам известны, верно предположение* 3.3, *а предположение* 2.13 *выполнено при* $\lambda_{ni}(\cdot,x)$ *из* (28). *В этом случае имеют место сходимости* (20) *и* (11).

Замечание 3.4. Пусть справедливы все условия следствия 8 и дополнительно при всех $n$ дисперсии $\sigma^2_{n\delta i}$ не зависят от $i$. В этом частном случае первое условие в предположении 3.3 примет следующий простой вид: $\bar\sigma_{n\delta} \equiv n^{-1/3}\alpha_{n13}^{1/3}/n^{1/3} = o(n^{-1/6})$. Таким образом, в рассматриваемом случае оценка $\beta^{**}_{n\lambda}$ является асимптотически нормальной при более слабом условии, чем (4).

**3.5.** В заключение раздела сделаем несколько замечаний, в которых обсудим ряд вопросов, с неизбежностью возникающих в случае практического применения оценок $\beta^{**}_{n\lambda}$.

Замечание 3.5. В целом ряде задач величины $\{\epsilon_{ni}\}$ — это погрешности, характеризующие некоторое изучаемое нами явление природы, а величины $\{\delta_{ni}\}$ — это погрешности, возникающие в результате работы аппаратуры, используемой для измерения коэффициентов. В такой ситуации величина $\bar\sigma_{n\delta}$ характеризует среднюю точность измерений при использовании этой аппаратуры, а условие $\bar\sigma_{n\delta} = o(1)$ означает, что средняя точность аппаратурных измерений возрастает при переходе от одной серии экспериментов к другой.

Такое предположение нам представляется естественным, особенно в задачах биологии и сельского хозяйства, когда одна серия экспериментов может занимать год и более и когда для следующей серии приобретается новое и более совершенное оборудование.

Замечание 3.6. Теорема 2 и следствия 7 и 8 применимы только к таким практическим экспериментам, в которых имеется возможность провести дополнительные испытания используемой аппаратуры до, во время или после основных экспериментов. Дело в том, что лишь в результате таких испытаний можно получить нужную информацию о распределении погрешностей величин $\{\delta_{ni}\}$, возникающих в результате работы этой аппаратуры.

Замечание 3.7. Если у нас нет никакой информации о распределении погрешностей $\{\delta_{ni}\}$, то в задаче о выборе функций $\{\lambda_{ni}(\cdot,\cdot)\}$ всегда есть возможность (7) при всех $i$ положить $\lambda_{ni}(\cdot,\cdot) \equiv 0$. Эта возможность исследована нами в работе [2] и ведет к ограничительным предположениям типа (4).

Замечание 3.8. Всюду в работе $\beta_n$ — это неизвестный параметр. Кроме того, неизвестна последовательность $\{x_{ni}\}$ и неизвестными могут быть также и распределения величин $\{\epsilon_{ni}\}$ и $\{\delta_{ni}\}$ или по крайней мере некоторые их параметры. Таким образом, большинство условий во всех утверждениях данной работы — это ограничения на величины, содержащие неизвестные параметры. Понятно, что в случае практического применения этих утверждений мы должны проверять выполнение их условий *при всех возможных значениях всех неизвестных параметров* (т. е. так же, как это всегда делается в математической статистике, см., например, [21]).

## 4. Вспомогательные утверждения

**4.1.** С целью сократить доказательства ниже часто будем использовать результаты из работы [4]. Условимся, что далее такие обозначения, как ([4].A) или утверждение [4].B либо [4].B.C, означают соответственно ссылки на формулу (A), утверждение B, либо утверждение B.C из работы [4]. Кроме того, если вводимая далее формула является аналогом некоторой формулы ([4].A), то будем для нее использовать номер (4.A′).

Подчеркнем, что все используемые ниже обозначения, у которых нет первого нижнего индекса $n$ — это обозначения из [4] (исключение составляют лишь величины $L_{xi}$, вводимые в предположении 4.6). Отметим, что в работе [4] мы также подразумевали зависимость вводимых величин от числа наблюдений $n$, но не использовали, как в данной работе, специальный индекс $n$.

Напомним, что в [4] изучались условия асимптотической нормальности оценки $\widehat{\theta}$, которая также была двухшаговой и в основе изучения которой лежали следующие представления (см. ([4].21), ([4].20) и первую формулу в доказательстве леммы [4].5.5):

$$\theta^* - \theta = \frac{\sum u_i}{1+\sum v_i}, \quad \hat{\theta} - \theta = \frac{\sum \zeta_i(\theta^*)}{\sum \zeta_{bi}(\theta^*)}, \quad \hat{\zeta}_i(\theta^*) = \zeta_i(\theta^*) - (\theta^* - \theta)\zeta_{bi}(\theta^*), \quad (32)$$

где (см. ([4].20) и ([4].94))

$$\zeta_i(\cdot) := \gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_i - \lambda_i(\cdot), \quad \zeta_{bi}(\cdot) := \gamma_{xi}(\cdot)X_{bi}Y_i - \lambda_{xbi}(\cdot)Y_i. \quad (33)$$

Замечание 4.1. Несмотря на очевидную аналогию между формулами (9) и (32), мы не можем извлечь теорему 1 из результатов работы [4], поскольку в [4] сделано слишком много конкретных предположений о виде функций и наблюдений в (32) и (33). В частности, в знаменателе $\zeta_{bi}(\cdot)$ формулы (32) стоят суммы слагаемых, умноженных на $Y_i$, что неприемлемо для многих целей данной работы. Кроме того, в [4] рассмотрен лишь случай, когда $\beta_n = \theta = 2\kappa_n > 0$. Тем не менее будем использовать далее как общий подход к изучению такого рода оценок, развитый в [4], так и ряд полученных вспомогательных результатов из [4]. Но прежде проведем ревизию доказательств результатов из § [4].2.

**4.2.** Для того чтобы привести нужные нам утверждения из [4], введем

**Предположение 4.2.** *Выполнены следующие условия:*

(а$_0$) *при каждом* $n = 1, 2, \dots$ *даны числа* $\theta > 0$, $0 < p \le 1$, $0 < q \le 1$, $A > 0$ *и* $B > 0$;

(б$_0$) *при каждом* $n$ *задан набор независимых случайных векторов*

$$W_{ni} := (u_i, v_i, \epsilon_i, X_{ai}, X_{bi}, Y_i, \gamma_{xi}(\cdot), \lambda_{xai}(\cdot), \lambda_{xbi}(\cdot), \lambda_i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, n, \tag{34}$$

*причем первые шесть компонент векторов* $W_{ni}$ *являются случайными величинами, а последние четыре компоненты — это случайные функции;*

(в$_0$) *при всех* $n$ *и* $i$ *случайные величины* $u_i$ *и* $v_i$ *имеют нулевые средние и*

$$d_v + d_u/\theta \to 0, \quad \text{где } d_u^2 := \sum \mathbf{D}u_i \text{ и } d_v^2 := \sum \mathbf{D}v_i;$$

(г$_0$) *имеют место равенства* (32) *и* (33);

(д$_0$) *величины* $\delta_i(t) := \mathbf{E}\zeta_i(t)$ *существуют при всех* $n$, $i$ *и всех неслучайных* $t > 0$;

(е$_0$) *справедливы представления* ([4].7), *предположение* [4].2.3 *и условие* ([4].29);

(ж$_0$) *при всех* $n$ *и* $i$ *верны равенства* $\lambda_i(\cdot) = \lambda_{xai}(\cdot) - \theta\lambda_{xbi}(\cdot)Y_i$ *и выполнено условие* ([4].86).

**Лемма 4.3.** *Все утверждения теоремы* [4].2 *останутся справедливыми, если в них предположение* [4].2.4 *заменить предположением* 4.2.

Доказательство. Нужно просмотреть вывод теоремы [4].2 в § [4].5 и убедиться, что в нем используются только условия, включенные в предположение 4.2. Подчеркнем: все не вошедшие в предположение 4.2 соотношения между компонентами векторов из (34), которые так существенны в остальных частях работы [4], на самом деле не используются при доказательстве теоремы [4].2. □

**4.3.** Обратимся теперь к условиям следствий [4].3 и [4].4.

**Предположение 4.4.** *Предположение* 4.2 *справедливо при* $A = A_\gamma$ *и* $B = B_\gamma$. *Кроме того, выполнены следующие условия:*

(з$_0$) *при всех* $n$ *и* $i$ *даны числа* $b_i$ *и* $\gamma_{\theta i}$, *существуют* $y_i = \mathbf{E}Y_i$ *и при всех достаточно больших* $n$ *выполнены условия*

$$A_\gamma := \sum \gamma_{\theta i} b_i y_i > 0 \quad \text{и} \quad B_\gamma^2 := \sum \gamma_{\theta i}^2 (1 + \theta b_i)^2 \sigma_{yi}^2 > 0;$$

(и$_0$) *при всех* $n$ *и* $i$ *справедливы представления*

$$X_{bi} = b_i + \epsilon_{bi} \quad \text{и} \quad \epsilon_i = \epsilon_{abi} - (1 + \theta b_i)\epsilon_{yi},$$

*причем величины* $\epsilon_{yi}$ *имеют нулевые средние и при каждом* $n$ *независимы случайные векторы* $(\epsilon_{abi}, \epsilon_{yi}, \gamma_{xi}(\theta), \lambda_i(\theta))$, $i = 1, \dots, n$;

(к$_0$) *случайные величины* $\{\gamma_{\theta i}(1 + \theta b_i)\epsilon_{yi}\}$ *удовлетворяют условию Линдеберга;*

(л$_0$) *имеют место условия* ([4].42) *и* ([4].43).

Подчеркнем, что в этих условиях не предполагается выполненным представление для величины $\epsilon_{abi}$, которое имеется в правом верхнем углу формулы ([4].41).

**Лемма 4.5.** *Все утверждения следствий* [4].3 *и* [4].4 *останутся справедливыми, если в них предположение* [4].2.9 *заменить предположением* 4.4.

Доказательство. Поскольку предположение 4.2 являются частью предположения 4.4, в силу леммы 4.3 все утверждения теоремы [4].2 остаются справедливыми и при выполнении предположения 4.4. Далее, нетрудно убедиться, что при выводе лемм [4].6.4–[4].6.6 используются только свойства, перечисленные в предположении 4.4, а значит, эти леммы верны и после замены условий. Так как доказательства следствий [4].3 и [4].4 основаны на применении лишь лемм [4].6.4–[4].6.6 и теоремы [4].2, эти следствия также имеют место и в новых условиях. □

**4.4.** Нам потребуются усиления приведенных утверждений, в которых ограничения налагаются непосредственно на случайные функции $\{\lambda_i(\cdot)\}$, а не на функции, которые определяют $\{\lambda_i(\cdot)\}$ в условии (ж$_0$).

**Предположение 4.6.** *Предположение* 4.2 *выполнено при замене в условии* ([4].86) *величин* $L_i^2$ *на* $\mathbf{E}L_{xi}^2$, *где*

$$L_{xi} := \sup\{|\lambda_i(t+h) - \lambda_i(t)|/h : \theta/2 \leq t < t+h \leq 3\theta/2\}.$$

**Лемма 4.7.** *Пусть справедливо предположение* 4.6. *Тогда условие Гёльдера* ([4].61) *выполнено в следующих двух случаях:*

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_{abi}/B_\gamma, \quad r = p, \quad \bar{g}_i = K_{xi}|\epsilon_{abi}|/B_\gamma; \tag{4.97$'$}$$

$$\text{при} \quad g_i(\cdot) = \lambda_i(\cdot)/B, \quad r = q, \quad \bar{g}_i = L_{xi}/B, \quad G_i^2 \equiv \mathbf{E}\bar{g}_i^2 = \mathbf{E}L_{xi}^2/B^2. \tag{4.98$'$}$$

Эти утверждения нетрудно проверить непосредственно, просто сравнивая соответствующие условия (4.97$'$) с ([4].97), а (4.98$'$) с ([4].98).

**Теорема 3.** *Все утверждения теоремы* [4].2 *и следствия* [4].2 *останутся справедливыми, если в них предположение* [4].2.4 *заменить предположением* 4.6.

Доказательство теоремы 3. Просматривая вывод леммы 4.3, можно заметить, что если в нем утверждение ([4].98) леммы [4].5.7 заменить утверждением (4.98$'$), то вывод леммы 4.3 превратится в доказательство теоремы 3.

Доказательство следствия [4].2, приведенное в § [4].6, дословно сохраняется и в новых условиях. □

**4.5.** Введем еще два условия.

**Предположение 4.8.** *Предположение* 4.4 *справедливо при замене в условии* ([4].42) *величин* $\mathbf{E}\lambda_{xai}^2(\theta) + \theta^2\mathbf{E}\big(\lambda_{xbi}^2(\theta)Y_i^2\big)$ *на* $\mathbf{E}\lambda_i^2(\theta)$.

**Предположение 4.9.** *При всех* $n$, $i$ *и всех неслучайных* $t > 0$ *случайные величины* $\epsilon_{yi}$ *и* $\gamma_{xi}(t)$ *независимы.*

**Теорема 4.** *Все утверждения следствий* [4].3 *и* [4].4 *останутся справедливыми, если в них предположение* [4].2.9 *заменить предположением* 4.8. *Утверждения следствия* [4].4 *останутся выполненными также и в случае, если дополнительно в нем вместо предположения* [4].2.10 *использовать предположение* 4.9, *а ограничение* ([4].46) *заменить на*

$$\alpha_{n14} := d_c^p \sum \mathbf{E}|K_{xi}\epsilon_{abi}|/B_\gamma + d_c^q \sum \mathbf{E}L_{xi}/B_\gamma \to 0. \tag{4.46$'$}$$

**4.6.** Остальная часть раздела посвящена выводу теоремы 4.

**Лемма 4.10.** *Утверждения лемм* [4].6.4 *и* [4].6.5 *останутся справедливыми, если в них предположение* [4].2.9 *заменить предположением* 4.8.

Доказательство. Во-первых, нужно повторить вывод леммы [4].6.4, но на этот раз при $\beta_{4i} = -\lambda_i(\theta)$ и $\beta_{5i} = 0$. Во-вторых, нужно заметить, что в доказательстве леммы [4].6.5 на самом деле не используется условие ([4].42). Поэтому на справедливость леммы [4].6.5 также не повлияет замена предположения 4.4 предположением 4.8. □

**Лемма 4.11.** *Пусть справедливы предположения* 4.8, 4.9 *и условие* (4.46′). *Тогда имеет место сходимость* ([4].36) *и справедливо равенство*

$$\delta_i(\cdot) := \mathbf{E}\zeta_i(\cdot) = \mathbf{E}\big(\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_{abi}\big) - \mathbf{E}\lambda_i(\cdot). \tag{35}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$\sum(\rho_{\gamma i}(\tilde{\theta}) - \rho_{\gamma i}(\theta))/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \rho_{\gamma i}(\cdot) := \mathbf{E}(\gamma_{xi}(\cdot)\epsilon_{abi}), \tag{4.105′}$$

$$\sum(\rho_{\lambda i}(\tilde{\theta}) - \rho_{n\lambda i}(\theta))/B_\gamma \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } \rho_{\lambda i}(\cdot) := \mathbf{E}\lambda_i(\cdot). \tag{4.106′}$$

Действительно, эти сходимости вытекают из леммы [4].5.10, если ее последовательно применить к функциям из (4.97′) и (4.98′) при $B = B_\gamma$. Отметим, что в силу леммы [4].5.2 сходимости (4.105′) и (4.106′) будут иметь место, если в этих формулах величину $\tilde{\theta}$ заменить на $\theta^*$.

Поскольку $\mathbf{E}(\gamma_{xi}(t)\epsilon_{yi}) = 0$ ввиду независимости случайных величин $\epsilon_{yi}$ и $\gamma_{xi}(t)$, представление (35) вытекает из условия (и$_0$). Сходимость ([4].36) следует теперь из (4.105′), (4.106′) и равенства

$$\delta_i(\theta^*) - \delta_i(\theta) = \rho_{\gamma i}(\theta^*) - \rho_{\lambda i}(\theta^*) - (\rho_{\gamma i}(\theta) - \rho_{\lambda i}(\theta)). \quad \square$$

Доказательство теоремы 4. Возможность замены в следствиях [4].3 и [4].4 предположения 4.4 предположением 4.8 вытекает из леммы 4.10.

Если в доказательстве следствия [4].4 будем использовать лемму 4.11 вместо леммы [4].6.6, то автоматически получим и второе утверждение следствия [4].4 при всех требуемых заменах условий. □

## 5. Доказательства результатов § 2, 3

**5.1.** Далее будем считать, что

$$u_i := c_{ni}\tau_{ni}/A_{nc}, \quad v_i := c_{ni}\delta_{ni}/A_{nc}, \quad d_u := d_{nc}, \quad d_v := d_{noc}, \tag{36}$$

и использовать обозначение $\mathbb{C}_r(G_\bullet)$, введенное в ([4].62).

**Предположение 5.1.** *Предположение* 2.4 *справедливо при замене в нем условия* (12) *ограничением*

$$\alpha_{n15} := \mathbb{C}_p(K_{no\bullet})/|B_n| + \mathbb{C}_q(L_{no\bullet})/|B_n| \to 0.$$

Из соотношений ([4].65) вытекает, что предположение 5.1 чуть слабее, чем предположение 2.4.

**Лемма 5.2.** *Все утверждения теоремы* 1 *и следствий* 1–4 *останутся справедливыми, если в них предположение* 2.4 *заменить предположением* 5.1.

Замечание 5.3. Условимся, что ниже под теоремой 1 и следствиями 1–4 всегда будем понимать утверждения, которые получатся, если в перечисленных утверждениях предположение 2.4 всюду заменить предположением 5.1. Аналогично под теоремой [4].2 и следствиями [4].2–[4].4 далее понимаются утверждения, которые получатся, если всюду в [4] сделать замены условий, описанные в теоремах 3 и 4.

**5.2.** Далее в этом параграфе будут использоваться результаты из [4] при

$$\theta = 2\kappa_n > 0, \quad T_n(t) = \beta_n + t - \theta, \quad \theta^* - \theta = \frac{\sum u_i}{1 + \sum v_i}. \tag{37}$$

**Лемма 5.4.** *Пусть верны условия* (36) *и* (37). *Тогда*

$$\beta_n^* - \beta_n = \theta^* - \theta, \quad T_n(\theta) = \beta_n, \quad T_n(\theta^*) = \beta_n^*. \tag{38}$$

*Если же дополнительно выполнено предположение* 2.3, *то справедливы все утверждения леммы* [4].5.2. *В частности,*

$$\mathbf{P}(|\beta_n^* - \beta_n| \geq \kappa_n) = \mathbf{P}(|\theta^* - \theta| \geq \theta/2) \leq \mathbf{P}(\theta^* \neq \tilde{\theta}) \to 0. \tag{39}$$

Для доказательства этого утверждения нужно подставить величины из (36) и (37) в утверждение теоремы [4].5.

Далее будем полагать

$$A = |A_n|, \quad B = |B_n|, \quad Y_i = y_i = \mathrm{sign}(A_n B_n), \quad s_n = \mathrm{sign}(B_n), \tag{40}$$

$$s_{ni} = \mathrm{sign}(x_{ni}), \quad X_{bi} = s_{ni} X_{ni}, \quad \epsilon_i = s_{ni}\tau_{ni}, \quad \lambda_{bi}(t,0,x) = s_n \lambda_{ni}(T_n(t), s_{ni}x),$$

$$\lambda_i(t) = -\beta_n \lambda_{bi}(t,0,X_{bi}), \quad \gamma_i(t,0,x) = s_n s_{ni} \gamma_{ni}(T_n(t), s_{ni}x), \quad X_{ai} = 0.$$

**Лемма 5.5.** *Пусть справедливы условия* (36), (37), (40) *и выполнено предположение* 5.1. *В этом случае предположение* [4].2.3 *справедливо при* $K_{xi} = K_{ni}$ *и* $L_{xbi} = L_{ni}$ *и имеют место следующие равенства:*

$$\frac{\zeta_i(\theta)}{B} = \frac{\zeta_{ni}(\beta_n)}{B_n}, \quad \frac{\zeta_i(\theta^*)}{B} = \frac{\zeta_{ni}(\beta_n^*)}{B_n}, \quad \frac{\zeta_{bi}(\theta)}{A} = \frac{\zeta_{noi}(\beta_n)}{A_n}, \quad \frac{\zeta_{bi}(\theta^*)}{A} = \frac{\zeta_{noi}(\beta_n^*)}{A_n},$$

$$\frac{\delta_i(\theta)}{B} = \frac{\Delta_{ni}(\beta_n)}{B_n}, \quad \frac{\delta_i(\theta^*)}{B} = \frac{\Delta_{ni}(\beta_n^*)}{B_n}, \quad \frac{(\hat{\theta} - \theta)}{d} = \frac{(\beta_{n\lambda}^{**} - \beta_n)}{d_n} \tag{41}$$

*при* $d = B/A$ *и* $d_n = B_n/A_n$. *Кроме того, в этом случае*

$$\alpha_1 \leq \alpha_{n1}, \quad \alpha_2 = \alpha_{n2}, \quad \alpha_3 = \alpha_{n3}, \quad \alpha_9 = \alpha_{n15}$$

*и выполнено предположение* 4.6.

Для доказательства этого утверждения нужно взять величины из (36)–(40) и подставить их в условия ([4].19)–([4].21).

Доказательство теоремы 1 и следствий 1 и 2. Последнее утверждение леммы 5.5 позволяет нам воспользоваться утверждениями теоремы 3. С учетом соглашений из замечания 5.3 нетрудно убедиться, что, во-первых, теорема 1 является следствием утверждения (А) теоремы [4].2, причем

$$W(B/A) = W_n, \quad \alpha_0(A_\gamma) = \alpha_{n0}(A_{n\gamma}) \quad \text{и} \quad w^* = w_n$$

ввиду (41). Во-вторых, $\widehat{W} = W_n^{**}$, $\alpha_4(A) = \alpha_{n4}(A_n)$, $\alpha_5(B) = \alpha_{n5}(B_n)$, и следствие 1 является частным случаем утверждения (Б) теоремы [4].2. В-третьих, $\alpha_7 = \alpha_{n7}$, $\alpha_8 = \alpha_{n8}$, и следствие 2 вытекает из следствия [4].2. □

**5.3.** Далее всюду предполагается, что

$$b_i = |x_{ni}|, \quad \epsilon_{yi} = -s_{ni}\epsilon_{ni}/(1 + b_i\theta), \quad \epsilon_{bi} = s_{ni}\delta_{ni},$$

$$\epsilon_{abi} = -\beta_n \epsilon_{bi}, \quad \gamma_{\theta i} = \gamma_i(\theta, 0, b_i). \tag{42}$$

**Лемма 5.6.** *Пусть выполнены условия* (36), (37), (40), (42) *и справедливо предположение* 2.7. *В этом случае верно предположение* 4.8, *причем*

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = \alpha_{n9}^2, \quad \mu_3 = \alpha_{n10}, \quad \mu_4 = \alpha_{n11} \quad и \quad \mu_5 = 0.$$

Для доказательства этого утверждения нужно величины из (36)–(42) подставить в формулы ([4].42) и ([4].43).

Доказательство следствий 3 и 4. Учитывая замечание 5.3, нетрудно заметить, что лемма 5.6 позволяет воспользоваться утверждением теоремы 4 и получить следствие 3 как частный случай следствия [4].3. Поскольку $\alpha_{n12} = \alpha_{n14}$, следствие 4 вытекает из следствия [4].4 в силу второго утверждения теоремы 4. $\square$

**5.4.** В этом пункте, часто не оговаривая, считаем выполненными условия (38), (40) и (42).

**Лемма 5.7.** *Если справедливо предположение* 2.11, *то при всех $n$ и $i$*

$$\Delta_{ni}(\beta_n) = \beta_n \Delta_{noi}(\beta_n) = -\beta_n \delta_{bi}(\theta), \quad |\rho_{xi}| = |\rho_{ni}|, \quad |\epsilon_{bi}| = |\delta_{ni}| = \sigma_{n\delta i}|\eta_i|. \quad (43)$$

Доказательство. Первое равенство в (43) следует из замечания 2.10, если еще учесть определения (23) и ([4].14), а последнее соотношение в (43) вытекает из предположения 2.11 и среднего равенства в (42). Чтобы доказать среднее равенство в (43), надо сначала сравнить определения ([4].7) и ([4].41) с (21), а затем использовать определения величин $\gamma_{\theta i}$ и $\gamma_{bi}(\theta, 0, X_{bi})$ из (42) и (40) при $T_n(\theta)$, определенной в (38). $\square$

**Лемма 5.8.** *Если выполнено предположение* 2.13, *то при всех $n$ и $i$*

$$|\rho_{ni}| \le C_1 \sigma_{n\delta i}|\eta_i|, \quad \mathbf{E}\rho_{ni}^2 \le C_1^2 \sigma_{n\delta i}^2, \quad \mathbf{E}\bar{\rho}_{ni}^2 \le \mathbf{E}|\beta_n \rho_{ni} \delta_{ni}|^2 \le C_1^2 C_0^4 \sigma_{n\delta i}^2 \mathbf{E}\eta_1^4. \quad (44)$$

Доказательство. При сделанных предположениях $|\rho_{xi}| \le C_1|\epsilon_{bi}|$ ввиду леммы [4].6.7, где использована постоянная $C_1$ из (24). Из этого факта и (43) получаем первую оценку в (44). Вторая оценка следует из первой и предположения 2.11. Еще раз используя первое неравенство из (44), а также последнее соотношение в (43), получаем последнее утверждение в (44), поскольку $\beta_n^2 \sigma_{n\delta i}^2 \le C_0^4$ ввиду (25). $\square$

Доказательство следствия 5. Это утверждение является частным случаем следствия 4, а его доказательство с очевидными изменениями повторяет вывод теоремы [4].1 из следствия [4].4 (в частности, нужно вместо леммы [4].6.8 использовать лемму 5.8), поэтому подробные рассуждения мы опускаем. $\square$

Следствие 8 очевидным образом вытекает из следствия 5 и следующего утверждения.

**Лемма 5.9.** *Если верны условия следствия* 8, *то при всех $n$ и $i$*

$$|\Delta_{ni}(\beta_n)| \le 2C_2|\beta_n|\mathbf{E}|\delta_{ni}|^3.$$

Это утверждение следует из леммы [4].6.10 и из первого тождества в (43).

**5.5.** Приступим теперь к выводу теоремы 2. Мы будем опускать пределы интегрирования в случаях, когда область интегрирования $(-\infty, \infty)$, и использовать обозначение $p_\alpha(\cdot)$, введенное в условии (Г). Нам потребуется

**Лемма 5.10.** *Если* $f(y,z) := e^{-\alpha|z|}p_\alpha(y-z)\,\mathrm{sign}(z)$ *при* $\alpha > 0$ *и всех* $y$ *и* $z$, *то при любых* $y$

$$I(y) := \int |f(y,z)|\,dz = (1+\alpha|y|)e^{-\alpha|y|}/2 = (1/\alpha + |y|)p_\alpha(y), \tag{45}$$

$$J(y) := \int f(y,z)\,dz = \alpha y e^{-\alpha|y|}/2 = y p_\alpha(y). \tag{46}$$

Доказательство. Положим $y^+ = \max\{y,0\}$, $y^- = \max\{-y,0\}$ и заметим, что $2f(y,z) = \alpha e^{-\alpha|y-z|-\alpha|z|}\,\mathrm{sign}(z)$, а потому

$$2f(y,z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha|y|}\,\mathrm{sign}(y), & \text{если } -y^- \le z \le y^+, \\ \alpha e^{-\alpha|y|-2\alpha v}, & \text{если } z = y^+ + v \ge y^+, \\ -\alpha e^{-\alpha|y|-2\alpha u}, & \text{если } z = -y^- - u \le -y^-. \end{cases} \tag{47}$$

Таким образом,

$$I_o(y) := \int\limits_{-y^-}^{y^+} 2|f(y,z)|\,dz = \int\limits_{-y^-}^{y^+} \alpha e^{-\alpha|y|}\,dz = \alpha|y|e^{-\alpha|y|},$$

$$I_+(y) := \int\limits_{y^+}^{\infty} 2|f(y,z)|\,dz = \alpha \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha|y|-2\alpha v}dv = e^{-\alpha|y|}/2,$$

$$I_-(y) := \int\limits_{-\infty}^{-y^-} 2|f(y,z)|\,dz = \alpha \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha|y|-2\alpha u}du = e^{-\alpha|y|}/2 = I_+(y).$$

Из этих равенств с учетом (47) имеем

$$2I(y) = I_-(y) + I_o(y) + I_+(y) = (1+\alpha|y|)e^{-\alpha|y|},$$

$$2J(y) = -I_-(y) + I_o(y)\,\mathrm{sign}(y) + I_+(y) = I_o(y)\,\mathrm{sign}(y) = \alpha y e^{-\alpha|y|},$$

что доказывает (45) и (46). □

**Лемма 5.11.** *При выполнении условия* (Г) *верно утверждение теоремы* 2.

Доказательство. При фиксированных $n$, $i$ и $t$ положим

$$x := x_{ni}, \quad \delta := \delta_{ni}, \quad X := X_{ni} = x + \delta, \quad \gamma(y) := \gamma_{ni}(t,y), \quad \lambda(y) := \lambda_{ni}(t,y).$$

В этих обозначениях определение (30) примет вид

$$\lambda(x+\delta) = \int \gamma(x+\delta+z)e^{-\alpha|z|}\,\mathrm{sign}(z)\,dz.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|\lambda(x+\delta)| &\le \mathbf{E}\int |\gamma(x+\delta+z)|e^{-\alpha|z|}\,dz \\ &= \iint |\gamma(x+v+z)|e^{-\alpha|z|}p_\alpha(v)\,dzdv = \iint |\gamma(x+y)f(y,z)|\,dydz. \end{aligned} \tag{48}$$

При выводе последнего равенства мы воспользовались заменой $v = y - z$ и учли определение функции $f(y,z)$, введенной в лемме 5.10. Следовательно, ввиду (45)

$$\mathbf{E}|\lambda(x+\delta)| \le \int |\gamma(x+y)|I(y)\,dy = \int |\gamma(x+y)|(1/\alpha+|y|)p_\alpha(y)\,dy$$
$$= \mathbf{E}[(1/\alpha+|\delta|)|\gamma(x+\delta)|] \le (1/\alpha+|x|)\mathbf{E}|\gamma(X)| + \mathbf{E}|X\gamma(X)| < \infty. \quad (49)$$

Ограниченность последнего выражения вытекает из условия (29).

Таким образом, все интегралы в (48) и (49) абсолютно сходятся. Этот факт дает нам право менять порядок интегрирования в следующей цепочке равенств, отличающейся от (48) и (49) лишь заменой функции $|\gamma(x+y)f(y,z)|$ на $\gamma(x+y)f(y,z)$:

$$\mathbf{E}\lambda(x+\delta) = \iint \gamma(x+v+z)e^{-\alpha|z|}\operatorname{sign}(z)p_\alpha(v)\,dzdv$$
$$= \iint \gamma(x+y)f(y,z)\,dydz = \int \gamma(x+y)J(y)\,dy = \int \gamma(x+y)yp_\alpha(y)\,dy = \mathbf{E}[\delta\gamma(x+\delta)].$$

Нетрудно видеть, что полученное соотношение совпадает с (27). $\square$

Доказательство теоремы 2. Утверждения (А)–(В) теоремы 2 вытекают соответственно из лемм 6.14, 6.12 и 6.11, доказанных в работе [4]. Утверждение (Г) доказано выше в лемме 5.11. $\square$

**5.6.** Докажем остальные утверждения § 3.

Доказательство следствия 6. Если условие (26) имеет место при всех $n$, $i$ и всех $t \in (\beta_n - \kappa_n, \beta_n + \kappa_n)$, то

$$\mathbf{P}\big(\exists i : \Delta_{ni}(\beta_n^*) \ne 0\big) \le \mathbf{P}(|\beta_n^* - \beta_n| \ge \kappa_n) \to 0 \quad (50)$$

ввиду (39). Из (50) вытекает, что в формулах (13) и (17) величины $\Delta_{ni}(\beta_n^*)$ можно заменить нулем. Непосредственно из условия (26) получаем, что $\alpha_{n8} = 0$ и $\Delta_{noi}(\beta_n) = 0$ в формулах (19) и (23). Эти факты полностью доказывают следствие. $\square$

Доказательство следствия 7. Из определений (16) и (31) с учетом замечания 2.10 нетрудно получить, что $A_{n\zeta} = A_{no}$ и $B_{n\zeta} = B_{no}$. Требуемое утверждение вытекает из следствия 2, если в него внести упрощения, установленные в следствии 6. $\square$

Таким образом, все утверждения работы полностью доказаны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых классических предположений // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 380–396.
2. *Линке Ю. Ю., Саханенко А. И.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 128–145.
3. *Линке Ю. Ю. Саханенко А. И.* Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 592–619.
4. *Саханенко А. И., Линке Ю. Ю.* Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1372–1400.

**5.** *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. Кн. 1, 2.
**6.** *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
**7.** *Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.* Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.
**8.** *Kukush A. G. Martsinyuk Y. V.* Consistency and inconsistency of the weighted least squares estimator in linear functional error-in-variables models // Theory Stoch. Process. 1998. V. 4, N 1–2. P. 172–179.
**9.** *Edland S. D.* Bias in slope estimates for the linear errors in variables model by the variance ratio method // Biometrics. 1996. V. 52, N 1. P. 243–248.
**10.** *Fuller W. A.* Measurement error models. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2006.
**11.** *Delaportas P., Stephens D. A.* Bayesian analysis of error-in-variables regression model // Biometrics. 1995. V. 51, N 3. P. 1085–1095.
**12.** *Glesser L. J., Carroll R. J., Galio P. P.* The limiting distribution of least squares in an errors-in-variables regression model // Ann. Stat. 1987. V. 15, N 1. P. 220–233.
**13.** *Houwelingen J. C.* Use and abuse of variance models in regression // Biometrics. 1988. V. 44, N 3. P. 1073–1081.
**14.** *Amemiya T.* Regression analysis when the variance of the dependent variable is proportional to the square of its expectation // J. Amer. Stat. Assoc. 1973. V. 68, N 344. P. 928–934.
**15.** *Jobson J. D., Fuller W. A.* Least squares estimation when the covariance matrix and the parameter vector are functionally related // J. Amer. Stat. Assoc. 1980. V. 75, N 369. P. 176–181.
**16.** *Carroll R., Ruppert D.* Robust estimation in heteroscedastic linear models // Ann. Stat. 1982. V. 10, N 2. P. 429–441.
**17.** *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1994–1997 // Commun. Stat. Theory Methods. 1998. V. 27, N 10. P. 2581–2623.
**18.** *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 1998-1999 // Commun. Stat. Theory Methods. 2000. V. 29, N 9–10. P. 2313–2341.
**19.** *Draper N. R.* Applied regression analysis bibliography update 2000–2001 // Commun. Stat. Theory Methods. 2002. V. 31, N 11. P. 2051–2075.
**20.** *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
**21.** *Боровков А. А.* Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.

*Статья поступила 20 ноября 2009 г., окончательный вариант — 26 октября 2010 г.*

Саханенко Александр Иванович
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
`aisakh@mail.ru`

Линке Юлиана Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`linke@math.nsc.ru`