Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 514.763.22+512.813.52+517.518.242

ТЕОРЕМЫ ОБ ОБРАТНОЙ И НЕЯВНОЙ ФУНКЦИЯХ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАРНО

А. Д. Кожевников

Аннотация. Получены аналоги евклидовых теорем об обратной и неявной функциях для непрерывно hc-дифференцируемых отображений, заданных на многообразиях Карно.

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, непрерывная hc-дифференцируемость отображений.

§ 1. Введение

Работа посвящена исследованию свойств отображений, заданных на многообразиях Карно (или пространствах Карно — Каратеодори), в рамках концепции hc-дифференцируемости. Цель нашей работы — получить в рамках данной концепции аналоги евклидовых теорем об обратной и неявной функциях.

Многообразие Карно $\mathbb{M}$ — это связное гладкое риманово многообразие, в касательном расслоении $\mathbf{T}\mathbb{M}$ которого выделено так называемое горизонтальное подрасслоение $H\mathbb{M}$, удовлетворяющее определенным алгебраическим условиям (см., например, [1–5]). В частности, подрасслоение $H\mathbb{M}$ является вполне неинтегрируемым, т. е. $H\mathbb{M}$ и коммутаторы конечного порядка векторных полей $\{X_1, \dots, X_n\}$, образующих локальный базис в $H\mathbb{M}$, порождают все касательное пространство $\mathbf{T}_x\mathbb{M}$ в каждой точке x. Как следствие, для любых двух точек $x, y \in \mathbb{M}$ конечно *расстояние Карно — Каратеодори* $d_c(x, y)$, которое определяется как нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих точки x и y. Кусочно гладкая кривая $\gamma(t)$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{M}$.

Если мы обращаемся к локальной точке зрения, то известно (см. [1–5]), что геометрия многообразия Карно локально в приближении первого порядка относительно внутренней метрики d_c моделируется как геометрия нильпотентной градуированной алгебры Ли (группы Карно). Каждое касательное пространство $\mathbf{T}_g\mathbb{M}$ имеет дополнительную структуру стратифицированной алгебры Ли. Вслед за авторами работ [6, 7] будем наделять некоторую окрестность произвольной точки $g \in \mathbb{M}$ структурой группы Карно. Более точно, рассматриваемая окрестность с введенной структурой отождествляется с окрестностью нейтрального элемента группы Карно (см. теорему 3, определение 2), алгебра Ли которой есть $\mathbf{T}_g\mathbb{M}$. Данная окрестность называется в таком случае *локальной группой Карно* $\mathscr{G}^g$ (точка g играет в $\mathscr{G}^g$ роль нейтрального элемента).

Вместе с введенными терминами можно дать определение hc-дифференцируемости [8, 9]. Отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ двух многообразий Карно называется *hc-дифференцируемым* в точке g, если существует горизонтальный (однородный) гомоморфизм $L : \mathscr{G}^g \to \mathscr{G}^{f(g)}$ локальных групп такой, что

$$d_c^{\mathbb{N}}(f(v), L(v)) = o\big(d_c^{\mathbb{M}}(g, v)\big) \quad \text{при } v \to g.$$

Указанный гомоморфизм L называется *hc-дифференциалом f в точке g* и обозначается символом $Df(g)$. Когда оба многообразия являются группами Карно, данное определение эквивалентно определению $\mathscr{P}$-дифференцируемости из работы [10] (см., кроме того, [11, 12]). Если $Df(g)$ существует на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{M}$ и непрерывно зависит от точки g, то отображение f называется *непрерывно hc-дифференцируемым на Ω*.

Работа организована следующим образом. В § 2 приведены определения основных понятий и структур на многообразиях Карно, а также необходимые для рассмотрения известные результаты (см. [4–7, 13, 14]). В § 3 как следствие результатов работы [6] о характеризации непрерывно hc-дифференцируемых отображений (теорема 4.2) получена теорема об обратной функции.

Теорема 1 (об обратной функции). *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{M}$ — непрерывно hc-дифференцируемое отображение на открытом множестве Ω многообразия Карно $\left(\mathbb{M}, d_c^{\mathbb{M}}\right)$. Предположим, что hc-дифференциал*

$$Df(x_0) : \left(\mathscr{G}^{x_0}, d_c^{x_0}\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(x_0)}, d_c^{f(x_0)}\right)$$

обратим в некоторой точке x_0. Тогда существуют окрестность U точки x_0, окрестность W точки $f(x_0)$ и непрерывно hc-дифференцируемое отображение $h : W \to U$ такие, что

$$f \circ h|_W = \mathrm{Id}_W, \quad h \circ f|_U = \mathrm{Id}_U$$

и $Dh(y) = [Df(h(y))]^{-1}$ для всех $y \in W$.

Далее рассмотрим некоторые свойства множества уровня $S := f^{-1}(f(g))$ непрерывно hc-дифференцируемой функции $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$. Так, в теореме о неявной функции (§ 4) укажем условия алгебраического характера, достаточные для того, чтобы локально S представлялось как график в адекватном внутренней геометрии смысле. В некотором смысле при выполнении этих условий S может представлять собой аналог регулярной в субримановом смысле поверхности. Теория таких поверхностей активно развивалась на группах Карно и группах Гейзенберга (см. [15–19] и др.).

Найденные нами достаточные условия в общем случае очень ограничительные (эквивалентные им в случае групп Карно см. в [18]).

Теорема 2 (о неявной функции). *Пусть $\left(\mathbb{M}, d_c^{\mathbb{M}}\right)$ и $\left(\mathbb{N}, d_c^{\mathbb{N}}\right)$ — два многообразия Карно и $f : \Omega \to \mathbb{N}$ — непрерывно hc-дифференцируемое отображение на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{M}$. Предположим, что в окрестности некоторой точки $g \in \Omega$ существует интегрируемое эквирегулярное касательное подрасслоение $\mathbf{J} \subset \mathbf{T}\mathbb{M}$ (см. определение 4) такое, что для $\mathscr{L}(x) = \exp^{-1}_{f(x)} \circ Df(x) \circ \exp_x$ выполнено*

$$\operatorname{Ker} \mathscr{L}(g) \oplus \mathbf{J}(g) = V^{\mathbb{M}}(g).$$

Тогда существуют окрестность U точки g с локальным базисом векторных полей $\{Y_i, i = 1, \dots, \dim \mathbb{M}\}$, $\mathbf{J}(x) = \operatorname{span}\{Y_1(x), \dots, Y_{\dim \mathbb{N}}(x)\}$, $x \in U$, и отображение

$$\varphi : \operatorname{Ker} Df(g) \cap U \to U, \quad \varphi(n) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n) Y_k\right)(n)$$

такие, что

$$f^{-1}(f(g)) \cap U = \{\varphi(n) \mid n \in \operatorname{Ker} Df(g) \cap U\}.$$

Кроме того, для $n, n' \in \operatorname{Ker} Df(g) \cap U$ справедлива оценка

$$d_c^{\mathbb{M}}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n')Y_k\right)(n), \varphi(n)\right) \leq C\bigl\{d_{\mathrm{riem}}^{\mathbb{M}}(n,n')\bigr\}^{\frac{1}{M_{\mathbb{M}}}}.$$

В § 5 рассмотрены некоторые частные случаи, когда можно просто установить существование рассматриваемого подрасслоения $\mathbf{J}$. В том числе рассмотрен важный случай скалярного отображения $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, где для выполнения условий теоремы о неявной функции достаточно лишь сюръективности hc-дифференциала (см. [20]). В § 6 показано, что при выполнении условий теоремы о неявной функции однородный касательный конус (см. определение 4) к поверхности S совпадает с ядром соответствующего hc-дифференциала $\operatorname{Ker} Df(g)$.

Автор выражает огромную благодарность Сергею Константиновичу Водопьянову за постоянную поддержку и содействие, оказываемые им на всех этапах подготовки данной работы.

§ 2. Определения и предварительные сведения

1. Определение группы Карно. *Группой Карно* [13] называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой *стратифицирована*, т. е. разлагается в прямую сумму $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, $\dim V_1 \geq 2$, векторных пространств таких, что $[V_1, V_i] = V_{i+1}$ для $1 \leq i \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Символ $\operatorname{Pr}_{V_k}(v)$ обозначает проекцию вектора v на подпространство V_k, ассоциированную с указанным разложением. Векторы, лежащие в V_1, называются *горизонтальными*.

Стратифицированная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает однопараметрическую группу автоморфизмов $\{\delta_t\}_{t>0}$, называемых *растяжениями* и определяемых как $\delta_t(X) = t^i X$, $X \in V_i$. С помощью экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}$, которое является глобальным диффеоморфизмом алгебры Ли на группу Карно, определяем растяжения δ_t на группе $\mathbb{G}$, принимая то же обозначение.

Однородная норма ρ — это непрерывная на $\mathbb{G}$ функция класса $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$, удовлетворяющая свойствам: $\rho(x) \geq 0$, причем $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$; $\rho(\delta_t(x)) = t\rho(x)$, $t > 0$; $\rho(xy) \leq \kappa(\rho(x) + \rho(y))$, $\kappa \geq 1$. Однородная норма определяет однородную метрику r на $\mathbb{G}$: полагаем $r(x,y) = \rho(y^{-1}x)$ для любых $x, y \in \mathbb{G}$.

Естественно, что однородная норма определяется неоднозначно, однако любые две однородные нормы эквивалентны между собой [13]: если ρ' и ρ — две однородные нормы, то существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $0 < c_1 \leq \rho'(x)/\rho(x) \leq c_2 < \infty$ для любого $x \in \mathbb{G}$, отличного от 0.

Определение 1. Пусть даны две группы Карно $\mathbb{G}^1$ и $\mathbb{G}^2$ с растяжениями δ_t^1 и δ_t^2 соответственно. Групповой непрерывный гомоморфизм $L : \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$ называется *однородным*, если $L \circ \delta_t^1 = \delta_t^2 \circ L$ для всех $t > 0$.

Гомоморфизму групп Карно $L : \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^2$ соответствует гомоморфизм алгебр Ли $\mathscr{L} = \exp_2^{-1} \circ L \circ \exp_1 : \mathfrak{g}^1 \to \mathfrak{g}^2$. Однородный гомоморфизм L называется также *горизонтальным*, так как в этом случае $\mathscr{L}\bigl(V_1^1\bigr) \subset V_1^2$.

Ядро однородного гомоморфизма $\operatorname{Ker} L = \mathbb{K}$ — нормальная однородная подгруппа в $\mathbb{G}^1$, ядро $\operatorname{Ker} \mathscr{L} = \mathscr{K}$ — однородный идеал в $\mathfrak{g}^1$. Образ $\operatorname{Im} L$ — однородная подгруппа в $\mathbb{G}^2$, $\operatorname{Im} \mathscr{L}$ — однородная подалгебра в $\mathfrak{g}^2$. Подгруппа (подалгебра) называется *однородной*, если она выдерживает действие группы автоморфизмов $\{\delta_t\}_{t>0}$. Однородная подалгебра W допускает разложение $W = (W \cap V_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_m)$.

2. Определение многообразий Карно. Фиксируем связное риманово многообразие $\mathbb{M}$ размерности N класса C^∞. Оно называется *многообразием Карно*, если в касательном расслоении $\mathbf{T}\mathbb{M}$ фиксировано касательное подрасслоение $H\mathbb{M}$, называемое *горизонтальным* и обладающее следующими свойствами. Существует конечный набор натуральных чисел $\dim H_1 < \cdots < \dim H_i < \cdots < \dim H_M = N$, $1 \leq i \leq M$, и каждая точка $g \in \mathbb{M}$ имеет окрестность $U \subset \mathbb{M}$, на которой найдутся гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_N$, удовлетворяющие условию Хёрмандера [1, 4, 5, 21] в следующей форме.

1. $H_i(x) = \operatorname{span}\{X_1(x), \dots, X_{\dim H_i}(x)\}$ образует подпространство в $\mathbf{T}_x\mathbb{M}$ размерности $\dim H_i$, не зависящей от x (здесь $H_1(x) = H_x\mathbb{M}$, $H_M(x) = \mathbf{T}_x\mathbb{M}$).

2. Таблица коммутаторов векторных полей $\{X_n\}$ имеет вид

$$[X_i, X_j](x) = \sum_k c_{ijk}(x) X_k(x),$$

где $c_{ijk}(x) \equiv 0$ для $\deg X_k > \deg X_i + \deg X_j$. Степень поля $\deg X_k$ — это число $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$. Другими словами, $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$ для всех тех индексов i и j, для которых это выражение имеет смысл.

3. Фактор-отображение $[\cdot,\cdot]_0 : H_1 \times H_i/H_{i-1} \mapsto H_{i+1}/H_i$, $H_0 = \{0\}$, индуцированное скобкой Ли, является эпиморфизмом для всех $1 \leq i < M$ в каждой точке $x \in U$.

4. $X_j \in C^\infty(U)$, $j = 1, \dots, N$.

3. Экспоненциальное отображение и квазиметрика. Пусть $g \in \mathbb{M}$, $B_g(r) = \left\{X = \sum\limits_{i=1}^N x_i X_i(g) : \|X\|_g < r\right\}$ — открытый евклидов шар с центром в точке $0 \in \mathbf{T}_g\mathbb{M}$ радиуса r (евклидова норма $\|\cdot\|_g$ в $\mathbf{T}_g\mathbb{M}$ определяется римановым тензором). Известно (см., например, [22]), что отображение

$$\theta_g : X = \sum_{i=1}^N x_i X_i(g) \in \mathbf{T}_g\mathbb{M} \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i\right)(g), \quad \theta_g(0) = g \in \mathbb{M},$$

является C^∞-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_g(r_g)$ на некоторую окрестность точки g, непрерывно зависящим от точки g. В дальнейшем будем всегда считать положительное число r_g не зависящим от g из некоторой компактной части $\mathbb{M}$.

Замечание 1. Понятно, что каждая точка $p \in \mathbb{M}$ принадлежит некоторой компактно вложенной области $U \Subset \mathbb{M}$ (т. е. $\overline{U} \subset \mathbb{M}$ — компактное множество) такой, что для каждой точки $g \in U$ выполняется $\overline{U} \subset \theta_g(B(0, r_g))$.

Фиксируем точку $p \in \mathbb{M}$. Из определения области U (см. замечание 1) вытекает, что для любых точек $u, v \in U$ найдется единственный набор чисел $(u_1, \dots, u_N)$ такой, что $u = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N u_i X_i\right)(v)$. Квазиметрика [8] $d_\infty(u, v)$ между точками $v, u \in U$ определяется как неотрицательная величина

$$d_\infty(u, v) = \max\{|u_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1, \dots, N\}.$$

Шар радиуса r в квазиметрике d_∞ обозначается символом $\Box(g, r) = \{x \in U \mid d_\infty(g, x) < r\}$.

4. Метрика Карно — Каратеодори. Благодаря полной неинтегрируемости горизонтального подрасслоения $H\mathbb{M}$, для двух любых точек $x, y \in \mathbb{M}$ конечна внутренняя метрика Карно — Каратеодори

$$d_c(x, y) = \inf_{\gamma} \operatorname{Length}(\gamma),$$

где нижняя грань берется по всем абсолютно непрерывным в римановом смысле горизонтальным кривым $\{\gamma \mid \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{M}\}$, соединяющим точки x и y.

Предложение 1 [7, 14]. *Метрика Карно — Каратеодори удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $d_c(u, v) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $u = v$;

2) *для каждого* $x \in \mathbb{M}$ *множество* $B(x, r) = \{y \in \mathbb{M} \mid d_c(x, y) < r\}$ *открыто,* $r > 0$;

3) *для каждой тройки точек* $u, w, v \in \mathbb{M}$ *выполняется неравенство*

$$d_c(u, v) \leq d_c(u, w) + d_c(w, v);$$

4) *для метрики* d_c *справедлива* Ball-Box (см. *также* [5, 23]) *теорема: для любого компакта* $K \subset \mathbb{M}$ *существуют постоянные* $r_0 > 0$, C_1 *и* C_2 *такие, что для любой точки* $x \in K$ *и любого* $r \in (0, r_0)$ *справедливы соотношения*

$$\Box(x, C_1 r) \subset B(x, r) \subset \Box(x, C_2 r).$$

Кроме того, топологии, задаваемые римановой метрикой, квазиметрикой $d_\infty(u, v)$ *и метрикой* $d_c(u, v)$, *совпадают.*

5. Локальная группа Карно. Следующее утверждение служит основой исследования локальной геометрии многообразий Карно [1–4, 7, 14, 23, 24].

Теорема 3 [7, 14]. *Фиксируем точку* g *многообразия Карно* $\mathbb{M}$. *Тогда существуют векторные поля* $\{\widehat{X}_i^g\}$, $\widehat{X}_i^g(g) = X_i(g)$, $i = 1, \dots, N$, *определенные на* $\Box(g, r_g)$, *которые образуют базис нильпотентной градуированной алгебры Ли со следующей таблицей коммутаторов:*

$$\left[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g\right] = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(g) \widehat{X}_k^g.$$

Свойство 1 [8]. *Пусть* $\max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_N|\}$ *достаточно мало. Тогда*

$$a = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^g\right)(g).$$

Определение 2. Нильпотентной градуированной алгеброй Ли, порожденной векторными полями $\{\widehat{X}_i^g\}$, соответствует *локальная группа Карно* $\mathscr{G}^g$ [25]. Групповая операция для элементов

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathscr{G}^g, \quad y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}_i^g\right)(g) \in \mathscr{G}^g$$

определяется по формуле

$$x \cdot y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$$

при условии, что величины $\max\limits_i\{|x_i|\}$ и $\max\limits_i\{|y_i|\}$ достаточно малы.

Экспоненциальное отображение

$$\hat{\theta}_g : X = \sum_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g(g) \to \exp\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$$

является гладким диффеоморфизмом евклидова шара $B_g(\hat{r}_g)$ в локальную группу Карно $\mathscr{G}^g$. Можно полагать, что для каждой точки $g \in U$ выполняется $\overline{U} \subset \hat{\theta}_p(B_g(\hat{r}_g))$, где область U из замечания 1. По теореме 3 и свойству 1 число $\hat{r}_g$ можно считать совпадающим с числом r_g из замечания 1, другими словами, $\hat{\theta}_g = \theta_g$ на $B_g(r_g)$.

Относительно введенной групповой операции векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}$ являются левоинвариантными. Касательное пространство в нейтральном элементе $\mathbf{T}_g\mathbb{M}$ естественным образом наделяется структурой алгебры Ли с таблицей коммутаторов:

$$\left[\widehat{X}_i^g(g), \widehat{X}_j^g(g)\right]_g = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(g)\widehat{X}_k^g(g).$$

Полученную стратифицированную алгебру Ли $(\mathbf{T}_g\mathbb{M}, [\cdot,\cdot]_g)$ обозначим через $V(g) = V_1(g) \oplus \dots \oplus V_M(g)$.

Однопараметрическую группу растяжений на $\mathscr{G}^g$ будем обозначать через δ_t^g. Соотношение $\delta_t^g x \cdot \delta_\tau^g x = \delta_{t\tau}^g x$ определено лишь для тех t и τ, для которых оно имеет смысл: $t, \tau, t\tau \in (0, t(x))$.

Так как локальная группа Карно $\mathscr{G}^g$ является многообразием Карно с набором векторных полей $\{\widehat{X}_i^g\}$, на $\mathscr{G}^g$ определены квазиметрика $d_\infty^g(x,y)$ и метрика Карно — Каратеодори d_c^g. Запись $d_c^g(x)$ будет в дальнейшем означать $d_c^g(x,g)$. Из эквивалентности двух непрерывных однородных норм на группе Карно выводим, что метрика d_c^g и квазиметрика d_∞^g на локальной группе Карно $\mathscr{G}^g$ эквивалентны.

6. Понятие hc-дифференцируемости. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{N}$ — два многообразия Карно. Объекты, относящиеся к многообразиям Карно $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ (расстояние, алгебры Ли и т. д.), будем различать при помощи символов $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ соответственно, кроме, возможно, тех случаев, когда принадлежность тому или иному многообразию ясна из контекста и не может привести к путанице.

Определение 3 [8, 9]. Пусть даны многообразия Карно $\left(\mathbb{M}, d_c^{\mathbb{M}}\right)$, $\left(\mathbb{N}, d_c^{\mathbb{N}}\right)$ и открытое множество $\Omega \subset \mathbb{M}$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{N}$ называется *hc-дифференцируемым* в точке $g \in \Omega$, если существует однородный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^g, d_c^g\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(g)}, d_c^{f(g)}\right)$ локальных групп такой, что

$$d_c^{f(g)}(f(v), L(v)) = o\left(d_c^g(g,v)\right) \quad \text{при } v \to g. \tag{1}$$

Однородный гомоморфизм $L : \left(\mathscr{G}^g, d_c^g\right) \to \left(\mathscr{G}^{f(g)}, d_c^{f(g)}\right)$, удовлетворяющий условию (1), называется *hc-дифференциалом* отображения $f : \Omega \to \mathbb{N}$ в точке $g \in \Omega$ и обозначается символом $Df(g)$.

Если $f : \Omega \to \mathbb{N}$ hc-дифференцируемо в каждой точке $x \in \Omega$ и $Df(x)(v)$ непрерывно по совокупности переменных $x \in \Omega, v \in \Omega \cap \mathscr{G}^g$, то отображение f называется *непрерывно* hc-дифференцируемым на множестве Ω.

В работе [6] получено обобщение классического результата евклидова анализа о том, что непрерывность частных производных гарантирует непрерывную дифференцируемость отображения.

Теорема 4.2 [6]. *Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ — отображение многообразий Карно такое, что в каждой точке $g \in \mathbb{M}$ существуют горизонтальные производные $X_i f(g) \in H_{f(g)}\mathbb{N}$, непрерывные на $\mathbb{M}$, $i = 1, \dots, \dim H_1$. Тогда f hc-дифференцируемо в каждой точке $\mathbb{M}$.*

Соответствующий hc-дифференциалу гомоморфизм алгебр Ли $V^{\mathbb{M}}(g)$ и $V^{\mathbb{N}}(f(g))$ однозначно определяется отображением

$$H_g\mathbb{M} \ni X_i(g) \mapsto X_i f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp tX_i(g))|_{t=0} \in H_{f(g)}\mathbb{N}$$

базисных векторов $X_i(g)$, $i = 1, \dots, \dim H_1$, горизонтального пространства $H_g\mathbb{M}$ в горизонтальные векторы пространства $H_{f(g)}\mathbb{N}$.

Отображение $(g, v) \mapsto Df(g)(v)$ непрерывно по совокупности переменных $g \in \mathbb{M}$ и $v \in \mathscr{G}^g$.

Отметим в качестве следствия, что hc-дифференцируемость гладкого в римановом смысле отображения $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ эквивалентна условию $df(x)\big(H_x\mathbb{M}\big) \subset H_{f(x)}\mathbb{N}$, где $df(x)$ — риманов дифференциал f в точке x. В то же время непрерывно hc-дифференцируемое отображение не является, вообще говоря, отображением класса C^1 в римановом смысле.

§ 3. Доказательство теоремы об обратной функции

Из условия непрерывности $Df(x)$ на Ω и обратимости в точке x_0 (в частности, локальные группы $\mathscr{G}^{x_0}$ и $\mathscr{G}^{f(x_0)}$ изоморфны) следует, что существуют такие компактная окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\min_{x \in U} \min_{d_c^x(v) = \varepsilon_0} d_c^{f(x)}(Df(x)(v)) = \varepsilon_0 \mu > 0,$$

причем и $U \subset \mathscr{G}^x$, и $\{d_c^x(v) \le \varepsilon_0\} \subset \mathscr{G}^x$ для всех $x \in U$. В силу непрерывной hc-дифференцируемости f можем заключить [6], что

$$d_c^{f(a)}(f(b), Df(a)(b)) = \alpha\big(d_c^a(b)\big) d_c^a(b),$$

где $a, b \in U$, $\alpha(t) \to 0+$ при $t \to 0+$. Таким образом, в силу обобщенного неравенства треугольника и однородности метрик Карно — Каратеодори

$$d_c^{f(a)}(f(b)) \ge c\big\{\mu - \alpha\big(d_c^a(b)\big)\big\} d_c^a(b),\ c > 0 \quad \text{при } a, b \in U.$$

Значит, уменьшая при необходимости U, добиваемся того, что для некоторого $L > 0$

$$d_c^{f(a)}(f(b)) \ge L d_c^a(b) \text{ верно для всех } a, b \in U.$$

Из последнего неравенства следует, что непрерывное отображение $f : U \to f(U)$ биективно. По теореме об инвариантности области [26] заключаем, что отображение $f|_U$ открыто. Вышесказанное означает, что $W = f(U)$ — открытое множество и существует отображение $h : W \to U$, обратное к $f|_U$. Мы видим также, что обратное отображение h липшицево в метриках $d_c^{\mathbb{N}}$ и $d_c^{\mathbb{M}}$ соответственно. В частности, $f : U \to W$ — гомеоморфизм и $Df(a)$ обратим в каждой точке $a \in U$. Теперь непосредственно по определению проверяется, что h непрерывно hc-дифференцируемо на W и верна формула $Dh(y) = [Df(h(y))]^{-1}$. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы о неявной функции

1. Локальное рассмотрение. Прежде всего исследуем вопрос, связывающий геометрические и алгебраические свойства групп Карно, который в дальнейшем будет играть ключевую роль.

Пусть $L : (\mathbb{G}^1, \rho^1) \to (\mathbb{G}^2, \rho^2)$ — однородный эпиморфизм двух групп Карно. Пусть $\mathbb{S}$ — гладкое подмногообразие в $\mathbb{G}^1$ размерности $\dim(\mathbb{G}^2)$, проходящее через e_1. Вопрос будет следующим: для каких поверхностей $\mathbb{S}$ существуют константа $C > 0$ и окрестность $\widetilde{U}(e_1)$ точки e_1 такие, что для всех $a \in \mathbb{S} \cap \widetilde{U}(e_1)$

$$\rho^2(L(a)) \geq C\rho^1(a)?$$

Когда последнее свойство для $\mathbb{S}$ выполнено, будем говорить, что поверхность $\mathbb{S}$ *метрически трансверсальна* ядру гомоморфизма L.

Из группы Карно перенесем рассмотрение с помощью экспоненциального отображения на уровень алгебры Ли $\mathfrak{g} \cong \mathbf{T}_e\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}^N$. Далее $|v|$ будет означать евклидову норму вектора v. Для однородных норм ρ^1 и ρ^2, перенесенных на алгебры Ли, сохраняем прежнее обозначение.

Итак, $\mathscr{L} = \exp_2^{-1} \circ L \circ \exp_1 : \mathbf{T}_{e_1}\mathbb{G}^1 \to \mathbf{T}_{e_2}\mathbb{G}^2$ — однородный эпиморфизм соответствующих алгебр Ли, $\mathscr{S} = \exp_1^{-1}(\mathbb{S})$ — гладкое подмногообразие в $\mathbf{T}_{e_1}\mathbb{G}^1$. Заметим, что $J := \mathbf{T}_0\mathscr{S}$ совпадает с $\mathbf{T}_{e_1}\mathbb{S}$, так как $D(\exp)(0) = \mathrm{Id}$.

С самого начала естественно потребовать, чтобы $J \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L} = \{0\}$. Предполагая это, мы можем рассматривать $\mathscr{S}$ как график над J:

$$\mathscr{S} = \Big\{v + F(v) \mid v \in J,\ F(v) = \sum_j f_j(v)w_j\Big\}, \tag{2}$$

где фиксированные векторы $\{w_j\}$ образуют базис $\operatorname{Ker}\mathscr{L}$, $f_j : J \to \mathbb{R}$ — гладкие функции.

В введенных обозначениях получим следующий ответ.

Утверждение 1. *Пусть $J \cap \operatorname{Ker}\mathscr{L} = \{0\}$. Тогда для существования константы $C > 0$ и окрестности $\widetilde{U}(e_1)$ точки e_1 таких, что*

$$\rho^2\big(L(a)\big) \geq C\rho^1(a) \tag{3}$$

для всех $a \in \mathbb{S} \cap \widetilde{U}(e_1)$, необходимо, чтобы касательное пространство J допускало фильтрацию подпространств $\{J_k, k = 1, \dots, M_2\}$:

$$\{0\} = J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_{M_2} = J,\ \operatorname{Pr}_{V_i^1}(J_k) = \{0\} \text{ при } i > k \text{ таких, что}$$
$$\dim J_k - \dim J_{k-1} = \dim V_k^2, \quad \operatorname{Pr}_{V_k^1}(J_k) \oplus \big(\operatorname{Ker}\mathscr{L} \cap V_k^1\big) = V_k^1. \tag{4}$$

Если к тому же $F(v) \equiv 0$ или $\dim V_k^1 = \dim V_k^2$ для всех $k > 2$, то условие фильтрации (4) является достаточным для (3).

Доказательство. Обозначим через J_k множество векторов $v \in J$, представимых в виде $v = \tilde{v} + v_k$, где k — наибольший номер такой, что проекция $\operatorname{Pr}_{V_k^1}(v) = v_k$ отлична от нуля. Возьмем произвольный $v \in J_k$. В силу однородности $\mathscr{L}$ имеем

$$\rho^2(\mathscr{L}(tv + F(tv))) = \rho^2(\mathscr{L}(tv)) = \rho^2(\mathscr{L}(tv_k) + \mathscr{L}(t\tilde{v})) \leq c_1|t\mathscr{L}(v_k)|^{\frac{1}{k}} + o(|t|^{\frac{1}{k}})$$

при $t \to 0$, $c_1 > 0$. Так как $\rho^1(tv + F(tv)) \geq c_2|tv_k|^{\frac{1}{k}}, c_2 > 0$, для (3) необходимо, чтобы $\mathscr{L}(v_k) \neq 0$.

Мы доказали, что $\mathrm{Pr}_{V_k^1}(J_k)\cap \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}=0$. Заметим, что $\dim V_2=\dim J=\dim \mathrm{Pr}_{V_1^1}(J_1)+\dots+\dim \mathrm{Pr}_{V_{M_2}^1}(J_{M_2})$. Если $\dim \mathrm{Pr}_{V_{k_1}^1}(J_{k_1})<\dim V_{k_1}^2$ для какого-то номера k_1, то найдется также номер k_2 такой, что $\dim \mathrm{Pr}_{V_{k_2}^1}(J_{k_2})>\dim V_{k_2}^2$; противоречие с условием $\mathrm{Pr}_{V_{k_2}^1}(J_{k_2})\cap \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}=0$. Таким образом, $\dim \mathrm{Pr}_{V_k^1}(J_k)=\dim V_k^2$ для всех k, и разложение (4) необходимо.

Докажем, что для двухступенчатой группы Карно ($M_1=2$) условие (4) достаточно для выполнения (3). В силу условия касания $\mathbf{T}_0\mathscr{S}=J$ имеем следующую оценку: $|F(tv)|\le A|tv|^2$ (достаточно, чтобы $F\in C^{1,1}$). Здесь мы считаем, что константа $A>0$ выбрана независимо от v, взятого из ограниченной окрестности 0 в J и достаточно малого по абсолютной величине параметра t.

Первый случай: $v\in J_2\setminus J_1$, т. е. $v=\tilde v+v_2, v_2=\mathrm{Pr}_{V_2^1}(v)\ne 0$. Тогда для некоторого положительного числа $c>0$, зависящего только от констант эквивалентности однородных норм ρ и d_∞, имеем неравенство

$$\frac{\rho^2(\mathscr{L}(tv+F(tv)))}{\rho^1(tv+F(tv))}\ge c\frac{|\mathscr{L}(tv_2)|^{\frac12}+o(|t|^{\frac12})}{|tv_2|^{\frac12}+o(|t|^{\frac12})}\to c\left(\frac{|\mathscr{L}(v_2)|}{|v_2|}\right)^{\frac12}\ \text{ при } t\to 0.$$

Второй случай: $v\in J_1$. Тогда аналогично предыдущему с учетом условия касания

$$\frac{\rho^2(\mathscr{L}(tv+F(tv)))}{\rho^1(tv+F(tv))}\ge c(A)\frac{|\mathscr{L}(tv)|}{|tv|+o(|t|)}\to c(A)\frac{|\mathscr{L}(v)|}{|v|}\quad \text{при } t\to 0.$$

Вышенаписанные o-малые равномерны по $v\in J_2$, $|v_2|=1$, в первом случае и по $v\in J_1$, $|v|=1$, — во втором. Отметим, что модуль непрерывности при этом зависит непрерывно от $\mathscr{L}$. Условие (4) позволяет найти положительные постоянные μ_1,μ_2 такие, что для любых $v_2\in \mathrm{Pr}_{V_2^1}(J_2)$ и $v\in J_1$

$$|\mathscr{L}(v_2)|\ge \mu_2|v_2|,\quad |\mathscr{L}(v)|\ge\mu_1|v|.$$

Возьмем $\delta=\frac12\min\{c\sqrt{\mu_2},\, c(A)\mu_1\}$. Тогда для $v\in J$, $|v|=1$, в силу равномерности вышеуказанных пределов (рассматриваются два случая одновременно) найдется $t_0>0$ такое, что при $0<t<t_0$

$$\frac{\rho^2(\mathscr{L}(tv+F(tv)))}{\rho^1(tv+F(tv))}\ge\delta>0,$$

и тем самым приходим к требуемому.

Когда $F(v)\equiv 0$, доказательство только упрощается (с заменой $M_1=2$ произвольным).

В случае, когда $\dim V_k^1=\dim V_k^2$ для всех $k>2$, надо заметить, что вследствие сюръективности $\mathscr{L}$ для $v\in J$ имеем $\deg F(v)\le 2$ (фактически $F(v)\in V_1^1\oplus V_2^1$), что позволяет провести аналогичные с предыдущими рассуждения. $\square$

Замечание 2. В случае общих групп Карно для выполнения условия (3) придется наложить дополнительные ограничения на то, как $\mathscr{S}$ касается J. Например, если $w_j\in V_k^1\cap\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}$ — вектор в представлении (2), то для любого $v\in J_l\setminus J_{l-1}$ необходимо, чтобы все производные функции $g(t)=f_j(tv)$ равнялись нулю при $t=0$ до порядка $i<\frac{k}{l}$.

Замечание 3. Если J — однородное подпространство в V^1, то условие (4) эквивалентно $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}\oplus J=V^1$.

2. Алгебраические приготовления. Ниже докажем, что две локальные группы Карно $\mathscr{G}_1^g$ и $\mathscr{G}_2^g$, построенные по двум различным наборам векторных полей, изоморфны (см. другие доказательства этого свойства, например, [6, 27–30]. Также укажем удобную для нас «бескоординатную» форму [29], в которой будет записано действие hc-дифференциала.

Для данной точки g из многообразия Карно $\mathbb{M}$ рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{V}_i(g) = H_i(g)/H_{i-1}(g)$ и ассоциированное фактор-отображение $\pi_i : H_i(g) \to \widetilde{V}_i(g)$, $i = 1, \dots, M$. Введем на прямой сумме пространств

$$\widetilde{V}(g) = \widetilde{V}_1(g) \oplus \dots \oplus \widetilde{V}_M(g)$$

структуру алгебры Ли, изоморфной алгебре $V(g)$ при произвольном выборе базисных векторных полей на $\mathbb{M}$. Для этого нам понадобится

Утверждение 2. *Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 — гладкие векторные поля в окрестности точки g, причем $\deg X_{1,2} = k$, $\deg Y_{1,2} = l$. Тогда если $\pi_k(X_1(g)) = \pi_k(X_2(g))$ и $\pi_l(Y_1(g)) = \pi_l(Y_2(g))$, то $\pi_{k+l}([X_1, Y_1](g)) = \pi_{k+l}([X_2, Y_2](g))$.*

Доказательство. В некотором локальном базисе полей $\{Z_i\}$ (выбранных как в определении многообразия Карно) имеем представление

$$X_1(x) = \sum_i \alpha_i(x) Z_i(x), \quad Y_1(x) = \sum_j \beta_j(x) Z_j(x).$$

Тогда прямое вычисление с учетом свойства 2 из определения многообразия Карно показывает, что

$$\pi_{k+l}([X_1, Y_1](g)) = \sum_{\deg Z_i = k, \deg Z_j = l} \alpha_i(g)\beta_j(g)\pi_{k+l}([Z_i, Z_j](g)),$$

откуда и следует наше утверждение. $\square$

Теперь для двух произвольных векторов $v_k \in \widetilde{V}_k(g)$ и $v_l \in \widetilde{V}_l(g)$ определим их коммутатор

$$[v_k, v_l]_g^* = \pi_{k+l}([X, Y](g)),$$

где X, Y — гладкие векторные поля (достаточно класса C^2), $\deg X = k$, $\deg Y = l$, такие, что $\pi_k(X(g)) = v_k$ и $\pi_l(Y(g)) = v_l$. Из определения многообразия Карно следует, что такие поля X, Y найдутся, а вышесформулированное утверждение показывает корректность определения. Линейность коммутатора на каждом $\widetilde{V}_k(g)$, как и тождество Якоби, вытекает из соответствующих свойств коммутатора на алгебре Ли векторных полей. На все векторы из $\widetilde{V}(g)$ действие коммутатора продолжается по линейности.

Утверждение 3. *Алгебры Ли $V(g)$ и $\widetilde{V}(g)$ изоморфны, причем изоморфизм $\Pi : V(g) \to \widetilde{V}(g)$ таков, что $\Pi|_{V_i(g)} = \pi_i|_{V_i(g)}$.*

Доказательство. Из определения ясно, что Π — линейное биективное отображение. Пусть теперь $\{X_i\}$ — выбранные для определения $V(g)$ векторные поля с таблицей коммутаторов:

$$[X_i, X_j](x) = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(x) X_k(x).$$

Тогда, с одной стороны, используя определения, имеем

$$\Pi([X_i(g), X_j(g)]_g) = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(g)\pi_{\deg X_i + \deg X_j}(X_k(g)),$$

а с другой стороны, получаем

$$[\Pi(X_i(g)), \Pi(X_j(g))]^*_g = [\pi_{\deg X_i}(X_i(g)), \pi_{\deg X_j}(X_j(g))]^*_g$$
$$= \pi_{\deg X_i + \deg X_j}([X_i, X_j](g)) = \sum_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(g)\pi_{\deg X_i + \deg X_j}(X_k(g)). \ \square$$

Пусть теперь $(\mathbb{M}, d_c^{\mathbb{M}})$ и $(\mathbb{N}, d_c^{\mathbb{N}})$ — два многообразия Карно, $f : \Omega \subset (\mathbb{M}, d_c^{\mathbb{M}}) \to (\mathbb{N}, d_c^{\mathbb{N}})$ — непрерывно hc-дифференцируемое отображение на открытом множестве Ω.

Рассмотрим $\mathscr{L}(x) = \exp^{-1}_{f(x)} \circ Df(x) \circ \exp_x : V^{\mathbb{M}}(x) \to V^{\mathbb{N}}(f(x))$ — однородный гомоморфизм соответствующих алгебр Ли. Переносом $\mathscr{L}(x)$ определим гомоморфизм $l(x)$ алгебр Ли $\widetilde{V}(x)$ и $\widetilde{V}(f(x))$:

$$l(x) = \Pi_{f(x)} \circ \mathscr{L}(x) \circ \Pi_x^{-1}.$$

Заметим, что действие $l(x)(v) = \mathscr{L}(x)(v)$ равно производной $v(f)(x) \in H_1^{\mathbb{N}}(f(x))$ для любого $v \in H_1^{\mathbb{M}}(x)$, зависит только от f и не зависит от выбора локального базиса векторных полей [6, теорема 4.2]. Таким образом, зная только значения $l(x)(v) = v(f)(x)$ для $v \in H_1^{\mathbb{M}}(x)$, мы можем продолжить $l(x)$ до гомоморфизма стратифицированных алгебр Ли $\widetilde{V}(x)$ и $\widetilde{V}(f(x))$.

Отметим, кроме того, что если $v \in V_k(x)$, то условие $v \notin \operatorname{Ker} \mathscr{L}(x)$ эквивалентно $\pi_k(v) \notin \operatorname{Ker} l(x)$.

3. Эквирегулярное подрасслоение. Перейдем от рассмотрения в одном касательном пространстве к рассмотрению в касательном расслоении.

Будем искать гладкое касательное подрасслоение $\mathbf{J} \subset \mathbf{T}\mathbb{M}$ в некоторой окрестности $U(g) \subset \Omega$ точки g, исходя из следующих соображений.

Подрасслоение $\mathbf{J}$ размерности $\dim \mathbb{N}$ должно быть интегрируемым, $[\mathbf{J}, \mathbf{J}] \subset \mathbf{J}$. В этом случае по теореме Фробениуса для каждой точки $x \in U(g)$ существует содержащее точку x подмногообразие $\mathbb{L}^x$ многообразия $\mathbb{M}$ размерности $\dim \mathbb{N}$, подчиненное $\mathbf{J}$: $y \in \mathbb{L}^x \Rightarrow \mathbf{T}_y\mathbb{L}^x = \mathbf{J}(y)$. Потребуем, чтобы для $Df(x)$ и $\mathbb{L}^x$ было выполнено условие (3) (объекты рассматриваются в локальной группе $\mathscr{G}^x$). В частности, изначально предполагаем, что $Df(x)$ сюръективен.

Легко показать, пользуясь определением hc-дифференцируемости и обобщенным неравенством треугольника, что выполнение условия (3) в точке x равносильно тому, что $d_c^{\mathbb{N}}(f(x), f(y)) \geq \widetilde{C} d_c^{\mathbb{M}}(x, y), \widetilde{C} > 0$, для всех $y \in \mathbb{L}^x \cap U(x)$, где $U(x)$ — некоторая окрестность точки x. Таким образом, наше требование не зависит от выбора локального базиса.

Так как $\dim V_k^{\mathbb{N}}(y)$ не зависит от y, непосредственно из (4) получаем, что нам необходимо существование фильтрации

$$\begin{gathered}\{0\} = \mathbf{J}_0(x) \subset \mathbf{J}_1(x) \subset \dots \subset \mathbf{J}_{M_{\mathbb{N}}}(x) = \mathbf{J}(x), \\ \mathbf{J}_k \subset H_k^{\mathbb{M}}, \quad \dim \mathbf{J}_k = \dim H_k^{\mathbb{N}}, \quad \operatorname{Ker} l(x) \cap \pi_k(\mathbf{J}_k(x)) = \{0\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что условие (5) также на зависит от выбора локального базиса.

Здесь уместно дать

Определение 4. Если определенное на открытом множестве из $\mathbb{M}$ касательное подрасслоение $\mathbf{J} \subset \mathbf{T}\mathbb{M}$ допускает фильтрацию подпространств

$$\{0\} = \mathbf{J}_0(x) \subset \mathbf{J}_1(x) \subset \dots \subset \mathbf{J}_{M_{\mathbb{N}}}(x) = \mathbf{J}(x), \quad \mathbf{J}_k \subset H_k^{\mathbb{M}},$$

где $\dim \mathbf{J}_k$ не зависит от точки x, то будем называть его *эквирегулярным*. Если к тому же $\mathbf{J}$ интегрируемо, то соответствующее ему $\mathbb{L}^x$ будем называть *эквирегулярным подмногообразием* многообразия Карно $\mathbb{M}$.

Итак, пусть $\mathbf{J}$ — эквирегулярное интегрируемое подрасслоение. Выберем в $\mathbf{J}$ гладкие базисные векторные поля $\{Y_i \mid i = 1, \dots, \dim \mathbb{N}\}$:

$$\mathbf{J}_k(x) = \operatorname{span}\bigl\{Y_1(x), \dots, Y_{\dim H_k^{\mathbb{N}}}(x)\bigr\}.$$

В силу эквирегулярности мы можем дополнить поля $\{Y_i \mid i = 1, \dots, \dim \mathbb{N}\}$ до полного локального базиса векторных полей $\{Y_i \mid i = 1, \dots, \dim \mathbb{M}\}$ на $\mathbb{M}$, удовлетворяющих условию Хёрмандера, как в определении многообразия Карно (со сменой нумерации, естественно). Будем считать, что именно этот локальный базис и фиксирован в окрестности точки g. Иными словами, таким образом выбрана подходящая система координат.

Заметим, что при таком выборе базиса $\exp_x^{-1}(\mathbb{L}^x \cap \mathscr{G}^x) = \mathbf{J}(x) \cap W$, где W — некоторая окрестность $0 \in V^{\mathbb{M}}(x)$, и, значит, соответствующая функция $F_x(v) \equiv 0$ (см. п. 1).

Предположим, что

$$\operatorname{Ker} l(x) \cap \pi_k\bigl(\mathbf{J}_k(x)\bigr) = \{0\} \quad \text{при } x = g. \tag{6}$$

Тогда то же будет верно для x из некоторой открытой окрестности $U_1(g) \Subset U(g)$ вследствие непрерывности $\mathscr{L}(x)$, $\mathbf{J}(x)$, $H_k^{\mathbb{M}}(x)$ и $H_k^{\mathbb{N}}(f(x))$.

На самом деле система векторных полей $\{Y_i \mid i = 1, \dots, \dim \mathbb{N}\}$ на эквирегулярном подмногообразии $\mathbb{L}^x \cap U_1(g)$, $x \in U_1(g)$ удовлетворяет условию Хёрмандера (см. определение многообразия Карно). По существу, осталось проверить лишь эпиморфизм фактор-отображения скобки Ли, что легко следует из того, что $\mathscr{L}(x)$ — это изоморфизм алгебр Ли $\mathbf{J}(x) \subset V^{\mathbb{M}}(x)$ и $V^{\mathbb{N}}(f(x))$.

Отметим еще, что при данном выборе локального базиса векторных полей подалгебра $\mathbf{J}(g) \subset V^{\mathbb{M}}(g)$ однородна. Этот факт с учетом замечания 3 позволяет переписать условие (6) в эквивалентном и более простом виде:

$$\operatorname{Ker} \mathscr{L}(g) \cap \mathbf{J}(g) = \{0\} \text{ или, что равносильно, } \operatorname{Ker} l(g) \cap \Pi_g(\mathbf{J}(g)) = \{0\}. \tag{7}$$

Теперь видим, что в предположении (7) условие (3) (см. п. 1, утверждение 1; $L = Df(x)$, $\mathbb{S} = \mathbb{L}^x$) будет выполнено для всех $x \in U_1(g)$. В силу вышеупомянутой непрерывности можно считать, что константа C, как и размер соответствующей окрестности $\widetilde{U}(x)$ в неравенстве из (3), могут быть взяты независимо от $x \in U_1(g)$. Таким образом, существует окрестность $U_2(g) \Subset U_1(g)$ точки g такая, что

$$d_c^{f(x)}(Df(x)(y)) \geq C d_c^x(y)$$

для всяких $x \in U_2(g)$ и $y \in \mathbb{L}^x \cap U_2(g)$.

Замечание 4. Независимо от выбора локального базиса векторных полей на $\mathbb{M}$ многообразие $\exp_x^{-1}(\mathbb{L}^x)$ подходящим образом касается $\mathbf{J}(x)$ (см. замечание 2).

При сделанных предположениях на структуру $\mathbf{J}$ получаем, что локально ограничение f на $\mathbb{L}^x$ билипшицево:

$$C_1 d_c^{\mathbb{M}}(a, b) \leq d_c^{\mathbb{N}}(f(a), f(b)) \leq C_2 d_c^{\mathbb{M}}(a, b), \tag{8}$$

где положительные константы C_1, C_2 не зависят от выбора $x \in U'(g) \Subset U_2(g)$ и $a, b \in \mathbb{L}^x \cap U'(g)$. Липшицевость следует из непрерывной hc-дифференцируемости. Рассуждая, как в теореме об обратной функции, заключаем, что существуют такие окрестность $U'(g) \Subset U_2$ точки g и постоянная $L > 0$, не зависящая от выбора $x \in U'(g)$ и $y \in \mathbb{L}^x \cap U'(g)$, что $d_c^{f(x)}(f(y)) \geq L d_c^x(y)$, откуда и получаем оценку (8).

4. Существование неявной функции. Имея оценку (8), докажем, что вблизи точки g каждое пересечение $\mathbb{L}^x \cap f^{-1}(f(g))$ содержит ровно одну точку.

Рассмотрим нормальную подгруппу $\mathbb{K} = \operatorname{Ker} Df(g)$ в $\mathscr{G}^g$ и идеал $\mathscr{K} = \exp_g^{-1}(\mathbb{K})$ в алгебре Ли $V^{\mathbb{M}}(g)$. Пусть $\{Z_j \mid j = 1, \dots, \dim \mathbb{M} - \dim \mathbb{N}\}$ — фиксированный базис векторов в $\mathscr{K}$, тогда отображение

$$\{\alpha_j\}, \{\beta_k\} \to \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k Y_k\right) \circ \exp\left(\sum_{j=1}^{\dim \mathbb{M} - \dim \mathbb{N}} \alpha_j Z_j\right)(g)$$

является диффеоморфизмом некоторой окрестности 0 в $\mathbb{R}^{\dim \mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\dim \mathbb{M} - \dim \mathbb{N}}$ на некоторую окрестность $W(g) \subset U'(g)$. Выберем окрестность K_1 точки g в $\mathbb{K}$ так, что $\exp\bigl(\sum\limits_k \beta_k Y_k\bigr)(n) \in W(g)$ при $n \in K_1$ и $|\beta_k| \leq \varepsilon$, когда $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Для $n \in K_1$ обозначим $\widetilde{\mathbb{L}}^n = \mathbb{L}^n \cap \bigl\{\exp\bigl(\sum\limits_k \beta_k Y_k\bigr)(n), |\beta_k| < \varepsilon\bigr\}$. Так как отображение $f : \widetilde{\mathbb{L}}^n \to f(\widetilde{\mathbb{L}}^n)$, $n \in K_1$, билипшицево, оно, в частности, открыто и имеет билипшицево обратное. Кроме того, для любого $n \in K_1$ образ $f(\widetilde{\mathbb{L}}^n)$ содержит открытый шар $B_{\mathbb{N}}(f(n), R(\varepsilon))$ в метрике $d_c^{\mathbb{N}}$, причем радиус шара $R(\varepsilon)$ зависит только ε и константы C_1 из (8). Рассмотрим окрестность $K = K_1 \cap B_{\mathbb{M}}(g, R(\varepsilon)/C_2)$ точки $g \in \mathbb{K}$. Тогда для $n \in K$ имеем оценку $d_c^{\mathbb{N}}(f(g), f(n)) \leq C_2 d_c^{\mathbb{M}}(g, n) < R(\varepsilon)$, которая гарантирует принадлежность $f(g)$ множеству $f(\widetilde{\mathbb{L}}^n)$. Из последнего выводим существование единственной точки $\varphi(n) = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n) Y_k\right)(n) \in \widetilde{\mathbb{L}}^n$ такой, что $f(\varphi(n)) = f(g)$.

5. Регулярность. Докажем некоторую регулярность функции φ.

Пусть $n, n' \in K$. Рассмотрим точку

$$l(n, n') = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n') Y_k\right)(n) \in \widetilde{\mathbb{L}}^n.$$

Применяя оценку (8), получаем

$$\begin{aligned} C_1 d_c^{\mathbb{M}}(\varphi(n), l(n, n')) &\leq d_c^{\mathbb{N}}(f(\varphi(n)), f(l(n, n'))) \\ &= d_c^{\mathbb{N}}(f(\varphi(n')), f(l(n, n'))) \leq C_2 d_c^{\mathbb{M}}(\varphi(n'), l(n, n')). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (см., например, [31, предложение 2.8.12])

$$d_\infty(u, v) \leq c d_{\mathrm{Riem}}(u, v)^{\frac{1}{M}},$$

верным для всех точек u и v, для которых вышенаписанные выражения имеют смысл. Так как точки $\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n') Y_k\right)(n)$ и $\exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n') Y_k\right)(n')$ находятся на «параллельных прямых», верна оценка

$$d_c^{\mathbb{M}}\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n') Y_k\right)(n), \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \mathbb{N}} \beta_k(n') Y_k\right)(n')\right) \leq C\bigl\{d_{\mathrm{Riem}}^{\mathbb{M}}(n, n')\bigr\}^{\frac{1}{M_{\mathbb{M}}}},$$

где $C < \infty$ не зависит от выбора $n, n' \in K$, когда $\max\limits_k |\beta_k| \leq \varepsilon_0$. В результате

$$d_c^{\mathbb{M}}(\varphi(n), l(n, n')) \leq \frac{C_2 C}{C_1} \bigl\{d_{\mathrm{Riem}}^{\mathbb{M}}(n, n')\bigr\}^{\frac{1}{M_{\mathbb{M}}}}$$

и получаем нужную нам регулярность.

§ 5. Об области применения теоремы о неявной функции

Существование указанного в теореме интегрируемого эквирегулярного подрасслоения $\mathbf{J}$ зависит, главным образом, от алгебраических свойств горизонтального расслоения $H\mathbb{M}$ и является на самом деле очень ограничительным условием. Фактически в $\widetilde{V}^{\mathbb{M}}(g)$ необходимо найти однородную подалгебру $\widetilde{J}(g)$ такую, что $\widetilde{J}(g) \oplus \operatorname{Ker} l(g) = \widetilde{V}^{\mathbb{M}}(g)$, и продолжить ее до интегрируемого эквирегулярного подрасслоения $\mathbf{J}$, определенного на некоторой окрестности $U(g)$ точки g.

Ниже мы рассмотрим несколько частных примеров, в которых можно просто установить существование упомянутого подрасслоения $\mathbf{J}$.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Тогда если $Df(g)$ сюръективен, то в качестве $\mathbf{J}$ можно рассмотреть гладкое горизонтальное поле $X \subset H\mathbb{M}$, определенное в окрестности точки g такое, что $(Xf)(x) \neq 0$ (см. [15, 20]).

Пример 2. В случае групп Карно возможность обобщения теоремы о неявной функции исследована, например, в работах [16] (группы Гейзенберга) и [18] (общие группы Карно).

В случае, где $\mathbb{M} = \mathbb{G}$ — группа Карно, все алгебры Ли $\widetilde{V}^{\mathbb{M}}(x) \cong \mathfrak{g}$ изоморфны между собой. Пусть $f : \mathbb{G} \to \mathbb{N}$ непрерывно hc-дифференцируемо, $Df(g)$ сюръективен (для удобства $g = e$). Тогда если мы нашли однородную подалгебру $J(g)$ такую, что $J(g) \oplus \operatorname{Ker} \mathscr{L}(g) = V(g)$, то достаточно положить $\mathbf{J}(x) = (\tau_x)_* J(g) = D\tau_x(J(g))$, чтобы получить интегрируемое подрасслоение $\mathbf{J}$ (здесь $\tau_x(q) = xq$ — действие левого сдвига). Отметим, что однородная подгруппа $\mathbb{J} = \exp(J(g))$ является дополняющей к нормальной однородной подгруппе $\mathbb{K} = \operatorname{Ker} Df(g)$ (т. е. $\mathbb{J} \cap \mathbb{K} = e$, $\mathbb{J} \cdot \mathbb{K} = \mathbb{G}$), и ясно, что $\mathbb{L}^x = \tau_x(\mathbb{J})$.

Пример 3. Случай контактных многообразий. Контактное многообразие $\mathbb{M}$ — это нечетномерное многообразие Карно $\dim \mathbb{M} = 2n + 1$, в котором горизонтальное расслоение размерности $2n$ задается невырожденной 1-формой α: $H_x\mathbb{M} = \operatorname{Ker} \alpha(x)$, причем условие неинтегрируемости $H\mathbb{M}$ выражается в том, что форма $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ пропорциональна форме объема на $\mathbb{M}$ (в римановой метрике).

Каждая локальная группа Карно на контактном многообразии изоморфна группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Более того, согласно теореме Дарбу в некоторой окрестности каждой точки может быть введена система координат, в которой горизонтальное расслоение записывается как стандартное горизонтальное расслоение на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Другими словами, существует контактный диффеоморфизм $\psi : U(0) \subset \mathbb{H}^n \to U(g) \subset \mathbb{M}$, $\psi_*(H_x\mathbb{H}^n) = H_{\psi(x)}\mathbb{M}$.

Итак, пусть $\mathbb{M}$ — контактное многообразие $\dim \mathbb{M} = 2n + 1$, $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^k$, $k \leq n$, — непрерывно hc-дифференцируемое отображение, $Df(g)$ сюръективен. Определим $K_1^* := (\psi^{-1})_* K_1$, где $K_1 = V_1^{\mathbb{M}}(g) \cap \operatorname{Ker} \mathscr{L}(g)$. Так как $\dim K_1^* = 2n - k \geq n$, используя один замечательный алгебраический факт [16, предложение 3.25, лемма 3.26], находим подалгебру J^* в $V_1^{\mathbb{H}^n}(0)$ размерности k такую, что $K_1^* \cap J^* = \{0\}$. Теперь построим горизонтальное интегрируемое подрасслоение $\mathbf{J}^*$: $\mathbf{J}^*(x) = (\tau_x)_* J^*$ и перенесем его в $\mathbf{T}\mathbb{M}$: $\mathbf{J} = (\psi)_* \mathbf{J}^*$. Очевидно, полученное подрасслоение $\mathbf{J}$ будет удовлетворять требованиям теоремы.

В случае $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^k$, $k > n$, наша техника неприменима, так как максимальная размерность горизонтального интегрируемого подрасслоения равна n (лежандровы подмногообразия).

§ 6. Однородный касательный конус

Как приложение теоремы о неявной функции докажем, что однородный касательный конус к поверхности уровня $f^{-1}(f(g))$ в точке g совпадает с ядром hc-дифференциала отображения f в точке g.

Определение 5. Пусть $(\mathbb{M}, d_c)$ — многообразие Карно и $S \subset \mathbb{M}$. *Однородным касательным конусом к S в точке $a \in \mathbb{M}$* называется множество

$$\operatorname{Tan}(S,a) = \bigl\{v \in \mathscr{G}^a \mid v = \lim_{k\to\infty} \delta^a_{r_k}(a_k), \{r_k\} \subset \mathbb{R}^+, \{a_k\} \subset S, a_k \to a\bigr\}.$$

Замечание 5. В нашем определении однородного касательного конуса $\operatorname{Tan}(S,a)$, чтобы объекты, определенные на локальной группе Карно $\mathscr{G}^a$, имели смысл, предполагаем, что все $\delta^a_{r_k}(a_k)$ принадлежат некоторому $U \Subset \mathscr{G}^a$.

Отметим также тот факт, что однородный касательный конус зависит от выбора локального базиса векторных полей.

Теорема 4 (об однородном касательном конусе). *Пусть $S = f^{-1}(f(g))$ в предположениях и обозначениях теоремы* 2. *Тогда* $\operatorname{Tan}(S,g) = \operatorname{Ker} Df(g)$.

Доказательство. Сначала для удобства вычислений зафиксируем в окрестности точки g локальный базис векторный полей $\{Y_i\}$, как в теореме 2. Наша ближайшая цель — доказать, что

$$d^g_c(\varphi(n), n) = o\bigl(d^g_c(n,g)\bigr), \tag{9}$$

когда $n \to g$, $n \in K = U \cap \operatorname{Ker} Df(g)$. Полагая $n' = g$ в теореме 2 (и, значит, $l(n,n') = \varphi(n)$), мы можем получить первую оценку

$$d^{\mathbb{M}}_c(\varphi(n), n) \le C d^{\mathbb{M}}_c(g,n). \tag{10}$$

Вместе с точкой $\varphi(n) = \exp\bigl(\sum \beta_k(n) Y_k\bigr)(n)$ рассмотрим точку

$$\varphi'(n) = \exp\Bigl(\sum \beta_k(n) \widehat{Y}^g_k\Bigr)(n) = n \exp\Bigl(\sum \beta_k(n) Y_k\Bigr)(g),$$

где $\widehat{Y}^g_k$ — нильпотентизированные в точке g векторные поля и умножение понимается в смысле локальной группы Карно $\mathscr{G}^g$. Имея неравенство (10) и используя оценку из [31, теорема 2.7.1] (сравнение локальных геометрии многообразия Карно и локальной группы Карно), заключаем, что при $n \to g$

$$\max\bigl\{d^{\mathbb{M}}_\infty(\varphi(n), \varphi'(n)), d^g_\infty(\varphi(n), \varphi'(n))\bigr\} = o\bigl(d^{\mathbb{M}}_\infty(g,n)\bigr) = o\bigl(d^g_\infty(g,n)\bigr). \tag{11}$$

Далее, так как $n \in \operatorname{Ker} Df(g)$, имеем

$$\begin{aligned} d^{f(g)}_c(Df(g)(\varphi'(n))) &= d^{f(g)}_c(Df(g)(n^{-1}\varphi'(n))) \\ &\ge C d^g_c(n^{-1}\varphi'(n), g) = C d^g_c(\varphi'(n), n), \end{aligned} \tag{12}$$

где $C > 0$ — положительная константа. Из неравенства (12) ввиду соотношения (11) получаем, что при $n \to g$

$$d^{f(g)}_c(Df(g)(\varphi(n))) \ge C d^g_c(\varphi(n), n).$$

Запишем, учитывая, что $f(\varphi(n)) = f(g)$, определение hc-дифференцируемости отображения f в точке g:

$$d^{f(g)}_c(Df(g)(\varphi(n)), f(\varphi(n))) = d^{f(g)}_c(Df(g)(\varphi(n))) = o\bigl(d^g_c(\varphi(n), g)\bigr) \quad \text{при } n \to g.$$

Применяя теперь обобщенное неравенство треугольника к точкам $g, n, \varphi(n)$, приходим к (9).

Докажем включение $\operatorname{Tan}(S, g) \subset \mathbb{K} = \operatorname{Ker} Df(g)$. Пусть $\xi = \lim\limits_{l\to\infty} \delta^g_{r_l}(a_l)$, $r_l \to \infty$, $a_l \in S$, $a_l \to g$. В силу теоремы 2 $a_l = \varphi(n_l)$ для достаточно больших l. Ввиду оценки (9) имеем

$$\frac{d^g_c\big(\delta^g_{r_l}(\varphi(n_l)), \delta^g_{r_l}(n_l)\big)}{d^g_c\big(\delta^g_{r_l}(n_l)\big)} = \frac{d^g_c(\varphi(n_l), n_l)}{d^g_c(n_l)} \to 0 \quad \text{при } l \to \infty.$$

Отсюда выводим, что $d^g_c\big(\delta^g_{r_l}(\varphi(n_l)), \delta^g_{r_l}(n_l)\big) \to 0$ при $l \to \infty$ и существует предел $\lim\limits_{l\to\infty} \delta^g_{r_l}(\varphi(n_l)) = \lim\limits_{l\to\infty} \delta^g_{r_l}(n_l) \in \mathbb{K}$, а значит, $\xi \in \mathbb{K}$.

Докажем обратное включение. Пусть $\xi \in \mathbb{K}$. Для достаточно больших натуральных l рассмотрим точки $a_l = \varphi\big(\delta^g_{l^{-1}}(\xi)\big) \in S$. Вновь используя оценку (9), заключаем, что при $l \to \infty$

$$d^g_c\big(\varphi\big(\delta^g_{l^{-1}}(\xi)\big), \delta^g_{l^{-1}}(\xi)\big) = o\big(d^g_c\big(\delta^g_{l^{-1}}(\xi)\big)\big)$$

и, следовательно,

$$d^g_c\big(\delta^g_l\big(\varphi\big(\delta^g_{l^{-1}}(\xi)\big)\big), \xi\big) = o(1),$$

т. е. $\delta^g_l(a_l) \to \xi$ при $l \to \infty$.

Посмотрим, что произойдет, если в окрестности g выбрать произвольный базис векторный полей $\{X_i\}$. Пусть $i : (\mathbb{M}, \{X\}) \to (\mathbb{M}, \{Y\})$ — отображение, индуцированное тождественным отображение многообразия Карно $\mathbb{M}$, рассматриваемого с локальным базисом $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ соответственно. Как можно видеть, отображение i непрерывно hc-дифференцируемо и $Di(g) : \mathscr{G}^g_{\{X\}} \to \mathscr{G}^g_{\{Y\}}$ — изоморфизм локальных групп Карно. С помощью изоморфизма $Di(g)$ перенесем локальную параметризацию S:

$$S \cap U = \{\tilde\varphi(n) := \varphi(Di(g)(n)) \mid n \in \widetilde{K} := \operatorname{Ker}_{\{X\}} Df(g) \cap U\},$$

где $\operatorname{Ker}_{\{X\}} Df(g) = Di^{-1}(g)(\operatorname{Ker}_{\{Y\}} Df(g))$ — ядро hc-дифференциала $Df(g)$, записанное в базисе $\{X_i\}$. Покажем, что

$$\tilde{d}^g_c(\widetilde\varphi(n), n) = o\big(\tilde{d}^g_c(n, g)\big) \quad \text{при } \widetilde{K} \ni n \to g,$$

где $\tilde{d}^g_c$ — метрика локальной группы Карно $\mathscr{G}^g_{\{X\}}$, из чего аналогично предыдущему следует заключение теоремы. С одной стороны, по определению hc-дифференцируемости i имеем

$$\tilde{d}^g_c(Di(g)(n), n) = o\big(\tilde{d}^g_c(n, g)\big) \quad \text{при } n \to g.$$

С другой стороны, свойство (9) благодаря локальной аппроксимационной теореме будет верно и в метрике $\tilde{d}^g_c$:

$$\tilde{d}^g_c(\varphi(n), n) = o\big(\tilde{d}^g_c(n, g)\big) \quad \text{при } K \ni n \to g.$$

Таким образом, обобщенное неравенство треугольника, примененное к точкам $n \in \widetilde{K}$, $Di(g)(n)$ и $\widetilde\varphi(n)$, завершает доказательство. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodman R. W.* Nilpotent Lie groups: structure and applications to analysis. Berlin: Springer-Verl., 1976 (Lect. Notes Math.; V. 562).
2. *Métivier G.* Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'operateurs non elliptiques // Commun. Partial Differ. Equations. 1976. V. 1, N 5. P. 479–519.
3. *Rothschild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137, N 3–4. P. 247–320.
4. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155, N 1–2. P. 103–147.
5. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
6. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
7. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Локальная геометрия пространств Карно в условиях минимальной гладкости // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 3. С. 305–311.
8. *Vodop'yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemp. Math.; V. 424).
9. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
10. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
11. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$- differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2000. С. 603–670.
12. *Magnani V.* Differentiability and area formulas on stratified Lie groups // Houston J. Math. 2001. V. 27, N 2. P. 297–323.
13. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
14. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.
15. *Franchi B., Serapioni R. P., Serra Cassano F.* Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups // Comm. Anal. Geom. 2003. V. 11, N 5. P. 909–944.
16. *Franchi B., Serapioni R. P., Serra Cassano F.* Intrinsic submanifolds, graphs and currents in Heisenberg groups // Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat. 2005. V. 4. P. 23–38.
17. *Franchi B., Serapioni R. P., Serra Cassano F.* Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg groups // Adv. Math. 2007. V. 211, N 1. P. 152–203.
18. *Magnani V.* Towards differential calculus in stratified groups. http://cvgmt.sns.it/cgi/get.cgi/papers/mag07a/DCalc.pdf (Preprint).
19. *Kirchheim B., Serra Cassano F.* Rectifiability and parameterization of intrinsic regular surfaces in the Heisenberg group // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). 2004. V. 3, N 4. P. 871–896.
20. *Citti G., Manfredini M.* Implicit function theorem in Carnot–Carathéodory spaces // Commun. Contemp. Math. 2006. V. 8, N 5. P. 657–680.
21. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
22. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
23. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
24. *Bellaïche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
25. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
26. *Lloyd N. G.* Degree theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
27. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
28. *Margulis G. A., Mostow G. D.* Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot–Carathéodory space // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 299–317.

29. *Agrachev A., Marigo A.* Nonholonomic tangent spaces: intrinsic construction and rigid dimensions // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2003. V. 9. P. 111–120.

30. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений многообразий Карно и изоморфизм касательных конусов // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 4. С. 439–443.

31. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Analysis and Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.

Статья поступила 30 августа 2009 г.

Кожевников Артём Дмитриевич
DMA-ENS, 45 rue d'Ulm F-75230 Paris Cedex 05, France
artem.kozhevnikov@polytechnique.edu