Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.57

Ω–РАССЛОЕННЫЕ ФОРМАЦИИ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ T–ГРУПП

В. А. Ведерников, Е. Н. Демина

Аннотация. Определены и построены различные типы Ω-расслоенных формаций мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами. Получено описание строения минимальных и полных спутников, рассмотрены их применения к исследованию свойств решеток и произведений таких формаций.

Ключевые слова: мультиоператорная T-группа, Ω-расслоенная формация, спутник, направление, произведение, решетка формаций.

1. Введение

Понятие формации конечных групп введено в 1963 г. Гашюцем [1], и уже в этой работе функциональные методы нашли применение к построению формаций. А именно, Гашюцем определены локальные формации, занимающие центральное место в теории формаций. Дальнейшее развитие функциональный подход к изучению формаций нашел в работе [2] Л. А. Шеметкова, в которой определены ступенчатые, примарно постоянные, однородные и композиционные формации конечных групп. Многочисленные применения теории формаций конечных разрешимых групп систематизированы и обобщены на произвольные конечные группы в монографии [3]. Отметим, что композиционные формации были построены также Бэром (см. [4]), а Хартли в работе [5] определил локальные классы Фиттинга. В последние годы интенсивно исследуются частично локальные (ω-локальные) и частично композиционные (Ω-композиционные) формации и классы Фиттинга конечных групп (см., например, [6–9]). Идея построения новых видов формаций и классов Фиттинга привела к необходимости рассмотрения ω-спутников (Ω-спутников) различных направлений (см. [10, 11]), причем направление Ω-спутника f определяется как отображение класса $\mathfrak{I}$ всех конечных простых групп в множество всех непустых формаций Фиттинга. Ясно, что таких направлений существует бесконечное множество и, значит, для фиксированного непустого класса Ω можно построить бесконечное множество новых видов формаций, получивших в [10] название Ω-*расслоенных формаций* конечных групп.

В изучении строения ω-локальных и Ω-композиционных формаций конечных групп существенную роль играют их минимальные и максимальные спутники (см. [6–9]). В работах [10–14] приведено строение минимальных и максимальных спутников ω-веерных и Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга конечных групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–90006).

В книге [15] систематизированы исследования по теории формаций алгебраических систем и их применениям к мультикольцам и конечным алгебрам мальцевского многообразия. Дальнейший анализ понятия расслоенности формации конечных групп и групп, обладающих конечными композиционными рядами [16], показал, что понятие расслоенности формации носит более универсальный характер и может быть вполне применено к построению расслоенных формаций универсальных алгебр, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для идеалов.

Цель настоящей работы — построить различные классы расслоенных формаций мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, дать описание строения их минимальных и полных спутников, а также установить применение спутников к исследованию свойств решеток и произведений таких формаций.

Предварительные результаты в этом направлении анонсированы в [17].

Пусть дана аддитивная группа G с нулевым элементом 0. Группа G называется *мультиоператорной T-группой с системой мультиоператоров T* (или, коротко, *T-группой*), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна (см. [18; 19, гл. III; 20, гл. VI, с. 356]). Частными случаями мультиоператорных T-групп являются группы, модули, кольца и мультикольца. Напомним, что мультиоператорная T-группа называется *мультикольцом* [15], если каждая операция $t \in T$ дистрибутивна в G относительно операции сложения.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс всех T-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ — класс всех простых T-групп, т. е. таких ненулевых T-групп P, идеалами которых являются лишь нулевой идеал $\{0\}$ и сама T-группа P. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, $\Omega' = \mathfrak{I} \backslash \Omega$ и $\mathfrak{K}(G)$ — класс всех простых T-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega$, то G называется *$\Omega$-группой.* Через $\mathfrak{C}_\Omega$ обозначим класс всех Ω-групп, принадлежащих $\mathfrak{C}$. Используемые в дальнейшем обозначения и определения можно найти в работах [3, 4, 15, 18–23], приведем лишь некоторые из них.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество T-групп. Группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется *$\mathfrak{X}$-группой*; $(\mathfrak{X})$ обозначает класс T-групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) — класс всех T-групп, изоморфных T-группе G; $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ — объединение классов $\mathfrak{K}(G)$ для всех $G \in \mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ — $\mathfrak{C}$-классы соответственно всех абелевых, нильпотентных и разрешимых T-групп (см. [19, с. 144–153]).

Запись $\mathrm{M} \triangleleft G$ означает, что M является идеалом T-группы G. Будем полагать $\mathrm{O}_\Omega(G) = G_{\mathfrak{C}_\Omega}$, $\mathrm{O}^\Omega(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega}$, $\mathrm{O}_{\Omega',\Omega}(G) = G_{\mathfrak{C}_{\Omega'}\mathfrak{C}_\Omega}$, $\mathrm{O}^{\Omega,\Omega'}(G) = G^{\mathfrak{C}_\Omega \mathfrak{C}_{\Omega'}}$.

Формацией или *корадикальным классом* называется класс T-групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений [15, с. 12].

Класс T-групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* или *радикальным классом*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1 и N_2 — идеалы в T-группе G и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 + N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга T-групп. Сумма всех $\mathfrak{X}$-идеалов T-группы G называется *$\mathfrak{X}$-радикалом* T-группы G и обозначается через $G_\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация T-групп и G — T-группа. Пересечение всех идеалов T-группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* T-группы G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$.

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем применять, следуя [4], определения, обозначения и отмеченные ниже свойства произведений классов групп. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{C}$-классы T-групп. Тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G$ имеет идеал $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{C}$-класс T-групп и $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *формационным произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$; если $S_n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$; если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}, \mathfrak{F}$ — $\mathfrak{C}$-формации, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ — $\mathfrak{C}$-формация и $(\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = (G : G/G_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{X})$ называется *фиттинговым произведением* классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$; если $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$; если $\mathfrak{B}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{C}$-классы Фиттинга, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$ — $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга и $(\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}) \diamond \mathfrak{Y} = \mathfrak{B} \diamond (\mathfrak{X} \diamond \mathfrak{Y})$. Произведения $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$ введены Гашюцем в 1969 г.

2. Предварительные результаты

Следуя работам [10, 11], приведем следующие определения и обозначения. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных T-группах из их области определения.

Функция f: $\Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$формации T-групп$\}$ называется *ΩF-функцией*; функция $g : \mathfrak{I} \to \{$формации T-групп$\}$ называется *F-функцией*; функция $h : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$классы Фиттинга T-групп$\}$ называется *ΩR-функцией*; функция $i : \mathfrak{I} \to \{$классы Фиттинга T-групп$\}$ называется *R-функцией*; функция $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$непустые формации Фиттинга T-групп$\}$ называется *FR-функцией*.

На множестве всех ΩF-функций (F- и FR-функций) введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых таких функций μ_1 и μ_2 полагаем $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(A) \subseteq \mu_2(A)$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ $(A \in \mathfrak{I})$. Множество всех функций φ таких, что $\mu_1 \leq \varphi \leq \mu_2$, назовем *отрезком* и будем обозначать через $[\mu_1, \mu_2]$. Если $\mu_1 \leq \mu_2$ и $\mu_1 \neq \mu_2$, то обозначаем $\mu_1 < \mu_2$.

Доказательство следующей леммы содержится в [19, гл. 3].

Лемма 1. *Пусть G — T-группа, H — T-подгруппа в G, M, N — идеалы в G. Тогда*

1) *$H + N$ — T-подгруппа в G, а $H + N/N$ — T-подгруппа T-группы G/N, причем таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между всеми T-подгруппами T-группы G, содержащими N, и всеми T-подгруппами T-группы G/N;*

2) *$M + N$ — идеал в G;*

3) *$H \cap N \lhd H$, причем $H + N/N \cong H/H \cap N$;*

4) *если $M<N$, то $(G/M)/(N/M) \cong G/N$.*

В следующих примерах показано, что свойства T-группы G существенно отличаются от свойств базовой аддитивной группы G.

Пример 1. Пусть $G = (a, b : 3a = 2b = 0, b + a = 2a + b)$ — аддитивная группа, изоморфная симметрической группе подстановок третьей степени S_3. Пусть $T = \{t\}$, где t — унарная операция на множестве G, заданная по правилу $t(0) = 0$, $t(a) = 2a$, $t(2a) = a$, $t(b) = a + b$, $t(a + b) = 2a + b$, $t(2a + b) = b$. Тогда

$(a) = \{0, a, 2a\}$ является идеалом в T-группе G, но T-группа G не содержит T-подгрупп порядка два.

Пример 2. Пусть $G = (a, b : 3a = 2b = 0, b + a = 2a + b)$ — аддитивная группа, изоморфная симметрической группе подстановок третьей степени S_3. Пусть $T = \{t_1\}$, где t_1 — унарная операция на множестве G, заданная по правилу $t_1(0) = 0$, $t_1(a) = a + b$, $t_1(2a) = 2a + b$, $t_1(b) = a$, $t_1(a + b) = b$, $t_1(2a + b) = 2a$. Тогда T-группа G не содержит идеалов, отличных от $\{0\}$ и G, т. е. G — простая T-группа. Так как $[a, b] = -a - b + a + b = a \neq 0$, коммутант T-группы G совпадет с G, т. е. G — неразрешимая T-группа (см. [19, гл. 3, с. 144–153]).

Нетрудно проверить, что класс T-групп $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией Фиттинга. В дальнейшем, как правило, без ссылок будут применяться легко проверяемые утверждения следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{C}$-формации, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{C}$-классы Фиттинга, G — $\mathfrak{C}$-группа, H — T-подгруппа в G и $N \triangleleft G$. Тогда*

1) *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{M}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$;*
2) *если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $G_{\mathfrak{X}} \subseteq G_{\mathfrak{Y}}$;*
3) *$(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} + N/N$ и $N_{\mathfrak{X}} = N \cap G_{\mathfrak{X}}$;*
4) *$\mathrm{O}^{\Omega}(N) \subseteq N \cap \mathrm{O}^{\Omega}(G)$;*
5) *если $G/N \in \mathfrak{C}_\Omega$, то $\mathrm{O}^{\Omega}(G) = \mathrm{O}^{\Omega}(N)$;*
6) *если $H \triangleleft G$ и $G = H + N$, то $\mathrm{O}^{\Omega}(G) = \mathrm{O}^{\Omega}(H) + \mathrm{O}^{\Omega}(N)$;*
7) *$G^{\mathfrak{F}\circ\mathfrak{M}} = (G^{\mathfrak{M}})^{\mathfrak{F}}$;*
8) *если $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{C}$-формация Фиттинга, $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{C}$-класс групп, $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{H}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$;*
9) *если $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{C}$-формация Фиттинга, $\mathfrak{F}\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{F}} = N^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. 8. Пусть $(G/N)_{\mathfrak{F}} = T/N$. Так как $N \in \mathfrak{H}$, то $T \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Из $T \triangleleft G$ следует, что $T \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, то $G_{\mathfrak{F}}/N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}}/N \subseteq (G/N)_{\mathfrak{F}} = T/N$, и, значит, $G_{\mathfrak{F}} \subseteq T$. Поэтому $T = G_{\mathfrak{F}}$.

9. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{M}} \subseteq N$. Поскольку $N/G^{\mathfrak{F}} \triangleleft G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $N/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $N^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, ввиду $G/N \cong (G/N^{\mathfrak{F}})/(N/N^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{M}$, имеем $G/N^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} = N^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть f — ΩF-функция, φ — FR-функция и $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и N — идеал G. Так как $N + O_\Omega(G)/N \cong O_\Omega(G)/N \cap O_\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$, то $N + O_\Omega(G)/N \leq O_\Omega(G/N) = R/N$. Поэтому

$$(G/N)/O_\Omega(G/N) \cong G/R \cong (G/O_\Omega(G))/(R/O_\Omega(G)) \in f(\Omega').$$

Поскольку для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G/N)$ справедливо $N + G_{\varphi(A)}/N \cong G_{\varphi(A)}/N \cap G_{\varphi(A)} \in \varphi(A)$, то $N + G_{\varphi(A)}/N \leq (G/N)_{\varphi(A)} = T/N$ и

$$(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \cong G/T \cong (G/G_{\varphi(A)})/(T/G_{\varphi(A)}) \in f(A)$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G/N)$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G/N_i \in \mathfrak{F}$, N_i — идеалы G, $i = 1, 2$. Покажем, что $G/D \in \mathfrak{F}$, где $D = N_1 \cap N_2$. Пусть $O_\Omega(G/N_i) = R_i/N_i$, $i = 1, 2$. Тогда $(G/N_1)/O_\Omega(G/N_1) \cong$

$G/R_1 \in f(\Omega')$. Аналогично $G/R_2 \in f(\Omega')$. Так как $f(\Omega')$ — формация, то $G/(R_1 \cap R_2) \cong (G/D)/((R_1 \cap R_2)/D) \in f(\Omega')$.

Теперь покажем, что $(R_1 \cap R_2)/D = O_\Omega(G/D)$. Действительно,

$$(R_1 \cap R_2) + N_1/N_1 \cong R_1 \cap R_2/R_1 \cap R_2 \cap N_1 = R_1 \cap R_2/R_2 \cap N_1$$

и $(R_1 \cap R_2) + N_1/N_1$ — идеал в R_1/N_1. Поскольку R_1/N_1 является Ω-группой, то $R_1 \cap R_2/R_2 \cap N_1$ также является Ω-группой, т. е. $R_1 \cap R_2/R_2 \cap N_1 \in \mathfrak{C}_\Omega$. Аналогично $R_1 \cap R_2/R_1 \cap N_2 \in \mathfrak{C}_\Omega$. Так как $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией, то

$$R_1 \cap R_2/R_1 \cap N_2 \cap R_2 \cap N_1 = R_1 \cap R_2/D \in \mathfrak{C}_\Omega$$

и $R_1 \cap R_2/D \leq O_\Omega(G/D)$. Обратно, пусть $O_\Omega(G/D) = K/D$. Так как $R_1 \cap R_2/D \leq K/D$, то $R_1 \cap R_2 \leq K$. Поскольку $K/D \in \mathfrak{C}_\Omega$, то $K/N_1 \in \mathfrak{C}_\Omega$ и $K \leq R_1$. Аналогично $K \leq R_2$. Отсюда $K \leq R_1 \cap R_2$ и $R_1 \cap R_2/D = K/D$. Таким образом, $(G/D)/O_\Omega(G/D) \in f(\Omega')$.

Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G/D)$, $(G/N_i)_{\varphi(A)} = T_i/N_i$, $i = 1, 2$. Тогда

$$(G/N_i)/(G/N_i)_{\varphi(A)} \cong G/T_i \in f(A), \quad i = 1, 2,$$

и, значит, $G/T_1 \cap T_2 \in f(A)$. Как и выше, получим, что $T_1 \cap T_2/D = (G/D)_{\varphi(A)}$. Тогда $(G/D)/(G/D)_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G/D)$. Следовательно, $G/D \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 4. *Пусть f — F-функция, φ — FR-функция и $\mathfrak{F} = F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \mathfrak{K}(G))$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией.*

Определение 1. Формация $\Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$ называется *Ω-расслоенной формацией T-групп* с Ω-спутником f и направлением φ или, коротко, *ΩF-формацией.* Формация $F(g, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} : G/G_{\varphi(A)} \in g(A)$ для всех $A \in \mathfrak{K}(G))$ называется *расслоенной формацией* со спутником g и направлением φ или, коротко, *F-формацией.* Ω-спутник (спутник) f Ω-расслоенной (расслоенной) формации $\mathfrak{F}$ называется *внутренним* [3] или *интегрированным* [4], если $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ $(A \in \mathfrak{I})$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{C}$-формация, $\mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega = \oslash$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F(m, \varphi)$, где m – ΩF-функция такая, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$, $m(A) = \oslash$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega$, и φ — произвольная FR-функция. В частности, пустая формация $\oslash$ и нулевая формация (0) T-групп являются ΩF-формациями для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \Omega F(m, \varphi)$, где m и φ из заключения леммы. Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Если $G \in \mathfrak{M}$, то $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$ и из $\mathrm{A} \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G) = \oslash$ следует, что $G/G_{\varphi(A)} \in m(A)$. Поэтому $G \in \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Допустим, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$ и H — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{B} \backslash \mathfrak{M}$. Тогда H — монолитическая T-группа с монолитом $\mathrm{P} = \mathrm{H}^{\mathfrak{M}}$. Так как $\mathrm{H}/\mathrm{O}_\Omega(\mathrm{H}) \in m(\Omega') = \mathfrak{M}$, то $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{O}_\Omega(\mathrm{H})$. Пусть $B \in \mathfrak{K}(\mathrm{P})$. Тогда $\mathrm{B} \in \mathfrak{K}(\mathrm{H}) \cap \Omega$ и $\mathrm{H}/\mathrm{H}_{\varphi(B)} \in m(B) = \oslash$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Определение 2. Формация $\Omega F(f, \varphi)$ называется *Ω-свободной* или, коротко, *ΩFr-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{\mathrm{A}'}$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$, и обозначается через

$\Omega Fr(f) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A'}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. Обозначим направление Ω-свободной формации через φ_0 [10].

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется *Ω-канонической* [10] или, коротко, *ΩK-формацией*, если $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}\mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathfrak{I}$, и обозначается через $\mathfrak{F} = \Omega KF(f) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. Обозначим направление Ω-канонической формации через ${\varphi_2}'$.

Формация $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ называется *Ω-биканонической* [11] (*Ω-композиционной* [8, 9]) или, коротко, *ΩB-формацией* (*ΩC-формацией*), если $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}$ для любой неабелевой T-группы $A \in \mathfrak{I}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}\mathfrak{C}_A$ ($\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$) для любой абелевой T-группы $A \in \mathfrak{I}$ и обозначается через $\mathfrak{F} = \Omega\mathrm{B}F(f) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega'), G/O_{A'}(G) \in f(A)$ для всех $A \in (\Omega \backslash \mathfrak{A}) \cap \mathfrak{K}(G)$ и $G/O_{A',A}(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}(G))$ [11] ($\mathfrak{F} = \Omega\mathrm{C}F(f) = (G \in \mathfrak{C} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/F_A(G) \in f(A)$ для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)))$. Обозначим направления ΩB-формации и ΩC-формации соответственно через φ_2 и φ_3.

Отметим, что для расслоенных формаций конечных групп через φ_1 обозначается направление, коллинеарное направлению δ_1 локальной $\mathfrak{E}$-формации, т. е. $\varphi_1(Z_p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого простого числа p и $\varphi_1(A) = \mathfrak{E}_{A'}$ для любой неабелевой простой $\mathfrak{E}$-группы A (см. [13]).

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ненулевая $\mathfrak{C}$-формация и $\Omega = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной формацией.*

Доказательство. Пусть f — ΩF-функция такая, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{F})$ для всех $A \in \Omega$, и $\mathfrak{F}_1 = \Omega Fr(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Тогда $H/O_\Omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Кроме того, $H/O_{A'}(H) \in (G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{F}) \subseteq f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и L — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда L — монолитическая T-группа с монолитом $M = L^{\mathfrak{F}}$. Так как $L/\mathrm{O}_\Omega(L) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $\Omega = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$, то $L/\mathrm{O}_\Omega(L)$ является Ω-группой. Поскольку расширение Ω-группы с помощью Ω-группы является Ω-группой, то $L = \mathrm{O}_\Omega(L)$. Пусть $A \in \mathfrak{K}(M)$. Тогда $A \in \Omega$ и по определению $\mathfrak{F}_1$ имеем $L/O_{A'}(L) \in f(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $M \subseteq O_{A'}(L)$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1 и леммы 5 следует, что каждая $\mathfrak{C}$-формация является Ω-свободной для некоторого непустого класса простых T-групп Ω. В работах [10, 11] приведены примеры, показывающие, что уже в классе всех конечных групп множества всех Ω-свободных, Ω-канонических, Ω-композиционных, Ω-биканонических формаций являются попарно различными.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где φ — произвольная FR-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathfrak{F} = \Omega F(g, \varphi)$, где $g(A) = f(A) \cap \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;*
2) *$\mathfrak{F} = \Omega F(h, \varphi)$, где $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4 из [10].

Замечание 2. В дальнейшем, при фиксированном направлении φ, ΩF-спутники (F-спутники) ΩF-формации (F-формации) будем коротко называть *Ω-спутниками* (*спутниками*), если это не приводит к недоразумению.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ненулевая $\mathfrak{C}$-формация и $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной с направлением φ и Ω-спутником f тогда и* *только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — расслоенная формация с направлением φ и спутником f_1 таким, что $f_1(A) = f(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega$ и $f_1(A) = \oslash$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}\backslash\Omega$.*

Такие Ω-спутник f и спутник f_1 формации $\mathfrak{F}$ называются согласованными [10].

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [10] с заменой индукции по порядку группы индукцией по длине ее главного ряда.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая ненулевая $\mathfrak{C}$-формация и $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \subseteq \Omega$. Формация $\mathfrak{F}$ является Ω-свободной (Ω-канонической, Ω-биканонической, Ω-композиционной) с Ω-спутником f тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — свободная (каноническая, биканоническая, композиционная) формация со спутником f_1, согласованным с f.*

Замечание 3. Среди направлений φ расслоенной формации с $\varphi_0 \leq \varphi$ важное место занимают направления, удовлетворяющие равенству $\mathfrak{C}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$. Такие направления φ называются *правильными* или, коротко, *r-направлениями* (от англ. right) [10]. Правильными являются направления Ω-свободной, Ω-композиционной, Ω-канонической, Ω-биканонической $\mathfrak{C}$-формаций, а также направления вида $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}\mathfrak{X}(A)$, где $\mathfrak{X}(A)$ — любая непустая $\mathfrak{C}$-формация Фиттинга для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$.

Определение 3. Направление φ Ω-расслоенной (расслоенной) $\mathfrak{C}$-формации называется: *b-направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{C}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой T-группы $A \in \mathfrak{I}$; *b_A-направлением*, если $\varphi(A)\mathfrak{C}_A = \varphi(A)$ для некоторой простой T-группы $A \in \Omega$ [11]; *n-направлением*, если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой T-группы $A \in \mathfrak{I}$ [10]. FR-функцию φ назовем *$i_1 i_2 \dots i_k$-направлением* ΩF-формации $\mathfrak{F}$, если φ является i_j-направлением для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с Ω-спутником f и с r-направлением φ. Тогда*

1) *если $A \in \Omega, G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

2) *если $G/O_{\Omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

3) *если $G/M \in \mathfrak{F}$, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(M)$ и $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. 1. Так как $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $N = O_A(G) \subseteq O_\Omega(G)$, то

$$G/O_\Omega(G) \cong (G/N)/(O_\Omega(G)/N) = (G/N)/O_\Omega(G/N) \in f(\Omega').$$

По условию $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Пусть $B \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(G))\backslash(A)$. Тогда $B \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(G/N))\backslash(A)$ и по п. 8 леммы 2 получим

$$(G/N)/(G/N)_{\varphi(B)} = (G/N)/(G_{\varphi(B)}/N) \cong G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$$

и, значит, по определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$.

2. По условию $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$. Пусть $\mathrm{A} \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$ и $N = O_{A'}(G)$. Поскольку $O_{\Omega'}(G) \subseteq N$ и $G/O_{\Omega'}(G) \in \mathfrak{F}$, то $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $(G/N)/(G/N)_{\varphi(A)} \in f(A)$. По п. 8 леммы 2 $(G/N)_{\varphi(A)} = G_{\varphi(A)}/N$. Следовательно, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. По определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$.

3. По условию $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(M)$. Пусть $B \in \Omega \cap (\mathfrak{K}(G)\backslash\mathfrak{K}(M))$. Так как $G/M \in \mathfrak{F}$, то $(G/M)/(G/M)_{\varphi(B)} \in f(B)$. Из того, что M является B'-группой и $\varphi(B) = \mathfrak{C}_{B'}\varphi(B)$ по п. 8 леммы 2, получим $(G/M)/(G/M)_{\varphi(B)} = (G/M)/(G_{\varphi(B)}/M) \cong G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$. Следовательно, $G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$ для всех $B \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$, и, значит, по определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Если $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ — расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с r-направлением φ, то $\mathfrak{F}$ является Ω-расслоенной формацией с r-направлением φ и с Ω-спутником h, согласованным с f для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Доказательство. Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{F} = F(f, \varphi)$ — расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с r-направлением φ. Рассмотрим Ω-расслоенную $\mathfrak{C}$-формацию $\mathfrak{H} = \Omega F(h, \varphi)$ с r-направлением φ и с Ω-спутником h, согласованным с f, т. е. $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega$ и $h(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/O_\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\Omega')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A) = h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathrm{H} \in \mathfrak{H} \backslash \mathfrak{F}$ и H — T-группа с наименьшей длиной главного ряда с таким свойством. Тогда H — монолитическая T-группа с монолитом $\mathrm{M} = \mathrm{H}^{\mathfrak{F}}$. Так как $H/O_\Omega(H) \in h(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $\mathrm{M} \subseteq O_\Omega(H)$. Пусть $B \in \mathfrak{K}(M)$. Тогда $B \in \Omega$ и $\mathrm{H}/\mathrm{H}_{\varphi(B)} \in h(\mathrm{B}) = f(\mathrm{B})$. Пусть $\mathrm{A} \in \mathfrak{K}(H) \backslash \mathfrak{K}(M)$. Так как $\mathrm{M} \in \mathfrak{C}_{A'}$, по п. 8 леммы 2 $(\mathrm{H}/M)_{\varphi(A)} = \mathrm{H}_{\varphi(A)}/M$ и, значит, $\mathrm{H}/\mathrm{H}_{\varphi(A)} \cong (\mathrm{H}/\mathrm{M})/(\mathrm{H}_{\varphi(A)}/\mathrm{M}) = (\mathrm{H}/\mathrm{M})/(\mathrm{H}/M)_{\varphi(A)} \in f(\mathrm{A})$. Следовательно, по определению $\mathfrak{F}$ имеем $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Если $\mathfrak{F}$ — свободная (каноническая, биканоническая, композиционная) $\mathfrak{C}$-формация со спутником f, то $\mathfrak{F}$ является соответственно Ω-свободной (Ω-канонической, Ω-биканонической, Ω-композиционной) $\mathfrak{C}$-формацией с Ω-спутником h, согласованным с f для любого непустого класса $\Omega \subseteq \mathfrak{I}$.*

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор ΩF-функций (F-функций). Обозначим через $\bigcap\limits_{i\in I} f_i$ такую ΩF-функцию (F-функцию) f, что $f(\mathrm{A}) = \bigcap\limits_{i\in I} f_i(\mathrm{A})$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{I}$).

Лемма 8. *Пусть φ — произвольная FR-функция, $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = \Omega F(f_i, \varphi)$, $i \in I$. Тогда $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$ и $f(A) = \bigcap\limits_{i\in I} f_i(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Нетрудно проверить, что и для расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций справедливо утверждение, аналогичное лемме 8.

3. Минимальные и полные спутники расслоенных формаций T-групп

Аналогично n-кратно (тотально) локальной формации [15, 23] определяются (см. [24]) n-кратно (тотально) Ω-расслоенные $\mathfrak{C}$-формации, которые будем обозначать через $\Omega F_n(f, \varphi)$ ($\Omega F_\infty(f, \varphi)$).

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество $\mathfrak{C}$-групп. Обозначим через $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ ($F(\mathfrak{X}, \varphi)$) пересечение всех Ω-расслоенных (расслоенных) $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, каждая из которых содержит $\mathfrak{X}$. При фиксированном φ формации $\Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $F(\mathfrak{X}, \varphi)$ будем также коротко обозначать через $\Omega F(\mathfrak{X})$ и $F(\mathfrak{X})$ соответственно. Через $\Omega Fr(\mathfrak{X})$ и $Fr(\mathfrak{X})$, $\Omega CF(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{C}F(\mathfrak{X})$, $\Omega KF(\mathfrak{X})$ и $KF(\mathfrak{X})$, $\Omega BF(\mathfrak{X})$ и $BF(\mathfrak{X})$ будем обозначать соответственно Ω-свободную и свободную, Ω-композиционную и композиционную, Ω-каноническую и каноническую, Ω-биканоническую и биканоническую $\mathfrak{C}$-формации, порожденные $\mathfrak{X}$.

Так как всякое непустое множество ΩF-функций (F-функций) является частично упорядоченным с отношением $\leq$, имеет смысл говорить о его минимальных и максимальных элементах. ΩF-функцию (F-функцию) f назовем *минимальным* ΩF*-спутником* (F*-спутником*) Ω-расслоенной (расслоенной) $\mathfrak{C}$-формации $\mathfrak{F}$ с направлением φ, если f является минимальным элементом множества всех ΩF-спутников (F-спутников) $\mathfrak{C}$-формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — $\mathfrak{C}$-класс, Θ — некоторое непустое множество $\mathfrak{C}$-формаций и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H} \in \Theta$. Формация, принадлежащая Θ, называется Θ*-формацией.* Пересечение всех Θ-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, называется Θ*-формацией, порожденной классом* $\mathfrak{X}$, и обозначается через $\Theta \operatorname{form} \mathfrak{X}$ (см. [15]). Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ – Θ-формации. По определению полагаем $\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 = \Theta \operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Ω-спутник (спутник) f Ω-расслоенной (расслоенной) формации называется Θ-*значным,* если $f(A) \in \Theta$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ ($A \in \mathfrak{I}$). Ω-спутник (спутник) f будем называть $\Omega\Theta$*-спутником* (Θ*-спутником*), если f является Θ-значным.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{L}$ — непустая подформация в $\mathfrak{C}$, Θ — непустое множество $\mathfrak{L}$-формаций, $\oslash$ и (0) являются соответственно пустой и нулевой формациями T-групп. Множество Θ называется *полной решеткой формаций в* $\mathfrak{L}$, если $\{\oslash, (0), \mathfrak{L}\} \subseteq \Theta$ и пересечение любой совокупности Θ-формаций принадлежит Θ. Если $\mathfrak{L} = \mathfrak{C}$, то полную решетку Θ в $\mathfrak{C}$ будем коротко называть *полной решеткой.*

Замечание 4. Простейшими примерами полных решеток формаций в $\mathfrak{L}$ являются следующие: $\Theta = \{\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n\}$, где $\mathfrak{F}_0 = \oslash \subset \mathfrak{F}_1 = (0) \subset \mathfrak{F}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{L}$, в частности, $\{\oslash, (0), \mathfrak{L}\}$ является полной решеткой в $\mathfrak{L} \neq (0)$. Так как $\mathfrak{C}$ является Ω-расслоенной формацией для любого направления φ с Ω-спутником f таким, что $f(A) = \mathfrak{C}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, применяя лемму 8, можно построить бесконечное множество решеток Ω-расслоенных формаций для любого непустого класса простых T-групп Ω и любого направления φ. В частности, $\{\oslash, (0), \mathfrak{C}\}$ является полной решеткой. Изучение строения различных таких решеток представляет несомненный интерес.

Каждую $\mathfrak{C}$-формацию считаем 0-кратно Ω-расслоенной с направлением φ. Пусть $\Theta = \Omega\Theta_0^\varphi$ — полная решетка $\mathfrak{C}$-формаций, т. е. полная решетка 0-кратно Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ. Построим следующую последовательность полных решеток $\mathfrak{C}$-формаций:

$$\Theta = \Omega\Theta_0^\varphi, \Omega\Theta_1^\varphi, \Omega\Theta_2^\varphi, \dots, \Omega\Theta_n^\varphi, \dots, \tag{1}$$

где $\Omega\Theta_1^\varphi$ — множество всех Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих $\Omega\Theta_0^\varphi$-спутником, а $\Omega\Theta_n^\varphi$ при $n > 1$ является множеством всех Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих $\Omega\Theta_{n-1}^\varphi$-спутником. Если $\Omega = \mathfrak{I}$, то во всех членах последовательности (1) опускаем Ω и Θ_n^φ при $n \geq 1$ является множеством всех расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих Θ_{n-1}^φ-спутником.

Пусть $\mathbf{F}$ — множество всех $\mathfrak{C}$-формаций. Тогда $\mathbf{F}$ является полной решеткой и в этом случае во всех членах последовательности (1) вместо Θ подставляем $\mathbf{F}$ и $\Omega\mathbf{F}_n^\varphi$ при $n \geq 1$ является множеством всех Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих $\Omega\mathbf{F}_{n-1}^\varphi$-спутником.

Обозначим $\Delta_n = \Omega\Theta_n^\varphi$ для любого $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем полагаем $\Delta_0 = \Theta$. В частности, если $\Theta = \mathbf{F}$, то $\Delta_n = \Omega\mathbf{F}_n^\varphi$, а $\Delta_0 = \mathbf{F}$; если $\Omega = \mathfrak{I}$, то $\Delta_n = \Theta_n^\varphi$ и $\Delta_0 = \Theta$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс, Θ — полная решетка $\mathfrak{C}$-формаций. Тогда*

1) $\Delta_n = \Omega\Theta_n^\varphi$ *является полной решеткой формаций для любого* $n \in \mathbb{N}_0$ *и любого направления* φ;

2) *если* $\mathfrak{F} = \Delta_n \operatorname{form} \mathfrak{X}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \leq \varphi$, *то* $\mathfrak{F}$ *обладает единственным минимальным* Δ_{n-1}*-спутником* f *таким, что* $f(\Omega') = \Delta_{n-1} \operatorname{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X})$, $f(A) = \Delta_{n-1} \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $\mathrm{A} \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ *и* $f(A) = \oslash$, *если* $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$;

3) *пусть* f_i — *минимальный* Δ_{n-1}*-спутник формации* $\mathfrak{F}_i \in \Delta_n$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\varphi_0 \leq \varphi$; *тогда* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ *в том и только в том случае, если* $f_1 \leq f_2$;

4) *пусть* f_i — *минимальный* Δ_{n-1}*-спутник* Δ_n*-формации* $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\varphi_0 \leq \varphi$. *Тогда* Δ_n*-формация* $\mathfrak{F} = \Theta_n \operatorname{form}\big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{F}_i\big)$ *обладает минимальным* Δ_{n-1}*-спутником* f *таким, что* $f(A) = \Delta_{n-1} \operatorname{form}\big(\bigcup_{i\in I} f_i(A)\big)$ *для всех* $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$;

5) Δ_n *является модулярной решеткой для любого* $n \in \mathbb{N}_0$ *и любого направления* φ;

6) $\Omega\mathbf{F}_n^\varphi$ *является полной и модулярной решеткой для любого* $n \in \mathbb{N}_0$ *и любого направления* φ.

Доказательство. 1. Применим индукцию по n. Если $n = 0$, то $\Delta_0 = \Theta$ — полная решетка формаций. Пусть $n = 1$. Тогда $\Delta_1 = \Omega\Theta_1^\varphi$ является множеством всех Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих Θ-значным спутником. Пусть $\mathfrak{F}_i \in \Delta_1$ и f_i — Θ-значный спутник для любого $i \in I$. Если $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, то по лемме 8 $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i\in I} f_i$, причем $f(\mathrm{A}) = \bigcap_{i\in I} f_i(\mathrm{A}) \in \Delta_0$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \in \Delta_1$. По лемме 5 $\oslash \in \Delta_1$ и $(0) \in \Delta_1$ для любого направления φ с Θ-спутниками m_0 и m_1 соответственно такими, что $m_0(A) = \oslash$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ и $m_1(A) = \oslash$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega$, $m_1(\Omega') = (0)$. Из определения Ω-расслоенной формации следует, что $\mathfrak{C}$ — Ω-расслоенная формация для любого направления φ с Θ-спутником g таким, что $g(A) = \mathfrak{C}$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$. Следовательно, Δ_1 является полной решеткой. Предположим, что Δ_{n-1} является полной решеткой. Тогда, как для Δ_1, доказывается полнота решетки Δ_n для любого направления φ.

2. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс и φ — FR-функция такая, что $\varphi_0 \leq \varphi$.

Пусть $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) = \oslash$. Тогда $\mathfrak{X} = (0)$ — класс всех нулевых T-групп, $\mathfrak{F} = \Delta_n \operatorname{form}(0)$ и по п. 1 $\mathfrak{F} = (0)$. Тогда в силу леммы 5 $\mathfrak{F} = (0)$ обладает единственным минимальным Δ_{n-1}-спутником m таким, что

$$m(\Omega') = (0) = \Delta_{n-1} \operatorname{form}(0/O_\Omega(0)),$$

$m(A) = \oslash$ для всех $A \in \Omega$.

Пусть $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \neq \oslash$. Поскольку класс $\mathfrak{C}$ является Ω-расслоенной формацией с направлением φ, причем все значения ее Ω-спутника равны $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C} \in \Delta_n$. Кроме того, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$, и, значит, $\mathfrak{F} = \Delta_n \operatorname{form} \mathfrak{X}$ существует, и множество L всех Δ_{n-1}-спутников $\mathfrak{F}$ непусто.

Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L. По лемме 8 $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$. Так как по п. 1 Δ_{n-1} является полной решеткой, f_1 является Δ_{n-1}-спутником формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $f_1 \in L$. Кроме того, для любого элемента $h \in L$ имеем $f_1 \leq h$. Тем самым установлено, что f_1 — единственный минимальный Δ_{n-1}-спутник формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f — ΩF-функция, описанная в заключении п. 2 теоремы. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда $M/O_\Omega(M) \in f(\Omega')$ и из $\mathfrak{K}(M) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ для любых $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(M)$. Пусть $\mathfrak{H} = \Omega F(f, \varphi)$. Тогда

$M \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поскольку f — Δ_{n-1}-спутник, то $\mathfrak{H} \in \Delta_n$ и, значит, $\mathfrak{F} = \Delta_n \operatorname{form} \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая T-группа $H \in \mathfrak{X}$, что $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ следует, что $H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \oslash$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \Omega F(f_1, \varphi)$ получаем $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть теперь $A \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})) \setminus (\Omega \cap \mathfrak{K}(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{C}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и, значит, $G/G_{\varphi(A)} \cong \{0\} \in f_1(A)$. Так как f_1 — Δ_{n-1}-спутник, то $f(A) = \Delta_{n-1} \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(A)$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $f(\Omega') = \Delta_{n-1} \operatorname{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega')$. Если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$, то $f(A) = \oslash \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$.

Тогда $\mathfrak{H} = \Omega F(f, \varphi) \subseteq \Omega F(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ вытекает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ и, значит, $f \in L$. Так как f_1 — минимальный элемент в L, из $f \leq f_1$ следует, что $f = f_1$.

3. Является непосредственным следствием п. 2.

4. Пусть m — минимальный Δ_{n-1}-спутник Δ_n-формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $m = f$. По п. 2 при $\mathfrak{X} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ имеем

$$
\begin{aligned}
m(\Omega') &= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(G/O_\Omega(G) : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big) \\
&= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \Delta_{n-1} \operatorname{form} G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{F}_i\Big) \\
&= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(\Omega')\Big) = f(\Omega'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m(A) &= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(G/G_\varphi(A) : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\Big) \\
&= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} \Delta_{n-1} \operatorname{form} G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{F}_i\Big) \\
&= \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(A)\Big) = f(A)
\end{aligned}
$$

для всех A $\in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $m(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$, но для таких A по п. 2 $f_i(A) = \oslash$ для любого $i \in I$. Поэтому

$$f(A) = \Delta_{n-1} \operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I} f_i(A)\Big) = \oslash = m(A).$$

Следовательно, $f(A) = m(A)$ для всех A $\in \Omega \cup \{\Omega'\}$, и, значит, $f = m$.

5. По п. 1 Δ_n является полной решеткой для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и любого направления φ. Применяя индукцию по n, покажем, что Δ_n является модулярной решеткой.

Если $n = 0$, то $\Delta_0 = \Theta$ — полная решетка $\mathfrak{C}$-формаций. Так как в T-группах конгруэнции перестановочны [20, с. 356], в любой T-группе решетка конгруэнций модулярна [21, гл. II, предложение 6.9]. Тогда по теореме 9.8 из [15] решетка Δ_0 модулярна.

Пусть $n = 1$. Тогда $\Delta_1 = \Omega\Theta_1^\varphi$ — множество всех Ω-расслоенных формаций с направлением φ, обладающих хотя бы одним Δ_0-спутником, где $\Delta_0 = \Theta$. Пусть $\mathfrak{F}_i \in \Delta_1$ и f_i — минимальный Δ_0-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, причем

$\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Тогда по п. 3 $f_2 \leq f_1$. Применяя п. 4 и лемму 8, получим, что $f = f_1 \wedge (f_2 \vee_\Theta f_3)$ — Δ_0-спутник Δ_1-формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \Delta_1 \operatorname{form}(\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3)$, а $h = f_2 \vee_\Theta (f_1 \wedge f_3)$ — Δ_0-спутник Δ_1-формации $\mathfrak{H} = \Delta_1 \operatorname{form}(\mathfrak{F}_2 \cup (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3))$. Так как Θ — модулярная решетка формаций, $f(A) = h(A)$ для любого $\mathrm{A} \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ и, значит, $f = h$. Тогда по п. 3 $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Следовательно, Δ_1 является модулярной решеткой. Предположим, что Δ_{n-1} является модулярной решеткой. Тогда, как для Δ_1, доказывается модулярность решетки Δ_n для любого направления φ.

6. Пусть $\Theta = \mathbf{F}$ — множество всех $\mathfrak{C}$-формаций. Тогда Θ является полной решеткой и, как в п. 5, по теореме 9.8 из [15] решетка Θ модулярна. Следовательно, по п. 5 $\Omega\mathbf{F}_n^\varphi$ является модулярной решеткой для любого $n \in \mathbb{N}_0$ и любого направления φ. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда n-кратно Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega F_{(n-1)}$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}((G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi), \quad f(A) = \Omega F_{(n-1)}((G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда тотально Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \Omega F_\infty(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным ΩF_∞-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \Omega F_\infty((G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \varphi), \quad f(A) = \Omega F_\infty((G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X}), \varphi)$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.3. *Пусть f_i — минимальный $\Omega F_{(n-1)}$-спутник n-кратно Ω-расслоенной $\mathfrak{C}$-формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, если $f_1 \leq f_2$.*

Следствие 4.4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда n-кратно Ω-каноническая $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \Omega K F_n(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega K_{(n-1)}$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \Omega K_{(n-1)}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \Omega K_{(n-1)}(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда n-кратно Ω-биканоническая $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \Omega B F_n(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным $\Omega B F_{(n-1)}$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \Omega B F_{(n-1)}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \Omega B F_{(n-1)}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс, Θ — полная решетка формаций. Тогда Ω-расслоенная формация $\mathfrak{F} = \Omega\Theta F(\mathfrak{X}, \varphi)$, где $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\Omega\Theta$-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \Theta \operatorname{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \Theta \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \oslash$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.7. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда Ω-каноническая формация $\mathfrak{F} = \Omega KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩK-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда каноническая формация $\mathfrak{F} = KF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным K-спутником f таким, что $f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$ для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.*

Следствие 4.9. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда Ω-биканоническая формация $\mathfrak{F} = \Omega BF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩB-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X}))\backslash\mathfrak{A}$,

$$f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{A}$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.10. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда биканоническая формация $\mathfrak{F} = BF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным B-спутником f таким, что*

$$f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})\backslash\mathfrak{A}$,

$$f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A',A}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{A}$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.11. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда Ω-композиционная формация $\mathfrak{F} = \Omega CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным ΩC-спутником f таким, что*

$$f(\Omega') = \mathrm{form}(G/O_\Omega(G) : G \in \mathfrak{X}), \quad f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X}))\backslash\mathfrak{A}$,

$$f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{A}$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \Omega \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Следствие 4.12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой $\mathfrak{C}$-класс. Тогда композиционная формация $\mathfrak{F} = CF(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным C-спутником f таким, что*

$$f(A) = \mathrm{form}(G/O_{A'}(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})\backslash\mathfrak{A}$,

$$f(A) = \mathrm{form}(G/F_A(G) : G \in \mathfrak{X})$$

для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{A}$ и $f(A) = \varnothing$, если $A \in \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Замечание 5. Теорема 4 и следствия 4.1–4.12 обобщают известные результаты о минимальных спутниках расслоенных формаций конечных групп (см. [7–10, 16, 17, 24–26]). Отметим, что ряд других свойств решеток Ω-расслоенных формаций конечных групп установлен в работе [25].

Для описания строения полных спутников расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций нам потребуются следующие леммы.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с Ω-спутником f и b_A-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = \{0\}$ *— нулевая T-группа для любой $\mathfrak{C}$-группы G;*

2) $\mathfrak{F}$ *обладает Ω-спутником g таким, что $g(B) = f(B)$ для всех $B \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash (A))$ и $g(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$.*

Доказательство. 1. Пусть $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = R/G_{\varphi(A)}$. Так как $\varphi(A)$ является $\mathfrak{C}$-формацией Фиттинга, то $G_{\varphi(A)} \in \varphi(A)$. Поскольку $R/G_{\varphi(A)}$ является A-группой, а φ — b_A-направлением, то $R \in \varphi(A)\mathfrak{C}_A = \varphi(A)$. Следовательно, $R = G_{\varphi(A)}$, значит, $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = \{0\}$.

2. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(g, \varphi)$. Так как $f \leq g$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и H — группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $M = \mathrm{H}^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}_1$, то $\mathrm{H}/O_\Omega(H) \in g(\Omega') = f(\Omega')$ и $H/H_{\varphi(C)} \in g(C)$ для всех $C \in \Omega \cap \mathfrak{K}(H)$. Если C не изоморфна A, то $g(C) = f(C)$, значит, $H/H_{\varphi(C)} \in f(C)$ для всех $C \in (\Omega \cap \mathfrak{K}(\mathrm{H})) \backslash (A)$.

Пусть $C \cong A$. Тогда $H/H_{\varphi(A)} \in g(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$. Поскольку по п. 1 $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = \{0\}$, отсюда следует, что $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. В силу определения $\mathfrak{F}$ имеем $\mathrm{H} \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с внутренним Ω-спутником f и $b_A r$-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{C}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ *для $A \in \Omega$;*

2) $\mathfrak{F}$ *обладает внутренним Ω-спутником g таким, что $g(B) = f(B)$ для всех $B \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash (A))$ и $g(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$.*

Доказательство. 1. Пусть $A \in \Omega$. Допустим, что $\mathfrak{C}_A f(A) \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{C}_A f(A) \backslash \mathfrak{F}$ и T-группа G с наименьшей длиной главного ряда с таким свойством. Тогда G — монолитическая T-группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{C}_A f(A)$, то $G^{f(A)} \in \mathfrak{C}_A$. Поскольку $G \notin \mathfrak{F}$ и $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G^{f(A)} \neq \{0\}$ и, значит, M является A-группой. Тогда $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$. По условию φ является b_A-направлением. Тогда $\mathfrak{C}_A \subseteq \varphi(A)\mathfrak{C}_A = \varphi(A)$ и $G \in \mathfrak{C}_A f(A) \subseteq \varphi(A) f(A)$. Отсюда следует, что $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Так как φ является r-направлением, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, по п. 1 леммы 7 $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{C}_A f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для $A \in \Omega$.

2. Непосредственно следует из п. 1 и леммы 9.

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с внутренним Ω-спутником f и с n-направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}$ *для любой простой неабелевой T-группы A;*

2) $\mathfrak{F}$ *обладает Ω-спутником g таким, что $g(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash \mathfrak{A})$ и $g(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.*

Доказательство. 1. Пусть A — простая неабелева T-группа. Так как $\varphi_0 \leq \varphi$, то $\mathfrak{C}_{A'} \subseteq \varphi(A)$. Из того, что φ является n-направлением, следует, что $A \notin \varphi(A)$. Поскольку класс $\varphi(A)$ является $\{S_n, Q\}$-замкнутым, то $A \notin \mathfrak{K}(\varphi(A))$. Тогда $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_{A'}$. Следовательно, $\varphi(A) = \mathfrak{C}_{A'}$ для любой простой неабелевой T-группы A.

2. В силу п. 2 леммы 6 можем считать, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(g, \varphi)$, причем $g(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash \mathfrak{A})$ и $g(A) = f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Тогда $f \leq g$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая T-группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}}$.

Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G/O_\Omega(G) \in g(\Omega') = \mathfrak{F} = f(\Omega')$.

Пусть $B \in \mathfrak{K}(G) \cap \Omega \cap \mathfrak{A}$. Тогда $G/G_{\varphi(B)} \in g(B) = f(B)$.

Пусть $B \in (\mathfrak{K}(G) \cap \Omega) \backslash \mathfrak{A}$. Тогда $G/G_{\varphi(B)} \in g(B) = \mathfrak{F}$ и по п. 1 $\varphi(B) = \mathfrak{C}_{B'}$ и, значит, $M \in \mathfrak{C}_{B'}$.

Пусть $(G/M)_{\varphi(B)} = T/M$. Тогда $T/M \in \mathfrak{C}_{B'}$ и, значит, $T \in \mathfrak{C}_{B'}$. Так как $T \lhd G$, то $T \subseteq G_{\varphi(B)}$. Из того, что $G_{\varphi(B)}/M \subseteq (G/M)_{\varphi(B)} = T/M$, следует, что $T = G_{\varphi(B)}$. Тогда $G/G_{\varphi(B)} \cong (G/M)/(G_{\varphi(B)}/M) = (G/M)/(G/M)_{\varphi(B)} \in f(B)$. По определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с n-направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\Omega \cap \mathfrak{A} = \oslash$, то $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup \Omega$.*

Определение 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная (расслоенная) $\mathfrak{C}$-формация с направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$, и минимальным Ω-спутником f. Ω-спутник (спутник) h Ω-расслоенной (расслоенной) $\mathfrak{C}$-формации $\mathfrak{F}$ назовем *полным*, если $h(\Omega') = \mathfrak{F}$ и $h(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$ для любого $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ ($A \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}$).

Следствие 5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с bn-направлением φ таким, что $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным Ω-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \backslash \mathfrak{A}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 9, п. 2 теоремы 5 и определения 5.

Следствие 5.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с bnr-направлением φ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \backslash \mathfrak{A}$.*

Доказательство непосредственно следует из леммы 10, п. 2 теоремы 5 и определения 5.

Следствие 5.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-каноническая $\mathfrak{C}$-формация с минимальным ΩK-спутником f. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным внутренним ΩK-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$ для всех $A \in \Omega$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 9 и 10, следствия 4.7 и определения 5.

Следствие 5.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — каноническая $\mathfrak{C}$-формация с минимальным K-спутником f. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным внутренним K-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{C}_A f(A)$ для всех $A \in \mathfrak{I}$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 9 и 10, следствия 4.8 и определения 5.

Следствие 5.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-биканоническая $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным внутренним ΩB-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \backslash \mathfrak{A}$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 9 и 10, следствия 4.9 и определения 5.

Следствие 5.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — биканоническая $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным полным внутренним B-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{F})\backslash\mathfrak{A}$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 9 и 10, следствия 4.10 и определения 5.

Вопрос 1. Для каких направлений φ Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций таких, что $\varphi_0 \leq \varphi$, каждая $\Omega F(f, \varphi)$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником?

Замечание 6. Отметим, что для расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций направления φ_0 и φ_3 являются nr-направлениями, φ_2 является bnr-направлением, а φ_2' является br-направлением, причем $\varphi_2' \notin [\varphi_0, \varphi_3]$.

Пусть $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп. Все обозначения для Ω-расслоенных (расслоенных) формаций конечных групп сохраняем такими же, как в классе $\mathfrak{C}$, переходя лишь от аддитивной формы записи в конечных группах к мультипликативной. Запись $G = [A]B$ обозначает, что группа G является полупрямым произведением нормальной подгруппы A и подгруппы B. Применяя лемму 3.9 [3], нетрудно показать, что направление расслоенной формации φ_3 в классе $\mathfrak{E}$ является b-направлением. Для Ω-расслоенных $\mathfrak{E}$-формаций следствия 5.3–5.7 можно существенно усилить и получить положительный ответ на вопрос 1 для ряда направлений φ. Для этого нам потребуется следующая

Лемма 11. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние Ω-спутники Ω-расслоенной $\mathfrak{E}$-формации $\mathfrak{F}$ с b_Ar-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *если $A \in \Omega$ и $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$, то $\mathfrak{E}_A f_1(A) = \mathfrak{E}_A f_2(A)$;*
2) *если $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ и $\varphi \leq \varphi_3$, то $\mathfrak{E}_A f_1(A) = \mathfrak{E}_A f_2(A)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \Omega$ и φ является b_Ar-направлением Ω-расслоенной $\mathfrak{E}$-формации $\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E}_A f_1(A) \not\subseteq \mathfrak{E}_A f_2(A) = \mathfrak{F}_2$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1\backslash\mathfrak{F}_2$ и группа G наименьшего порядка с таким свойством. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}_2}$. Допустим, что $\mathfrak{K}(M) = (A)$. Так как $G/M \in \mathfrak{F}_2$, то

$$G \in \mathfrak{E}_A\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{E}_A(\mathfrak{E}_A f_2(A)) = (\mathfrak{E}_A\mathfrak{E}_A) f_2(A) = \mathfrak{E}_A f_2(A) = \mathfrak{F}_2.$$

Получили противоречие. Следовательно, M является A'-группой.

Тогда $O_A(G) = \{1\}$ — единичная группа. По п. 1 леммы 10 $G \in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Рассмотрим регулярное сплетение $X = A \wr G = [K]G$, где база сплетения K является элементарной A-группой. Тогда $X \in \mathfrak{E}_A\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $\varphi(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$. В силу леммы 3.1.9 [23] имеем $O_{A',A}(X) = K$. Так как $X/O_{A',A}(X) \in f_2(A)$, то $G \cong X/K \in f_2(A) \subseteq \mathfrak{F}_2$. Получили противоречие.

Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$ и $\varphi \leq \varphi_3$. Заметим, что $\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A \subseteq \varphi(A)\mathfrak{E}_A = \varphi(A) \subseteq \varphi_3(A)$. Тогда по [7] имеем $K = O_{A',A}(X) \leq X_{\varphi(A)} \leq X_{\varphi_3(A)} = F_A(X) = K$ и, значит, $X_{\varphi(A)} = K$. Так как $X/X_{\varphi(A)} \in f_2(A)$, то $G \cong X/K \in f_2(A) \subseteq \mathfrak{F}_2$. Получили противоречие.

Следовательно, $\mathfrak{E}_A f_1(A) \subseteq \mathfrak{E}_A f_2(A)$. В силу симметрии получим $\mathfrak{E}_A f_2(A) \subseteq \mathfrak{E}_A f_1(A)$ и, значит, $\mathfrak{E}_A f_1(A) = \mathfrak{E}_A f_2(A)$. Лемма доказана.

Следствие 5.8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-расслоенная $\mathfrak{C}$-формация с br-направлением $\varphi \le \varphi_3$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним Ω-спутником h таким, что $h(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \{\Omega'\} \cup (\Omega \backslash \mathfrak{A})$ и*

$$h(A) = \mathfrak{E}_A \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{F})$$

для всех $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$.

Доказательство. Так как $\varphi \le \varphi_3$, то φ является n-направлением. Тогда по п. 2 теоремы 5 и по п. 2 леммы 11 следует, что $\mathfrak{F}$ обладает внутренним Ω-спутником h из заключения следствия 5.8. Пусть g — внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$ и $A \in \Omega \cap \mathfrak{A}$. Тогда по п. 2 леммы 11 $\mathfrak{E}_A g(A) = \mathfrak{E}_A h(A) = h(A)$. Отсюда следует, что $g \le h$ и, значит, h — максимальный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Пусть f — максимальный внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}$. Так же, как и для g, получим, что $f \le h$. Тогда $f = h$ и, значит, h является единственным максимальным внутренним Ω-спутником формации $\mathfrak{F}$. Следствие доказано.

Замечание 7. Следствие 5.8 доказывается аналогично теореме 6 работы [13], установленной для ω-веерных формаций конечных групп. Применяя теорему 5 и леммы 9–11, нетрудно установить существование и единственность максимального внутреннего Ω-спутника для Ω-свободной, Ω-канонической, Ω-биканонической и Ω-композиционной формации конечных групп (см. [11, 13]).

4. Произведения расслоенных формаций T-групп

В п. 6 теоремы 4 установлено, что при $n \ge 1$ множество $\Omega\mathbf{F}_n^{\varphi}$ всех Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ, обладающих $\Omega\mathbf{F}_{n-1}^{\varphi}$-спутником, является полной и модулярной решеткой для любого направления φ. Покажем, что относительно операции умножения формаций это множество является моноидом для любого $n \in \mathbb{N}$ и для бесконечного множества направлений φ.

Лемма 12. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники $\mathfrak{C}$-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно с r-направлением φ. Если $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(f, \varphi)$ — $\mathfrak{C}$-формация с Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$ и f является внутренним Ω-спутником формации $\mathfrak{F}_1$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$. Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}_1$. Тогда G — монолитическая T-группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{F}_1}$.

Пусть $B \notin \Omega$ для любого $B \in \mathfrak{K}(M)$, т. е. $\mathfrak{K}(M) \cap \Omega = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{K}(M) \subseteq \Omega'$ и $M \in \mathfrak{C}_{\Omega'}$. Поскольку $G/M \in \mathfrak{F}_1$ и $M \subseteq O_{\Omega'}(G)$, то $G/O_{\Omega'}(G) \in \mathfrak{F}_1$. Кроме того, из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Таким образом, $G/O_{\Omega'}(G) \in \mathfrak{F}_1$ и $G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$, отсюда по п. 2 леммы 7 $G \in \mathfrak{F}_1$; противоречие.

Пусть $B \in \mathfrak{K}(M) \cap \Omega$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F} = f(\Omega')$. Поскольку $G \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$, то $N = G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Пусть $N \ne \{0\}$. Тогда $B \in \mathfrak{K}(N) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Следовательно, $B \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$. В силу леммы 2

$$\begin{aligned}(G/G_{\varphi(B)})^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{H}} + G_{\varphi(B)}/G_{\varphi(B)} = N + G_{\varphi(B)}/G_{\varphi(B)} \\ \cong N/N \cap G_{\varphi(B)} = N/N_{\varphi(B)} \in m(B).\end{aligned}$$

Отсюда $G/G_{\varphi(B)} \in m(B) \circ \mathfrak{H} = f(B)$. Имеем $G/M \in \mathfrak{F}_1$, $G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$ для любого $B \in \mathfrak{K}(M) \cap \Omega$ и $G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$, значит, по п. 3 леммы 7 $G \in \mathfrak{F}_1$; противоречие.

Пусть $N = \{0\}$. Тогда $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $G/G_{\varphi(B)} \in h(B) \subseteq \mathfrak{H}$. Если $B \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, то $m(B) \neq \oslash$ и $G/G_{\varphi(B)} \in \mathfrak{H} \subseteq m(B) \circ \mathfrak{H} = f(B)$. Если $B \in (\mathfrak{K}(M) \cap \Omega) \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$, то $G/G_{\varphi(B)} \in h(B) = f(B)$. Таким образом, $G/M \in \mathfrak{F}_1$, $G/G_{\varphi(B)} \in f(B)$ для любого $B \in \mathfrak{K}(M) \cap \Omega$, $G/O_\Omega(G) \in f(\Omega')$, значит, по п. 3 леммы 7 $G \in \mathfrak{F}_1$; противоречие.

Докажем теперь, что f — внутренний Ω-спутник формации $\mathfrak{F}_1$. Действительно, $f(\Omega') = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Кроме того, $f(B) = m(B) \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$ для любого $B \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(B) = h(B) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$ для любого $B \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники ΩK-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, причем $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является ΩK-формацией с внутренним ΩK-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega\mathrm{K}F(f)$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. По лемме 12 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$. Пусть Y — группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда Y — монолитическая T-группа с монолитом $R = Y^{\mathfrak{F}}$. Так как $Y/R \in \mathfrak{F}$, то $(Y/R)^{\mathfrak{H}} = Y^{\mathfrak{H}} + R/R \cong Y^{\mathfrak{H}}/R \cap Y^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Поскольку $Y \notin \mathfrak{F}$, то $Y \notin \mathfrak{H}$ и, значит, $Y^{\mathfrak{H}} \neq \{0\}$. Тогда $R \subseteq Y^{\mathfrak{H}}$. Поэтому $Y^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$. Пусть $C \in \mathfrak{K}(R)$.

Так как $Y/O_\Omega(Y) \in f(\Omega') = \mathfrak{F}$, то $R \subseteq O_\Omega(Y)$ и, значит, $\mathrm{C} \in \Omega$. Кроме того,

$$(Y/O_\Omega(Y))^{\mathfrak{H}} = (Y^{\mathfrak{H}} + O_\Omega(Y))/O_\Omega(Y) \cong Y^{\mathfrak{H}}/(O_\Omega(Y) \cap Y^{\mathfrak{H}}) = Y^{\mathfrak{H}}/O_\Omega(Y^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{M}.$$

Из монолитичности Y имеем $O_{C',C}(Y) = O_C(Y)$. Пусть $\mathrm{C} \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Тогда $Y/O_{C',C}(Y) \in f(C) = h(C)$, $Y/O_C(Y) \in \mathfrak{H}$ и по п. 1 леммы 7 $Y \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Поэтому для любого $\mathrm{C} \in \mathfrak{K}(R)$ имеем $\mathrm{C} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Тогда из того, что $Y/O_{C',C}(Y) \in f(C) = m(C) \circ \mathfrak{H}$, следует, что

$$\begin{aligned}(Y/O_{C',C}(Y))^{\mathfrak{H}} = Y^{\mathfrak{H}} + O_{C',C}(Y)/O_{C',C}(Y) &\cong Y^{\mathfrak{H}}/(O_{C',C}(Y) \cap Y^{\mathfrak{H}}) \\ &= Y^{\mathfrak{H}}/O_{C',C}(Y^{\mathfrak{H}}) \in m(C)\end{aligned}$$

для любого $\mathrm{C} \in \mathfrak{K}(R)$ и, значит, по п. 3 леммы 7 имеем $Y^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Тем самым $Y \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники $\Omega\mathrm{K}_n$-формаций (ΩK_∞-формаций) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, причем $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является $\Omega\mathrm{K}_n$-формацией (ΩK_∞-формацией) с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Теорема 7. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно с r-направлением $\varphi \leq \varphi_2$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является Ω-расслоенной $\mathfrak{C}$-формацией с направлением φ и с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \Omega F(f, \varphi)$. По лемме 12 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$. Пусть Y — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда Y — монолитическая T-группа с монолитом $R = Y^{\mathfrak{F}}$. Как и при доказательстве теоремы 6, получим $R \subseteq Y^{\mathfrak{H}} \cap O_\Omega(Y)$, $Y^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$, $Y^{\mathfrak{H}}/O_\Omega(Y^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{M}$ и $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$.

Пусть $B \in \mathfrak{K}(R)$. Тогда $B \in \Omega$. Допустим, что $O_{B'}(Y) \neq \{0\}$. Тогда $R \subseteq O_{B'}(Y)$ и, значит, $B \in \mathfrak{K}(R) \subseteq \mathfrak{K}(O_{B'}(Y))$, что невозможно. Следовательно, $O_{B'}(Y) = \{0\}$ для любого $B \in \mathfrak{K}(R)$. Так как $\varphi \leq \varphi_2$, то $Y_{\varphi(B)} \leq O_{B',B}(Y) = O_B(Y)$.

Пусть $B \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Тогда $Y/Y_{\varphi(B)} \in f(B) = h(B) \subseteq \mathfrak{H}$, следовательно, $Y/O_B(Y) \in \mathfrak{H}$. По п. 1 леммы 7 $Y \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Поэтому для любого $B \in \mathfrak{K}(R)$ имеем $B \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$. Тогда $f(B) = m(B) \circ \mathfrak{H}$ для всех $B \in \mathfrak{K}(R)$. Из $Y/Y_{\varphi(B)} \in f(B) = m(B) \circ \mathfrak{H}$ следует, что

$$(Y/Y_{\varphi(B)})^{\mathfrak{H}} = Y^{\mathfrak{H}} + Y_{\varphi(B)}/Y_{\varphi(B)} \cong Y^{\mathfrak{H}}/(Y_{\varphi(B)} \cap Y^{\mathfrak{H}}) = Y^{\mathfrak{H}}/(Y^{\mathfrak{H}})_{\varphi(B)} \in m(B)$$

для любого $B \in \mathfrak{K}(R)$. В силу леммы 6 можем считать, что $m(\Omega') = \mathfrak{M}$. Так как $Y^{\mathfrak{H}}/R \in \mathfrak{M}$ и $Y^{\mathfrak{H}}/O_\Omega(Y^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{M} = m(\Omega')$, то по п. 3 леммы 7 имеем $Y^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$. Значит, $Y \in \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Замечание 8. Теорема 7 может быть применена к бесконечному множеству r-направлений φ таких, что $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Действительно для направлений расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций имеем следующую цепь: $\varphi_0 < \varphi_2 < \varphi_3$, причем между двумя различными из этих направлений можно включить бесконечную цепь попарно различных неэквивалентных r-направлений, т. е. два различных таких направления для одного и того же непустого класса Ω простых T-групп определяют различные множества Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций. Пусть $i < j$ и $\mathfrak{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ — счетное множество попарно не изоморфных абелевых простых T-групп. Полагаем $\varphi_i = \alpha_0$, $\alpha_n(A) = \varphi_i(A)$ для всех $A \in \mathfrak{I} \backslash \bigcup\limits_{n}^{s=1} (A_s)$ и $\alpha_n(A) = \varphi_j(A)$ для всех $A \in \bigcup\limits_{n}^{s=1} (A_s)$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\varphi_i = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots < \varphi_j$. В частности, при $i = 1$ и $j = 2$ получим бесконечную цепь r-направлений, к которым применима теорема 7. Приведем лишь два следствия из теоремы 7 для направления φ_2.

Следствие 7.1. *Пусть m и h — внутренние ΩB-спутники ΩB-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, причем $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является ΩB-формацией с внутренним ΩB-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Следствие 7.2. *Пусть m и h — внутренние Ω-спутники ΩB_n-формаций (ΩB_∞-формаций) $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно, причем $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{C}$. Тогда $\mathfrak{C}$-формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ является ΩB_n-формацией (ΩB_∞-формацией) с внутренним Ω-спутником f таким, что $f(\Omega') = \mathfrak{F}$, $f(A) = m(A) \circ \mathfrak{H}$ для всех $\mathrm{A} \in \mathfrak{K}(\mathfrak{M}) \cap \Omega$ и $f(A) = h(A)$ для всех $\mathrm{A} \in \Omega \backslash \mathfrak{K}(\mathfrak{M})$.*

Отметим, что в силу теоремы 6 теорема 7 остается верной и для направления $\varphi_2' > \varphi_2$. В связи с этим возникает следующий

Вопрос 2. Для каких r-направлений $\varphi > \varphi_2$ множество $\Omega\mathbf{F}_n^\varphi$ всех n-кратно Ω-расслоенных $\mathfrak{C}$-формаций с направлением φ является моноидом для любого $n \in \mathbb{N}$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80, N 4. P. 300–305.
2. *Шеметков Л. А.* Ступенчатые формации групп // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 4. С. 628–648.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
5. *Hartley B.* On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. V. 19, N 3. P. 193–207.
6. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
7. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. Вып. 7. Гомель: ГГУ, 1992. С. 39–43.
8. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.
9. *Ведерников В. А., Коптюх Д. Г.* Частично композиционные формации групп. Брянск, 1999. 28 с. (препринт / БГПУ; № 2).
10. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.
11. *Vedernikov V. A.* Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. Steklov Institute Math. 2001. Suppl. 2. P. 217–233.
12. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.
13. *Ведерников В. А.* О новых типах ω-веерных формаций конечных групп // Укр. мат. конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. Киев, 2002. С. 36–45.
14. *Ведерников В. А.* О новых типах ω-веерных классов Фиттинга конечных групп // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 897–906.
15. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
16. *Ведерников В. А.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга групп с конечными композиционными рядами // Укр. мат. конгресс. Алгебра и теория чисел: Тез.докл. Киев, 2001. С. 16–17.
17. *Ведерников В. А., Демина Е. Н.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга T-групп // Алгебра и ее приложения: Тр. Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения А. И. Кострикина. Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2009. С. 26–29.
18. *Higgins P. J.* Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 3. P. 366–416.
19. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.
20. Общая алгебра / Под ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. Т. 2.
21. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
22. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
23. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
24. *Сорокина М. М.* О минимальных спутниках кратно Ω-расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп // Брянскому гос. пед. ун-ту 70 лет: Сб. науч. тр. Брянск: БГПУ, 2000. С. 199–203.
25. *Скачкова (Еловикова) Ю. А.* Решетки Ω-расслоенных формаций // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 2. С. 85–94.
26. *Ведерников В. А., Коптюх Д. Г.* Ω-расслоенные формации $\Omega\varphi$-длины 3 // Сб. науч. тр. математического факультета МГПУ. М.: МГПУ, 2005. С. 164–175.

Статья поступила 8 октября 2009 г.

Ведерников Виктор Александрович, Демина Екатерина Николаевна
Московский городской пед. университет, математический факультет,
кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания,
ул. Шереметьевская, 29, Москва 127521
vavedernikov@mail.ru, DeminaENmf@yandex.ru